数学通报丛书

—— 2 ——

对 称

段学復

对　　称

段 学 复

科 学 出 版 社

1956·北 京

对　　称

著　者	段　学　复
出版者	科学出版社 北京朝陽門大街117号 北京市書刊出版業營業許可証出字第061号
印刷者	北京市印刷二厂
总經售	新华書店

1956年10月第一版　書号：0505　印張：$1\frac{3}{16}$

1956年10月第一次印刷　開本：787×1092 1/32

(京)0001—28,192　字數：21,000

定价：(7) 0.13元

目　　錄

寫 在 前 面

对称，照字面来講，就是，兩个东西相对而又相称（相仿、相等）。因此，把这兩个东西互換一下，好像沒动一样.

对称的概念，可以說与近世代数学中“群”的概念是分不开的. 当然，群的一般抽象定义一直到了上世紀末才完全确立，就是比較具体而特殊的排列群的定义也只不过早有了几十年的光景. 而对称的概念，尤其是几何方面对称的概念，却是老早就有了的. 实际上，在建筑設計方面，在衣物装飾方面，对称的概念一直起着重要的作用. 自然界中，矿物結晶体显示出对称形体. 人的身体的外形，就是左右对称的.

这本小册子，主要是向大家介紹有关对称的数学. 先講代数对称，再講几何对称，包括对於装飾及結晶体的应用，最后引出群的定义. 通过这些內容，还希望能够帮助大家了解：数学抽象理論是由具体实际来的，而又有具体实际的应用. 一方面，数学理論有高度的抽象性，它往往把一些表面上看来好像沒有什么关系的东西从量的侧面很紧密的連系和統一起来. 另方面，数学理論有广泛的应用，它往往可以应用到極其广泛而不同的方面去.

代数对称——对称多項式及推廣

§1. 一元二次方程的根的对称多項式

假設 a, b, c 都是实数，而且 $a \neq 0$，又假設 x 是未知数（变数或文字），那么 x 的二次方程

$$(1) \qquad a x^2 + b x + c = 0$$

的兩根是

$$(2) \qquad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

及

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

依照判别式 $b^2 - 4ac \gtreqless 0$ 三种不同情况，兩根 x_1, x_2 或是不相等的兩个实数，或是相等的兩个实数，或是共軛的兩个复数.

更一般些，不拘 $a \neq 0, b, c$ 是什么复数，x_1, x_2 仍然是方程（1）的兩个根，（因为把它們代进 $ax^2 + bx + c$ 就得 0），而且仍然是复数，这是因为任何复数（如 $b^2 - 4ac$）的平方根还是复数.

事实上，假設 $a + bi$ 是个复数，这里 a 和 b 是实数. 我們也可以写：

$$(3) \qquad a + bi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

$$\rho = +\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1}\frac{b}{a}.$$

根据棣么佛公式，有：

$$(4)\qquad \sqrt{a+bi}=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right),$$

及
$$\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{2}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{2}\right)$$
$$=-\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right),$$

其中 $\sqrt{\rho}$ 取非負的值.

我們也可以換一个方法来做. 假設

$$(5)\qquad \sqrt{a+bi}=c+di,$$

其中 c 和 d 都是实数，那么

$$(6)\qquad a+bi=(c+di)^2=(c^2-d^2)+2cdi.$$

所以

$$(7)\qquad c^2-d^2=a,\quad 2cd=b.$$

由此

$$(8)\qquad c^2+d^2=\sqrt{(c^2+d^2)^2}=\sqrt{(c^2-d^2)^2+(2cd)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}.$$

所以

$$(9)\qquad c^2=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\geqslant 0,$$

$$d^2=\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\geqslant 0.$$

c 有兩值，d 有兩值，但 c 定后 d 也决定了，因为 $2cd=b$，(可設 $b\neq 0$). 这样决定了的兩个 $c+di$ 平方起来确实是 $a+bi$，因此就是 $a+bi$ 的兩个平方根.

