21世纪电气信息学科立体化系列教材辅导书

信号与系统学习与考研指导

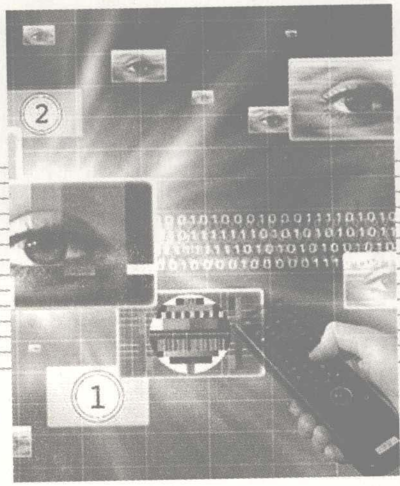
主编 金 波 涂玲英

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

21世纪电气信息学科立体化系列教材辅

信号与系统 学习与考研指导

主　编　金　波　涂玲英
副主编　盛玉霞　李　琼　马　赛



华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统学习与考研指导/金 波 涂玲英 主编.—武汉:华中科技大学出版社,2008年8月
ISBN 978-7-5609-4708-2

Ⅰ.信… Ⅱ.①金… ②涂… Ⅲ.信号系统-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第102145号

信号与系统学习与考研指导 金 波 涂玲英 主编

责任编辑:吴 晗 何 汶 封面设计:秦 茹
责任校对:朱 霞 责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉正风图文照排中心
印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:787mm×960mm 1/16 印张:17.25 字数:382 000
版次:2008年8月第1版 印次:2008年8月第1次印刷 定价:28.80元
ISBN 978-7-5609-4708-2/TN·120

内容简介

本书是“信号与系统”课程的辅助教材，也是考研课程“信号与系统”的复习参考用书。

本书的内容与现行的“信号与系统”教材的内容大体相当，但在广度和深度上都有适当的增加以适应硕士学位研究生入学考试的要求。全书内容共9章：信号与系统的概念，连续系统的时域分析，连续信号的傅里叶分析，连续系统的频域分析，连续系统的复频域分析，连续系统的系统函数，离散系统的时域分析，离散系统的 z 域分析，系统的状态变量分析。每章内容包括基本要求、重点与难点、内容提要、例题精选、习题解答及自测题六部分。书中的附录部分提供了部分研究生入学考试试题。

本书的特点是注重基本概念、基本理论、基本分析方法的具体应用。例题精选中大多采用历年的考研试题，综合应用知识的能力强，同时，例题的解答注意解题思路和技巧的分析。

本书可作为本科生“信号与系统”辅导教材，也可供相关人员学习参考。

前 言

“信号与系统”是电气信息类的学科基础课，其重要性在于通过对它的学习，能够掌握信号与系统的基本概念、基本理论和基本分析方法，为后续专业课的学习打下坚实的基础。同时，它把信号与系统的基本知识与数学分析的基本内容紧密地联系起来，为巩固、深化、提高数学分析的知识提供了一个很好的场所。无疑，通过本课程的学习，同学们能够提高数学分析的素质和修养。因此，这门课程历来为人们所重视。同时“信号与系统”课程也是电气信息类专业必考的考研课程。

要学好本课程，必须加强习题训练，通过各种典型例题的分析，初学者就能更好地消化本课程的基本理论，而求解一定数量典型而深入的习题，则是学好信号与系统不可缺少的有力手段。同时，在系统地学完“信号与系统”课程以后，大家都感到非常需要一本既能提纲挈领、简明扼要地总结信号与系统的基本知识，又能综合应用这些知识去灵活地分析信号与系统的基本问题的参考书。本书就是本着这一目的、为配合华中科技大学出版社出版的《信号与系统基础》的使用而编写的学习指导书。希望它能对同学们学好“信号与系统”这门重要课程有所帮助。

本书的内容与现行的“信号与系统”教材的内容大体相当，但在广度和深度上都有适当的增加以适应硕士学位研究生入学考试的要求。全书内容共 9 章：信号与系统的概念，连续系统的时域分析，连续信号的傅里叶分析，连续系统的频域分析，连续系统的复频域分析，连续系统的系统函数，离散系统的时域分析，离散系统的 z 域分析，系统的状态变量分析。每章内容包括基本要求、重点与难点、内容提要、例题精选、习题解答及自测题六部分。每章内容提要是这一章知识点的总结和要点；例题精选，通过对典型例题的分析，学生可加深对基本概念和内容的理解，提高分析问题解决问题的能力；习题解答，为配合《信号与系统基础》教材的学习，对书中的习题进行了详细的解答；每章后选编了一套自测题，供学生学习和复习后进行自我检测。书中的附录部分提供了部分研究生入学考试试题。供同学们了解试题的题型、范围、深度和难易程度以及解题的方法。

本书自 2000 年在长江大学校内使用以来，受到长江大学学生和老师的普遍欢迎。特别是考研的同学，通过本书例题和习题的训练，在分析问题和解题能力上都得到了很大的提高。对他们的考研成功作出了一定的帮助。同时也受到了校外同行的高度评价。

全书由长江大学金波策划和主编。盛玉霞（武汉科技大学）编写第 2 章习题，李琼（武汉工程大学）编写第 4 章习题，涂玲英（湖北工业大学）编写第 5 章习题，黄金平（长江大

学)编写第7章习题，杨春勇(中南民族大学)编写第8章习题，马赛(海军工程大学)编写第9章习题。其余内容由金波编写。

由于编者水平有限，书中难免出现错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

作　者

2008年3月

目录

第 1 章　信号与系统的概念 …… (1)
1.1　基本要求 …… (1)
1.2　重点与难点 …… (1)
1.3　内容提要 …… (1)
1.4　例题精选 …… (3)
1.5　习题解答 …… (9)
1.6　自测题 …… (18)
第 2 章　连续系统的时域分析 …… (21)
2.1　基本要求 …… (21)
2.2　重点与难点 …… (21)
2.3　内容提要 …… (21)
2.4　例题精选 …… (22)
2.5　习题解答 …… (31)
2.6　自测题 …… (42)
第 3 章　连续信号的傅里叶分析 …… (46)
3.1　基本要求 …… (46)
3.2　重点与难点 …… (46)
3.3　内容提要 …… (46)
3.4　例题精选 …… (48)
3.5　习题解答 …… (57)
3.6　自测题 …… (69)
第 4 章　连续系统的频域分析 …… (73)
4.1　基本要求 …… (73)
4.2　重点与难点 …… (73)
4.3　内容提要 …… (73)
4.4　例题精选 …… (75)
4.5　习题解答 …… (84)
4.6　自测题 …… (96)
第 5 章　连续系统的复频域分析 …… (99)

5.1 基本要求 …… (99)
5.2 重点与难点 …… (99)
5.3 内容提要 …… (99)
5.4 例题精选 …… (100)
5.5 习题解答 …… (107)
5.6 自测题 …… (122)
第 6 章 连续系统的系统函数 …… (125)
6.1 基本要求 …… (125)
6.2 重点与难点 …… (125)
6.3 内容提要 …… (125)
6.4 例题精选 …… (126)
6.5 习题解答 …… (135)
6.6 自测题 …… (144)
第 7 章 离散系统的时域分析 …… (147)
7.1 基本要求 …… (147)
7.2 重点与难点 …… (147)
7.3 内容提要 …… (147)
7.4 例题精选 …… (149)
7.5 习题解答 …… (155)
7.6 自测题 …… (165)
第 8 章 离散系统的 z 域分析 …… (167)
8.1 基本要求 …… (167)
8.2 重点与难点 …… (167)
8.3 内容提要 …… (168)
8.4 例题精选 …… (169)
8.5 习题解答 …… (179)
8.6 自测题 …… (193)
第 9 章 系统的状态变量分析 …… (196)
9.1 基本要求 …… (196)
9.2 重点与难点 …… (196)
9.3 内容提要 …… (196)
9.4 例题精选 …… (198)
9.5 习题解答 …… (204)
9.6 自测题 …… (215)
附 录 …… (218)
附录 1 研究生入学考试试题 …… (218)
附录 2 自测题参考答案 …… (251)
参考文献 …… (266)

第 1 章

信号与系统的概念

1.1 基本要求

掌握信号的基本形式，描述方法；掌握信号的分类；掌握连续信号与离散信号、确定信号与随机信号、周期信号与非周期信号、左边信号与右边信号、能量信号与功率信号等重要概念。

了解系统的基本概念，掌握系统各种描述方法；掌握连续系统与离散系统、线性系统与非线性系统等重要的概念；掌握系统的线性、非时变、因果的性质。

1.2 重点与难点

- 功率信号和能量信号的概念，以及信号功率的计算、信号能量的计算。
- 冲激函数 $\delta(t)$ 的定义及三个重要性质；冲激偶的定义及其性质。
- 带跳变点的分段信号的导数波形、积分波形。
- 信号的三种波形变换：平移、反折、尺度变换。
- 判别系统的线性性、时变性、因果性的方法。
- 线性非时变性质是最重要的性质。包括微分特性、积分特性、频率保持性，以及分解特性。

1.3 内容提要

1. 信号的分类

(1) 周期信号是功率信号。除了具有无限能量及无限功率的信号外，时限的或当 $t\to\infty$，$f(t)=0$的非周期信号就是能量信号，当 $t\to\infty$，$f(t)\neq 0$ 的非周期信号是功率信号。

(2) 正弦信号是最常用的周期信号，正弦信号组合后在任一对频率(或周期)的比值是有理分数时才是周期的。其周期为各个周期的最小公倍数。

2. 基本信号

(1) 由直线构成的信号：单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$、单位斜坡信号 $R(t)$、门函数 $G_\tau(t)$、符号函数 $\mathrm{sgn}(t)$，它们的关系为

$$\varepsilon(t)=\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t},\quad R(t)=t\varepsilon(t)=\int_0^t\varepsilon(t)\mathrm{d}t$$

$$G_\tau(t)=\varepsilon(t+0.5\tau)-\varepsilon(t-0.5\tau)$$

$$\mathrm{sgn}(t)=-1+2\varepsilon(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(-t)$$

(2) 复指数信号含有三种信号：实指数信号、按指数变化的正弦信号、正弦信号。

(3) 单位阶跃函数和单位冲激函数是信号分析最基本的信号，它们的关系为

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t},\quad \varepsilon(t)=\int_{-\infty}^t\delta(\tau)\mathrm{d}\tau$$

(4) 冲激函数的三个重要性质：缩放性质、乘积性质、抽样性质。冲激偶也同样有这三个性质。$\delta(t)$是偶函数，面积为 1；$\delta'(t)$是奇函数，面积为 0。

3. 信号的运算

(1) 带跳变点的分段信号的导数，必含有冲激函数，其跳变幅度就是冲激函数的强度。正跳变对应着正冲激；负跳变对应着负冲激。

(2) 信号的平移 $f(t\pm t_0)$、反折 $f(-t)$、尺度变换 $f(at)$是最常用的信号运算。平移、反折不改变信号的面积或能量。信号变换的先后顺序不改变其结果。

4. 信号的分解

(1) 任意信号可分解为无穷多个冲激函数的连续和：

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

(2) 任意信号可以分解为偶分量和奇分量之和。奇分量、偶分量分别为

$$f_o(t)=\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)],\quad f_e(t)=\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]$$

5. 系统的判别

(1) 判别系统的线性性、时变性、因果性的方法如下。

线性性：满足叠加原理，如 $T[Af_1(t)+Bf_2(t)]=AT[f_1(t)]+BT[f_2(t)]$是线性系统。

时变性：如果系统的输入-输出关系不随时间改变，则系统是非时变的。对于非时变系统，有

$$T[f(t-t_0)]=y(t-t_0)$$

因果性：如果系统对输入信号的响应与该输入信号的未来值无关，则称为因果系统。

(2) 系统由微分方程给出时，若其微分方程中的所有的项都只含 $f(t)$或 $y(t)$，则它是线性的；若任何一项是常数，或是包含了 $f(t)$和(或) $y(t)$的乘积，或是 $f(t)$或 $y(t)$的非线性函数，则它是非线性的。

若微分方程中任何一项的系数都是常数，则它是非时变的；若 $f(t)$或 $y(t)$中的任何一

项的系数是 t 的显时函数,则它是时变的。

6. 系统的性质

(1) 线性非时变系统具有微分特性、积分特性、频率保持特性。

(2) 线性系统具有分解特性,即 $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$。

零输入响应是初始值的线性函数,零状态响应是输入信号的线性函数,但全响应既不是输入信号也不是初始值的线性函数。

1.4　例题精选

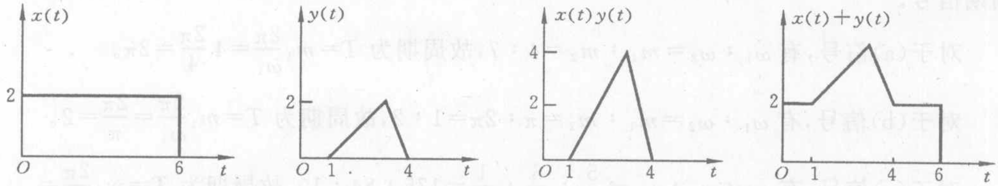
【例 1-1】　判断信号 $f_1(t)=8e^{-4t}\varepsilon(t)$, $f_2(t)=\cos5\pi t+2\cos2\pi^2 t$ 是否为能量信号或功率信号。

解　$$E_1=\lim_{T\to\infty}\int_0^T 64e^{-8t}dt=\lim_{T\to\infty}[-8e^{-8T}+8]=8\ \mathrm{J};\quad P_1=0$$

$$P_2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{T/2}\cos^2(5\pi t)dt+\int_{-T/2}^{T/2}4\cos^2(2\pi^2 t)dt+\int_{-T/2}^{T/2}4\cos(5\pi t)\cdot\cos(2\pi^2 t)dt\right]$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{2}[1+\cos(10\pi t)]dt+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}2[1+\cos(4\pi^2 t)]dt$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2}\cdot T+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cdot 2\cdot T=2.5\ \mathrm{W}$$
$$E_2=\infty$$

所以 $f_1(t)$ 为能量信号, $f_2(t)$ 为功率信号。

【例 1-2】　求如例 1-2 图所示信号的信号能量。



例 1-2 图

解　$x(t)$ 中的能量是

$$E_x=2^2\cdot 6\ \mathrm{J}=24\ \mathrm{J}$$

$y(t)$ 中的能量是

$$E_y=\frac{1}{3}\cdot 2^2\cdot 3\ \mathrm{J}=4\ \mathrm{J}$$

$f(t)=x(t)y(t)$ 中的能量是

$$E_f=\frac{1}{3}\cdot 4^2\cdot 3\ \mathrm{J}=16\ \mathrm{J}$$

$g(t)=x(t)+y(t)$ 中的能量是

$$E_g=\int_{-\infty}^{\infty}[x^2(t)+y^2(t)+2x(t)y(t)]\mathrm{d}t$$

$$=E_x+E_y+2\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y(t)\mathrm{d}t=(24+4+12)\ \mathrm{J}=40\ \mathrm{J}$$

【例 1-3】 判断下列信号是周期信号还是非周期信号。若是周期信号，求其周期 T。

(a) $a\sin 4t+b\cos 7t$　　(b) $a\cos\pi t+b\sin 2\pi t$　　(c) $a\sin\dfrac{5t}{2}+b\cos\dfrac{6t}{5}+c\sin\dfrac{t}{7}$

解 如果包含 n 个不同频率正弦分量的复合信号是一个周期为 T 的周期信号，则其周期 T 必为各分量信号周期 T_i 的整倍数。如有 2 个分量，即 $T=m_1T_1=m_2T_2$，m_i 为正整数。

因为 $$T_i=\frac{2\pi}{\omega_i}$$

所以 $$\frac{2\pi}{\omega_1}m_1=\frac{2\pi}{\omega_2}m_2,\quad \frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{m_1}{m_2}$$

即 $$\omega_1:\omega_2=m_1:m_2$$

则 $$T=m_1\frac{2\pi}{\omega_1}=m_2\frac{2\pi}{\omega_2}$$

对于 n 个分量只要能找到 n 个不含整数公因子的正整数 m_i，使

$$\omega_1:\omega_2:\omega_3:\cdots:\omega_n=m_1:m_2:m_3:\cdots:m_n$$

成立，就可判定该信号为周期信号，其周期为

$$T=m_iT_i=m_i\frac{2\pi}{\omega_i}$$

如复合信号中某分量频率为无理数，则该信号常称为概周期信号。概周期信号是非周期信号。

对于(a)信号，有 $\omega_1:\omega_2=m_1:m_2=4:7$，故周期为 $T=m_1\dfrac{2\pi}{\omega_1}=4\ \dfrac{2\pi}{4}=2\pi$。

对于(b)信号，有 $\omega_1:\omega_2=m_1:m_2=\pi:2\pi=1:2$，故周期为 $T=m_1\dfrac{2\pi}{\omega_1}=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$。

对于(c)信号，有 $\omega_1:\omega_2:\omega_3=\dfrac{5}{2}:\dfrac{6}{5}:\dfrac{1}{7}=175:84:10$，故周期为 $T=m_3\dfrac{2\pi}{\omega_3}=10\ \dfrac{2\pi}{1/7}=140\pi$。

【例 1-4】 计算下列积分。

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty}\delta(t-2)\cos[\omega(t-3)]\mathrm{d}t$　　(b) $\displaystyle\int_{0_-}^{\infty}\mathrm{e}^{-2t}\delta(\lambda-t)\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty}\delta(t+3)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$　　(d) $\displaystyle\int_{0_-}^{\infty}\delta'(t)\frac{\sin 10t}{10t}\mathrm{d}t$

解 (a) 原式 $=\cos[\omega(2-3)]=\cos\omega$

(b) 原式 $=\mathrm{e}^{-2\lambda}\displaystyle\int_{0_-}^{\infty}\delta(\lambda-t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\mathrm{e}^{-2\lambda} & (\lambda\geqslant 0)\\ 0 & (\lambda<0)\end{cases}$

(c) 原式 $= e^{-j3\omega}\int_{0}^{\infty}\delta(t+3)\mathrm{d}t = 0$

(d) 原式 $= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\sin 10t}{10t}\right]_{t=0} = -\left.\frac{10t\cos 10t-\sin 10t}{10t^{2}}\right|_{t=0} = -5\sin 10t\,|_{t=0} = 0$

【例 1-5】 化简下列各式。

(a) $\int_{-\infty}^{t}\delta(2\tau-1)\mathrm{d}\tau$　(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\delta(t)\right]$　(c) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\cos t\cdot\delta(t)]\sin t\,\mathrm{d}t$

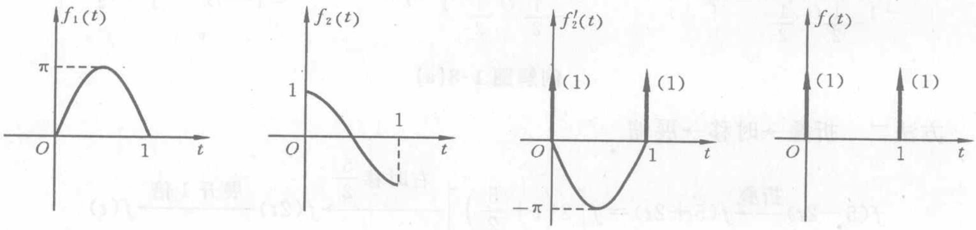
解　(a) 原式 $= \int_{-\infty}^{t}\frac{1}{2}\delta\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\varepsilon\left(t-\frac{1}{2}\right)$

(b) 原式 $= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\delta(t)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta'(t)$

(c) 原式 $= \int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\sin t\,\mathrm{d}t = -(\sin t)'\,|_{t=0} = -\cos t\,|_{t=0} = -1$

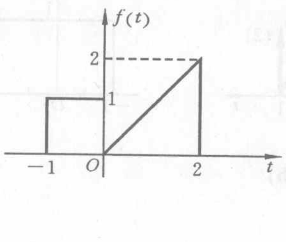
【例 1-6】 绘出信号 $f(t)=\pi\sin\pi t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\cos\pi t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]\}$ 的波形图。

解　设 $f_1(t)=\pi\sin\pi t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$，$f_2(t)=\cos\pi t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$，波形如例解图 1-6 所示。

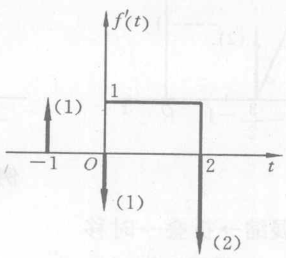


例解图 1-6

【例 1-7】 已知信号 $f(t)$ 的波形如例 1-7 图所示，画出信号 $f'(t)$ 的波形。



例 1-7 图

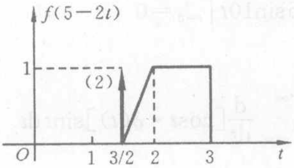


例解图 1-7

解　$f(t)$ 的一阶导数 $f'(t)$ 的波形如例解图 1-7 所示。

由本例可知，当信号 $f(t)$ 出现第一类间断点时，其导数在间断点处将出现冲激。当

$f(t)$沿 t 的正方向出现向上突跳点时，其导数在间断点处将出现正的冲激；当 $f(t)$沿 t 的正方向出现向下突跳点时，其导数在间断点处将出现负的冲激。



例 1-8 图

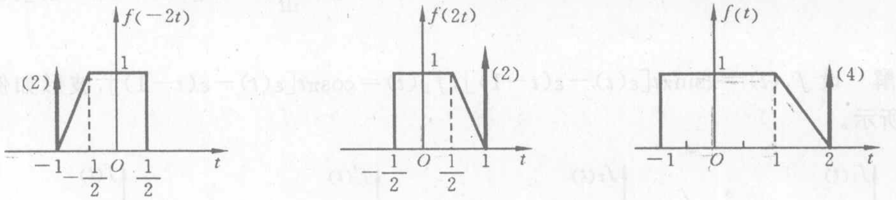
【例 1-8】 已知 $f(5-2t)$的波形如例 1-8 图所示。试画出 $f(t)$的波形。

解　$f(5-2t)$无疑是将 $f(t)$经过折叠、时移、展缩三种变换后而得到的。但三种变换的次序可以是任意的，故共有六种途径。下面用其中的四种方法求解。在求解过程中要特别注意冲激函数的展缩变换。

方法一　时移→折叠→展缩

$$f(5-2t)=f\left[-2\left(t-\frac{5}{2}\right)\right]\xrightarrow{\text{左时移}\frac{5}{2}}f(-2t)\xrightarrow{\text{折叠}}f(2t)\xrightarrow{\text{展开 1 倍}}f(t)$$

波形如例解图 1-8(a)所示。

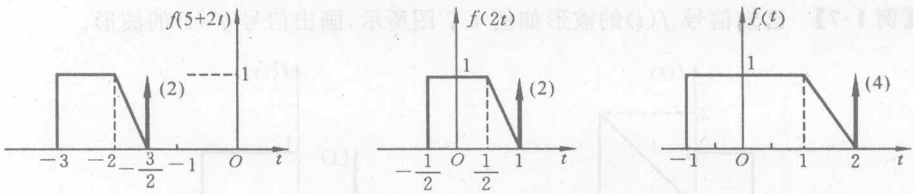


例解图 1-8(a)

方法二　折叠→时移→展缩

$$f(5-2t)\xrightarrow{\text{折叠}}f(5+2t)=f\left[2\left(t+\frac{5}{2}\right)\right]\xrightarrow{\text{右时移}\frac{5}{2}}f(2t)\xrightarrow{\text{展开 1 倍}}f(t)$$

波形如例解图 1-8(b)所示。



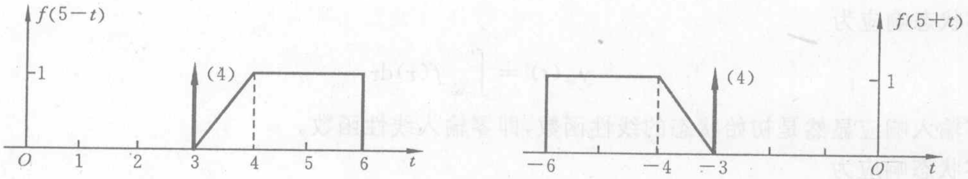
例解图 1-8(b)

方法三　展缩→折叠→时移

$$f(5-2t)\xrightarrow{\text{展开 1 倍}}f\left(5-2\times\frac{1}{2}t\right)=f(5-t)\xrightarrow{\text{折叠}}f(5+t)\xrightarrow{\text{右时移 5}}f(t)$$

波形如例解图 1-8(c)所示。

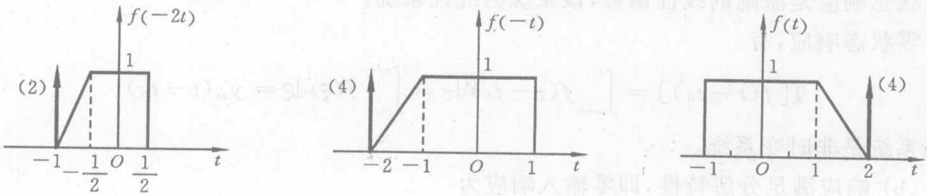
方法四　时移→展缩→折叠



例解图 1-8(c)

$$f(5-2t)=f\left[-2\left(t-\frac{5}{2}\right)\right]\xrightarrow{\text{左时移}\frac{5}{2}}f(-2t)\xrightarrow{\text{展开 1 倍}}f(-t)\xrightarrow{\text{折叠}}f(t)$$

波形如例解图 1-8(d)所示。



例解图 1-8(d)

【例 1-9】 判断下列系统是否为线性的、非时变的、因果的？

(a) $y(t)=f(2t)$；　　　　(b) $y(t)=\int_{-\infty}^{5t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$。

解 (a) $T[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]=a_1f_1(2t)+a_2f_2(2t)=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$，故为线性系统。

$T[f(t-t_0)]=f(2t-t_0)\neq y(t-t_0)=y[2(t-t_0)]$，故为时变系统。

当 $t=1$ 时，$y(1)=f(2)$，显然响应在前，激励在后。故为非因果系统。

(b) $T[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]=\int_{-\infty}^{5t}[a_1f_1(\tau)+a_2f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$，故为线性系统。

$T[f(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{5t}f(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{5t-t_0}f(\xi)\mathrm{d}\xi\neq y(t-t_0)=\int_{-\infty}^{5(t-t_0)}\mathrm{e}(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau$，故为时变系统。

当 $t=1$ 时，$y(1)=\int_{-\infty}^{5}f(\tau)\mathrm{d}\tau$，即响应在前，激励在后。故为非因果系统。

【例 1-10】 设系统的初始状态为 $x(0)$，激励为 $f(t)$，各系统的全响应 $y(t)$ 与激励和初始状态的关系如下，试判断下列系统是否为线性的、非时变的。

(a) $y(t)=\mathrm{e}^{-t}x(0)+\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$；　　(b) $y(t)=ax(0)+btf(t)$。

解 (a) 响应满足分解特性，即零输入响应为

$$y_{zi}(t)=\mathrm{e}^{-t}x(0)$$

零状态响应为

$$y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

零输入响应显然是初始状态的线性函数，即零输入线性函数。

零状态响应为

$$\begin{aligned}T[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]&=\int_{-\infty}^{t}[a_1f_1(\tau)+a_2f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{t}a_1f_1(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{-\infty}^{t}a_2f_2(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)\end{aligned}$$

故零状态响应是激励的线性函数，该系统为线性系统。

对于零状态响应，有

$$T[f(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{t}f(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t-t_0}f(\xi)\mathrm{d}\xi=y_{zs}(t-t_0)$$

故该系统是非时变系统。

(b) 响应满足分解特性，即零输入响应为

$$y_{zi}(t)=ax(0)$$

零状态响应为

$$y_{zs}(t)=btf(t)$$

零输入响应显然是初始状态的线性函数，即零输入线性函数。

零状态响应为

$$\begin{aligned}T[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]&=bt[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]\\&=bta_1f_1(t)+bta_2f_2(t)=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)\end{aligned}$$

故零状态响应是激励的线性函数，该系统为线性系统。

对于零状态响应，有

$$T[f(t-t_0)]=btf(t-t_0)\neq y_{zs}(t-t_0)=b(t-t_0)f(t-t_0)$$

故该系统是时变系统。

【例 1-11】 一线性非时变系统具有非零的初始状态，已知当激励为 $f(t)$ 时的系统全响应为 $y_1(t)=\mathrm{e}^{-t}+2\cos\pi t,t>0$；若初始状态不变，激励为 $2f(t)$ 时系统的全响应为 $y_2(t)=3\cos\pi t,t>0$。求在同样初始条件下，如激励为 $3f(t)$ 时系统的全响应 $y_3(t)$。

解 设

$$y_1(t)=y_{1zi}(t)+y_{1zs}(t)\tag{1}$$

$$y_2(t)=y_{2zi}(t)+y_{2zs}(t)\tag{2}$$

因为初始状态不变，零输入响应不变，$y_{2zi}(t)=y_{1zi}(t)$；零状态响应是 $f(t)$ 的线性函数。

故式(2)变为

$$y_2(t)=y_{1zi}(t)+2y_{1zs}(t)\tag{3}$$

由式(1)、式(3)可解得

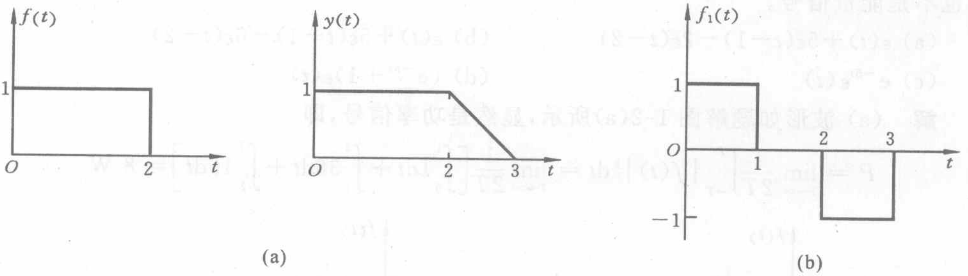
$$y_{1zs}(t)=y_2(t)-y_1(t)=\mathrm{e}^{-t}+\cos\pi t\quad(t>0)$$

$$y_{1zi}(t)=y_1(t)-y_{1zs}(t)=2\mathrm{e}^{-t}+\cos\pi t\quad(t>0)$$

当系统激励为 $3f(t)$ 时全响应为

$$y_3(t)=y_{1zi}(t)+3y_{1zs}(t)=e^{-t}+4\cos\pi t\quad(t>0)$$

【例 1-12】 在例 1-12 图(a)中 $f(t)$ 和 $y(t)$ 分别是线性非时变系统的激励的响应信号。试画出相应于例 1-12 图(b)所示激励 $f_1(t)$ 的响应波形 $y_1(t)$。



例 1-12 图

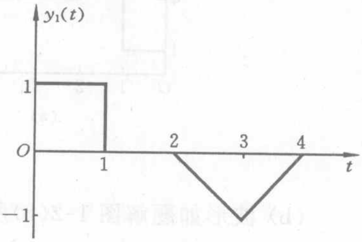
解　比较 $f(t)$ 和 $f_1(t)$ 的波形，因为

$$f_1(t)=f(t)-f(t-1)$$

所以

$$y_1(t)=y(t)-y(t-1)$$

波形如例解图 1-12 所示。



例解图 1-12

1.5　习题解答

基本练习题

1-1　判断下列信号是否是周期的，如果是周期的，求出它的基频和公共周期。

(a) $f(t)=4-3\sin(12\pi t)+\sin(30\pi t)$　　(b) $f(t)=\cos(10\pi t)\cos(20\pi t)$

(c) $f(t)=\cos(10\pi t)-\cos(20t)$　　(d) $f(t)=\cos(2t)-\sqrt{2}\cos\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$

解　(a) 基频

$$f_0=\mathrm{GCD}(6,15)=3\ \mathrm{Hz}$$

因此，公共周期

$$T=\frac{1}{f_0}=\frac{1}{3}\ \mathrm{s}$$

(b)

$$f(t)=\cos(10\pi t)\cos(20\pi t)=0.5(\cos 10\pi t+\cos 30\pi t)$$

基频

$$f_0=\mathrm{GCD}(5,15)=5\ \mathrm{Hz}$$

因此，公共周期

$$T=\frac{1}{f_0}=\frac{1}{5}\ \mathrm{s}$$

(c) 由于两个分量的频率 $\omega_1=10\pi$ rad/s、$\omega_2=20$ rad/s 的比值是无理数，因此无法找出公共周期，所以是非周期的。

(d) 两个分量是同频率的，基频