維特公式就是說，

(10) $$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

x_1+x_2 和 x_1x_2 都有这样性質：把 x_1 和 x_2 对换，仍然不变，因为

(11) $$x_1+x_2=x_2+x_1,\quad x_1x_2=x_2x_1.$$

有这样性質的 x_1 和 x_2 的多項式叫做对称多項式，例如 $x_1^2+x_2^2$，$x_1^2x_2+x_1x_2^2$ 等也都是，但是 x_1-x_2 却不是. x_1+x_2 和 x_1x_2 都叫做初等对称多項式. 可以証明，凡是 x_1 和 x_2 的对称多項式都可以用它們表出来. 例如，（这不是証明！）

(12) $$\begin{aligned}&x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\left(\therefore=\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)\\&x_1^2x_2+x_1x_2^2=x_1x_2(x_1+x_2)\left(\therefore=-\frac{bc}{a^2}\right).\end{aligned}$$

§2. 一元 n 次方程的根的对称多項式

我們現在来看看一般的情况. 假設 n 是一个正整数，又假設 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是复数，且 $a_0\neq 0$，那么就有 n 次方程

(13) $$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0.$$

著名的代数基本定理就是說，这样的方程有 n 个根，都是复数，可以有相同的，假設就是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 根据因子定理，得有

(14) $$\begin{aligned}&a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\\&=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).\end{aligned}$$

这个重要定理的証明是很多的．最先一个証明是德国大数学家高斯在 1799 年給的，他还給了另外三个証明．各个証明有的初等一些但是却比較長，有的高等一些（如用复变数函数論）只有几行，無論如何都要用到連續性質，就是說，多項式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 是 x 的連續函数．用簡單的話講，就是說，当 x 的值变动得很小的时候，$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的值也变动得很小．（証明可以参看，庫若什著高等代数教程譯本 271—288 頁，或奧庫涅夫著高等代数譯本下册 174—195 頁．）

这是一种存在定理，只是說有但是沒有說如何求．对於 $n=3$ 和 4 的情形，对根有一般的公式．（参看庫若什書 288—296頁或奧庫涅夫書下册211—226頁.）当$n\geqq5$的时候，对根沒有像在二次情形一般的公式．求出实数根的近似值（即与正确值相接近的值）的一般方法，尤其是当 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是实数的情形，是我国秦九韶在 1247 年首先給出的，比英国郝奈耳的發現（1819 年）要早得多．对於复数根的情形，是俄国大数学家罗巴切夫斯基給出的（1834 年）．（参看庫若什書 329—334 頁或奧庫涅夫書下册 92—100頁及191—195 頁.）

与二次的情形相仿，維特公式給出：

$$
(15)\quad \begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_1}{a_0}, \\ x_1x_2+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_2x_n \\ \quad+\cdots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_2}{a_0}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}. \end{cases}
$$

像 $x_1+x_2+\cdots+x_n, \cdots, x_1x_2\cdots x_n$ 等这样多項式，不論我們把那兩个 x_i 和 x_j $(i\neq j)$ 对換一下，因之也就是不論我們对於 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 作怎样的排列，（因为任何的排列都可以由一些个兩个东西的对換得来，）都不变动，所以就叫做 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的对称多項式．它們还叫做初等对称多項式，因为根的任意一个对称多項式都可以用它們的多項式表示出来．这就是所謂对称多項式的基本定理，我們在这里不去証明，我們只提一下，有一种証明是利用所謂字典排列法，那就是說，$x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 說是在 $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}$ 的前面，如果 l_i-m_i 中第一个不是 0 的是正的．（詳細証明可以参看庫若什書 238—249 頁或奧庫涅夫書下册 162—174 頁．）

我們現在証明一个較簡單的情形，就是牛頓公式，也就是来証明，

$$s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k\ (k\geqslant 1\ \text{整数}) \tag{16}$$

都可以用这些初等对称多項式的多項式表出来．

为的容易了解，我們先看一看 $n=2$ 的情形．为了簡單起見，可以假設 $a=1$，那样就得有

$$x^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2). \tag{17}$$

我們已有

$$s_1=x_1+x_2=-b,\quad x_1x_2=c. \tag{18}$$

因为

$$x_1^2+bx_1+c=0,\quad x_2^2+bx_2+c=0, \tag{19}$$

所以

$$s_2+bs_1+2c=0,\ \text{或}\ s_2=-bs_1-2c=b^2-2c. \tag{20}$$

因为

(21) $x_1^3+bx_1^2+cx_1=0, \quad x_2^3+bx_2^2+cx_2=0,$

所以

(22) $s_3+bs_2+cs_1=0$, 或 $s_3=-bs_2-cs_1=-b^3+3bc$,

同样

(23) $s_4+bs_3+cs_2=0$, 或 $s_4=b^4-4b^2c+2c^2$,

(24) $s_5+bs_4+cs_3=0$, 或 $s_5=-b^5+5b^3c-5bc^2$.

. . . .

对於任意 n 的情形,我們也可同样进行. 在下面我們引进符号 $\sum$, 例如用

$$\sum x_1^{k-1}x_2 \text{ 表 } x_1^{k-1}x_2+\cdots+x_1^{k-1}x_n+x_2^{k-1}x_1+\cdots+x_2^{k-1}x_n+\cdots+x_n^{k-1}x_1+\cdots+x_n^{k-1}x_{n-1}.$$

若 $k\leqslant n$, 就有

$$(25)\quad \begin{cases} s_{k-1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=s_k+\sum x_1^{k-1}x_2, \\ s_{k-2}(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n) \\ \quad =\sum x_1^{k-1}x_2+\sum x_1^{k-2}x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{k-i}(x_1x_2\cdots x_i+\cdots)=\sum x_1^{k-i+1}x_2\cdots x_i \\ \quad +\sum x_1^{k-i}x_2\cdots x_{i+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_1(x_1x_2\cdots x_{k-1}+\cdots)=\sum x_1^2x_2\cdots x_{k-1} \\ \quad +ks_k. \end{cases}$$

以 -1, $+1$, -1, $\cdots$ 依次乘各式,然后加起来,就得到:

$$(26)\quad s_k-s_{k-1}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+s_{k-2}(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)+\cdots+(-1)^{k-1}s_1(x_1x_2\cdots x_{k-1}+\cdots)+(-1)^kks_k=0,$$

或 $$a_0 s_k + a_1 s_{k-1} + a_2 s_{k-2} + \cdots + k a_k = 0.$$

若 $k > n$, 那么最后一个公式应是

$$s_{k-n}(x_1 x_2 \cdots x_n) = \sum x_1^{k-n+1} x_2 \cdots x_n, \tag{27}$$

从而得到

$$s_k - s_{k-1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + s_{k-2}(x_1 x_2 + \cdots + x_{n-1} x_n) + \cdots + (-1)^n s_{k-n}(x_1 x_2 \cdots x_n) = 0, \tag{28}$$

或 $$a_0 s_k + a_1 s_{k-1} + a_2 s_{k-2} + \cdots + a_n s_{k-n} = 0.$$

对 $k > n$, 也可簡單利用下面式子

$$\begin{aligned} 0 &= x_i^{k-n}(a_0 x_i^n + a_1 x_i^{n-1} + \cdots + a_n) \\ &= a_0 x_i^k + a_1 x_i^{k-1} + \cdots + a_n x_i^{k-n} \end{aligned} \tag{29}$$

而得到 (28). 利用 (26) 及 (28) 等公式, 由 $k = 1$ 开始, 可以依次把 s_k 表为 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的多項式.

我們还可以作一些推广.

假設 $n = 3$. 那么 $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 等都是对称多項式, 可是 $x_1 + x_2$, $x_1 - x_2$, $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ 等都不是. 我們可以更仔細地区别一下:

$x_1 - x_2$ 只有当 x_1, x_2, x_3 都不变时才不变, 也就是說, 只对排列 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ 才不变.

$x_1 + x_2$ 对排列 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}$ 不变.

$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ 对排列 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ 不变.

这一些事实啟發我們去考慮 n 个文字的某些排列的集合，它們之中任意兩个接連来作的結果仍然是原来那些排列中的一个，(这叫做“群”)，並且考慮对於这些排列来講是不变的或者对称的多項式. 这种想法最初是由法国天才数学家伽罗华(1811—1832)搞清楚的，並引导着他徹底解决了五次及五次以上的一般方程不能用根式来解的問題. 他不但証明了，不存在对根的一般公式，按照这个公式从一般方程的系数出發只經过加，減，乘，除以及开方(根式)等代数运算就能得到了根，(挪威天才数学家阿倍尔 (1802—1829) 也解决了这一部分)；而且也証明了，存在着不能用代数运算来解的具体方程，还說明了方程能不能用代数运算来解的理由.

練習：$n=4$. $x_1x_2+x_3x_4$ 对於下列八个排列的“群”不变：

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_3 & x_4 & x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_4 & x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

而 $x_1x_2-x_3x_4$ 只对前面四个排列的“羣”不变.

几 何 对 称

§1. 平面上的对称

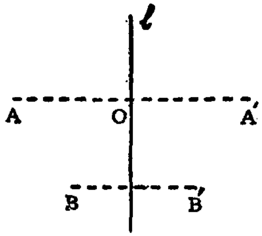
在平面上，我們可以考虑对於一直線的对称（或反射）以及对於一点的对称.

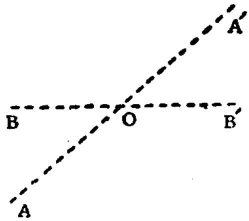
首先，点 A 和点 A' 叫做对於直線 l 是对称的，或以 l 为对称軸，如果：

$$AA' \perp l \text{ 於 } O \text{ 点,}$$

$$\text{且 } AO = OA'.$$

由 A 到 A' 的作用也可以看成平面在空間中繞 l 作 $\frac{360^\circ}{2}$ 的旋轉（或翻轉）.





其次，点 A 和点 A' 叫做对於点 O 是对称的，或以 O 为（2 次）对称心，如果：

$$AA' \text{ 过 } O \text{ 点,}$$

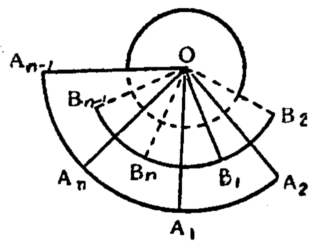
$$\text{且 } AO = OA'.$$

由 A 到 A' 的作用也可以看成平面繞点 O 作 $\frac{360^\circ}{2}$ 的旋轉，或平面在空間中繞过点 O 垂直於平面的直線作 $\frac{360^\circ}{2}$ 的旋轉.

我們可以进一步来考虑对於一个 n 次对称心的对称. 点 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n$ 以点 O 为 n 次对称心，如果:

$$OA_1 = OA_2 = \cdots = OA_{n-1} = OA_n,$$

且 $$\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \cdots = \angle A_{n-1}OA_n = \angle A_nOA_1 = \frac{360^\circ}{n}.$$



由 A_1 到 A_2 的作用也可以看成平面繞点 O 作 $\frac{360^\circ}{n}$ 的旋轉，或平面在空間中繞过点 O 垂直於平面的直線作 $\frac{360^\circ}{n}$ 的旋轉.

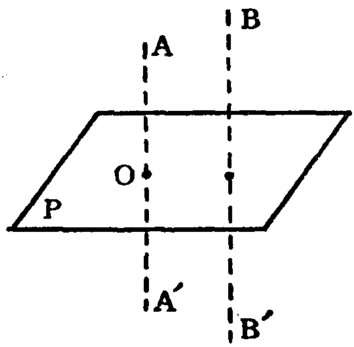
§2. 空間中的对称

在空間中，我們可以考虑对於一平面的对称(或反射)，对於一点的对称以及对於一直線的对称.

首先，点 A 和点 A' 叫做对於平面 P 是对称的，或以 P 为对称面，如果:

$$AA' \perp P \text{ 於 } O \text{ 点},$$

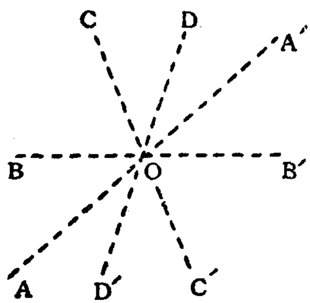
$$\text{且 } AO = OA'.$$



其次，点 A 和点 A' 叫做对於点 O 是对称的，或以 O 为对称心，如果：

$$AA' \text{ 过 } O \text{ 点},$$

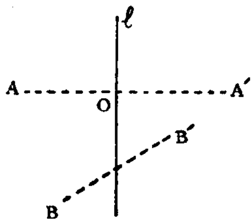
$$\text{且 } AO = OA'.$$

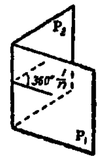


再次，点 A 和点 A' 对於直線 l 是对称的，或以 l 为（2 次）对称軸，如果：

$$AA' \perp l \text{ 於 } O \text{ 点},$$

$$\text{且 } AO = OA'.$$

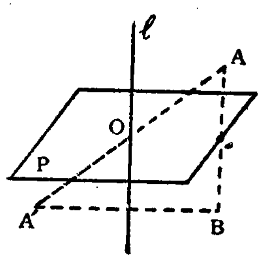




由 A 到 A' 的作用也就是繞直線 l 来作 $\dfrac{360^\circ}{2}$ 的旋轉.

我們也可以进一步考慮对於一个 n 次对称軸的对称,那也就是通过直線 l 的平面繞 l 来作 $\dfrac{360^\circ}{n}$ 的旋轉.

我們注意,"对於一点的对称"可以看成由"对於一平面的对称"和"对於一直線的对称"合起来,平面与直線互相垂直於該点.(圖中,A 与 A' 对点 O 对称,A 与 B 对平面 P 对称,B 与 A' 对直線 l 对称,直線 l 垂直平面 P 於点 O.)



§3. 正多边形的对称

平面中的圖形,如果通过对於某个軸(或某个 n 次心)的对称把自己变換到自己,就称为对於这个軸(或这个心)对称. 我們在这节中主要来考慮正多边形的对称. 正多边形的中心也就是內切圓和外接圓的中心.

i. 首先考慮正三角形 ABC: