东方考试教材
——考研系列

2006

考研数学最后冲刺

——全真模拟命题预测试卷及解答

(经济类)

全国考研数学辅导专家组　组编

黄先开　曹显兵
施明存　殷先军　编写

中国科学技术出版社

2006

考研数学最后冲刺

——全真模拟命题预测试卷及解答

（经济类）

全国考研数学辅导专家组　组编

黄先开　曹显兵
施明存　殷先军　编写

中国科学技术出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

考研数学最后冲刺——全真模拟命题预测试卷及解答(经济类)/黄先开,曹显兵,施明存,殷先军编写.—北京:中国科学技术出版社,2005

ISBN 7-5046-1504-8

Ⅰ.考… Ⅱ.①黄…②曹…③施…④殷… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 101470 号

策划编辑 肖 叶
责任编辑 许 慧
封面设计 东 方
责任校对 王勤杰
责任印制 安利平
法律顾问 宋润君

中国科学技术出版社
北京市海淀区中关村南大街 16 号 邮政编码:100081
电话:010-62103210 传真:010-62183872
http://www.kjpbooks.con.cn
科学普及出版社发行部发行
北京国防印刷厂印刷
*
开本:787 毫米×1092 毫米 1/16 印张:16.5 字数:410 千字
2005 年 9 月第 1 版 2005 年 9 月第 1 次印刷
印数:1—15 000 册 定价:25.00 元

使用说明

为了加强对参加2006年全国硕士研究生入学统一考试的广大考生复习的指导，强化模拟，实战训练，做好考前冲刺，我们特邀在考生中享有崇高威望的著名考研数学辅导专家、新生代领军人——**黄先开、曹显兵、施明存、殷先军**，严格按照**教育部**制订的《2006**年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲**》，精心编写了《2006**年考研数学最后冲刺**——全真模拟命题预测试卷及解答（**理工类**）》、《2006**年考研数学最后冲刺**——全真模拟命题预测试卷及解答（**经济类**）》，每册均精心设计和编写了24套最后冲刺全真模拟命题预测试卷及解答。

考生在答题时应注意以下几点：

1. 可在系统复习、全面复习的同时，结合本最后冲刺试题，以巩固复习效果。

2. 答题前应作好充分准备，找类似"考场的环境"答题，答题时应完全进入"考试状态"，使自己置身于"真正在考试"的环境中。必须在规定的时间内答完每份试卷。

3. 切忌边答题边看答案，即使碰上一看就会的题，也必须按要求答完。

4. 答完每份试卷后，应参照答案自己评分。有条件的考生，最好请老师或他人为自己评分。

5. 答题后，应根据得分情况，找出差距，及时查缺补漏，直至验收合格。只有这样，答题时才能思路畅通，有的放矢。

本书是在分析、研究全国硕士研究生入学统一考试的特点和近几年全国硕士研究生入学统一考试数学试题的基础上，为参加2006年全国硕士研究生入学统一考试的考生做考前最后冲刺专门编写的，反映了最新考试精神和最新考试动态。特别需要指出的是，北京理工大学数学系硕士研究生马立娟、徐海宁对本书进行了逐题认真演算，在此，表示衷心感谢！

希望广大考生通过本书的模拟冲刺训练，能进一步提高自己的应试水平，增强竞争实力，在2006年考研决战中，过关斩将，脱颖而出！

全国考研数学辅导专家组

目　　录

2006 年考研经济数学三最后冲刺试卷(一)

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 已知 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(u)\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{x^2} - 1$,则 $\int_0^1 xf'(2x)\mathrm{d}x =$ ________.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin(x-t)\mathrm{d}t}{(1-2\cos x)\cdot\ln(1+x^2)} =$ ________.

$\frac{1}{2}\int_0^1 x\cdot \mathrm{d}f(2x).$

(3) 差分方程 $y_{t+1} - y_t = t2^t$ 的通解为________.

$\frac{1}{2}\left[x\cdot f(2x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\cdot \mathrm{d}x\right]$

(4) 已知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵,$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,且满足关系式 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{ABA} + 2\boldsymbol{A}^2$,则 $\boldsymbol{B} =$

$\frac{1}{2}[f(2)$

________.

(5) 设 X 是在 $[0,1]$ 上取值的连续型随机变量,且 $P\{X \leqslant 0.29\} = 0.75$,如果 $Y = 1 - X$,有 $P\{Y \leqslant k\} = 0.25$,则 $k =$ ________.

(6) 在长为 a 的线段上任取两点,则两点间的距离的数学期望为________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 设 $f(x)$ 是奇函数,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$,则 , (0,0)处导数.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ $\qquad \dfrac{f(h)+2hx}{h}$

(A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

(B) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

(C) $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线平行于 x 轴.

(D) $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线不平行于 x 轴. [C]

(8) 设函数 $f(x)$ 处处可导,且有 $f'(0) = 1$,并对任何实数 x 和 h 恒有 $f(x+h) = f(h) + f(x) + 2hx$,则 $f'(x)$ 等于

(A) $2x+1$. (B) $x+1$. (C) x. (D) e^x. [A]

(9) 设 $D: x^2 + y^2 \leqslant 1, y > 0$; $D_1: x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0$,则

(A) $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. (B) $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(C) $\iint\limits_D |x|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} |x|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. (D) $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

[ ]

(10) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $(-8,8]$,则 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径及 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n}$ 收敛域分别为

(A)8,(−2,2].　　　　(B)8,[−2,2].

(C) 不定,(−2,2].　　　　(D)8,[−2,2).　　　　[　　]

(11) 下列极限存在的是

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}\arctan\dfrac{1}{x}$.　　　　(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\arctan\dfrac{1}{x}$.

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}\arctan\dfrac{1}{|x|}$.　　　　(D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{|x|}\arctan\dfrac{1}{x}$.　　　　[　　]

(12) 设 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, 若 $\boldsymbol{P}_1^m\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2^n=\begin{pmatrix}a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{33}&a_{32}&a_{31}\end{pmatrix}$, 则 m,n 的取值可能为

(A) $m=3,n=2$.　　　　(B) $m=3,n=5$.

(C) $m=2,n=3$.　　　　(D) $m=2,n=2$.　　　　[　　]

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-3$, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的三个线性无关的解向量, 则下列各组中为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.　　　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.　　　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

[　　]

(14) 设连续型随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)$ 是一个偶函数, $F(x)$ 为 X 的分布函数, 则对任意实数 $x\in\mathbf{R}$, 有 $F(-x)+F(x)$ 等于 (特值法)

(A)0.　　　(B)1.　　　(C)2.　　　(D)−1.　　　[　　]

三、解答题(本题 9 小题, 满分 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 9 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续, 证明: $2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y=\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2$. 交换顺序法:

$$\int_0^a \quad \int_0^x f(x)dx+\int_x^a f(y)dy\}$$

(16)(本题满分 8 分)

某工厂生产两种产品 Ⅰ 和 Ⅱ, 出售单价分别为 10 元和 9 元, 设生产 x 单位的产品 Ⅰ 与生产 y 单位的产品 Ⅱ 的总费用是 $400+2x+3y+0.01(3x^2+xy+3y^2)$(元), 问两种产品的产量各为多少时, 取得的利润最大? 其最大利润为多少?

(17)(本题满分 9 分)

若 $f(x)$ 在实数域 $\mathbf{R}$ 上处处有定义,不恒为零,$f'(0)$ 存在,且对任何 x,y,恒有等式 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 成立,求 $f(x)$.

$f(x+y)=f(x)f(y)$

(18)(本题满分 8 分)

求函数 $\int_0^x \sin(t-x)\mathrm{d}t$ 的极值点.

(19)(本题满分 8 分)

设在 $[a,b]$ 上,$f(x)>0$ 且可导,证明存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $\ln\dfrac{f(b)}{f(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}(b-a)$.

$\dfrac{\ln f(b)-\ln f(a)}{b-a}=$

(20)(本题满分 13 分)

若矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times r}$ 的秩为 r,其 r 个列向量为某一齐次线性方程组的一个基础解系,$\boldsymbol{B}$ 为 r 阶非奇异矩阵(可逆矩阵).证明:$\boldsymbol{AB}$ 的 r 个列向量也是该齐次线性方程组的一个基础解系.

(21)(本题满分 13 分)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & a & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$ 的特征值有重根，判断 A 能否相似对角化，说明理由.

(22)(本题满分 13 分)

设 A 和 B 是试验 E 的两个事件，且 $P(A)>0,P(B)>0$，并定义随机变量 X,Y 如下：

$$X=\begin{cases}1, & 若 A 发生,\\ 0, & 若 A 不发生,\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & 若 B 发生,\\ 0, & 若 B 不发生.\end{cases}$$

证明：若 $\rho_{XY}=0$，则 X 和 Y 必定相互独立.

(23)(本题满分 13 分)

设总体 X 服从 $[0,\theta]$ 上的均匀分布，θ 未知 $(\theta>0)$，(X_1,X_2,X_3) 是取自 X 的一个样本.

(Ⅰ) 试证 $\hat{\theta}_1=\frac{4}{3}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i,\hat{\theta}_2=4\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}X_i$ 都是 θ 的无偏估计；

(Ⅱ) 上述两个估计中哪个较有效?

2006年考研经济数学三最后冲刺试题(一)答案及解析

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.)

(1) $\frac{1}{4}(7e^4+1)$

$f(x)=2xe^{x}$

[解析]

由题设$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=e^{x^2}-1$,有 $f(x)=2xe^{x^2}$,且 两边同求导

$$\int_0^1 xf'(2x)\mathrm{d}x \xlongequal{2x=t} \frac{1}{4}\int_0^2 tf'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left[xf(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{4}(7e^4+1).$$

(2) $-\frac{1}{2}$

[解析]

$$\int_0^x \sin(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 \sin u\cdot(-\mathrm{d}u)=\int_0^x \sin u\mathrm{d}u,$$

且当 $x\to 0$ 时,$1-2\cos x\to -1$,$\ln(1+x^2)\sim x^2$,于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin(x-t)\mathrm{d}t}{(1-2\cos x)\cdot\ln(1+x^2)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin u\mathrm{d}u}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

(3) $y_t=C+(t-2)2^t$(其中C为任意常数)

[解析]

对应的齐次差分方程是 $y_{t+1}-y_t=0$,显然有不恒等于零的通解 $\bar{y}_t=C$. 因方程右端的函数 $f(t)=t\cdot 2^t$,可设非齐次差分方程的特解形式为 $y_t^*=(At+B)2^t$,代入原方程得 $A=1,B=-2$,即非齐次差分方程的一个特解为 $y_t^*=(t-2)\cdot 2^t$.

从而,差分方程的通解是 $y_t=C+(t-2)\cdot 2^t$.

(4) $-6\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}$

[解析]

等式$(A^*)^{-1}B=ABA+2A^2$ 两边同时左乘 A^*,得

$$B=A^*ABA+2A^*A^2=|A|(BA+2A)=-3BA-6A,$$

即 $B(E+3A)=-6A.$

从而 $\boldsymbol{B}=-6\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{A})^{-1}=-6\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&0\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}&0\\-\frac{3}{2}&1&0\\\frac{3}{20}&-\frac{3}{20}&\frac{1}{10}\end{pmatrix}=-6\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{20}&\frac{1}{20}&\frac{3}{10}\end{pmatrix}$.

(5) $\underline{\quad 0.71 \quad}$

[解析]

设 X 的分布函数为 $F(x)$，于是

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{1-X\leqslant y\}=P\{X\geqslant 1-y\}=1-P\{X<1-y\}\\&=1-F(1-y).\end{aligned}$$

欲使 $P\{Y\leqslant k\}=0.25$，即有 $F_Y(k)=1-F(1-k)=0.25$，即 $F(1-k)=0.75$.

由于 $F(0.29)=0.75$，所以可取 $1-k=0.29$，从而 $k=0.71$.

(6) $\underline{\quad \frac{a}{3} \quad}$

[解析]

把线段置于数轴上，使它与区间$[0,a]$重合，设 X,Y 分别表示任取两点的坐标，则 X 与 Y 相互独立，且都在$[0,a]$上服从均匀分布，故(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{a^2}, & 0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是两点间距离 $|X-Y|$ 的数学期望为

$$\begin{aligned}E(|X-Y|)&=\int_0^a\int_0^a|x-y|\cdot\frac{1}{a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{a^2}\left[\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x(x-y)\mathrm{d}y+\int_0^a\mathrm{d}x\int_x^a(y-x)\mathrm{d}y\right]=\frac{a}{3}.\end{aligned}$$

二、选择题(本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分.)

(7) 应选(C)

[解析]

由题设有 $f(0)=0$，于是 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，

可见 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线平行于 x 轴，所以应选(C).

(8) 应选(A)

[解析]

取 $x=0$，则有 $f(h)=f(0)+f(h)$，得 $f(0)=0$.

又 $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=1$,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+2hx}{h}=1+2x,$$

故选(A).

(9) 应选(C)

[解析]

积分区域 D 关于 y 轴对称，而被积函数 $|x|$ 关于 x 为偶函数，故

$$\iint_D |x| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{D_1} |x| \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

所以应选(C).

(10) 应选(A)

[解析]

由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域是$(-8,8]$可知，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 8，从而幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-2}$ 的收敛半径也是 8，又因幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-2}$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 两次逐项求导所得，由幂级数的分析性质，幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径是 8，对于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n}$，有收敛域 $-8 < x^3 \leqslant 8$ 即 $-2 < x \leqslant 2$.

(11) 应选(A)

[解析]

对四个选项中的函数分别求左、右极限.(A) 中，

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|\sin x|}{x}\arctan\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}\cdot\arctan\frac{1}{x} = -1\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\sin x|}{x}\arctan\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\arctan\frac{1}{x} = 1\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}\arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

(B)、(C)、(D) 中左、右极限均存在但不相等，从而其极限不存在. 应选(A).

(12) 应选(B)

[解析]

注意 $\boldsymbol{P}_1^2 = \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2^2 = \boldsymbol{P}_2$，所以 $\boldsymbol{P}_1^3\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2^5 = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}$.

可见(B) 为正确答案.

(13) 应选(C)

[解析]

由题设，每组向量均为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解向量，只需找出一组线性无关的向量即可. 对于(A)、(B)、(D) 有

$$1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) + 1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3) + 1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_1) = \boldsymbol{0},$$

$$1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + 1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) + (-1)\cdot(\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) = \boldsymbol{0},$$

$$1\cdot(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) + 1\cdot(3\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) + 1\cdot(-\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3) = \boldsymbol{0},$$

即(A)、(B)、(D) 中三组向量均线性相关，而由定义易证(C) 中向量组线性无关，故正确答案

为(C).

(14) 应选(B)

[解析]

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{s=-t}\int_{+\infty}^{-x}f(-s)\mathrm{d}(-s)=-\int_{+\infty}^{-x}f(s)\mathrm{d}s=\int_{-x}^{+\infty}f(s)\mathrm{d}s,$$

$$F(-x)+F(x)=\int_{-\infty}^{-x}f(s)\mathrm{d}s+\int_{-x}^{+\infty}f(s)\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)\mathrm{d}s=1.$$

可见应选(B).

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分.)

(15)[**证明**]

因为$\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_0^a f(y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D:0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a$.

设 $D_1:0\leqslant x\leqslant a,x\leqslant y\leqslant a;D_2:0\leqslant y\leqslant a,y\leqslant x\leqslant a$,则有

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D_1}f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y+\int_0^a f(y)\mathrm{d}y\int_y^a f(x)\mathrm{d}x\\&=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

即 $2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y=\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

(16)[**解析**]

设 $L(x,y)$ 表示产品 Ⅰ 与产品 Ⅱ 分别生产 x 单位与 y 单位时所得的总利润,因为总利润等于总收入减去总费用,所以

$$\begin{aligned}L(x,y)&=(10x+9y)-[400+2x+3y+0.01(3x^2+xy+3y^2)]\\&=8x+6y-400-0.01(3x^2+xy+3y^2)(x>0,y>0).\end{aligned}$$

解方程组

$$\begin{cases}L_x'=8-0.01(6x+y)=0,\\L_y'=6-0.01(x+6y)=0,\end{cases}$$

得区域 $x>0,y>0$ 内的惟一驻点(120,80).由于问题确有最大值,所以当 $x=120,y=80$ 时,有最大值 $L(120,80)=320$(元).

(17)[**解析**]

在 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 中令 $y=0$,有 $f(x)=f(x)f(0)$,由 x 的任意性知,$f(0)=1$.

因为 $f'(0)$ 存在,故

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}.$$

又 $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x)\cdot f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=f(x)\cdot f'(0),$$

即有$\frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)} = f'(0)\mathrm{d}x$.

两边积分得 $\ln f(x) - \ln C = f'(0)x, f(x) = Ce^{f'(0)x}$.

由于 $f(0) = 1$,得 $C = 1$. 故所求函数为 $f(x) = e^{f'(0)x}$.

(18)[解析]

令 $F(x) = \int_0^x \sin(t-x)\mathrm{d}t$,则

$$F(x) = \int_0^x \sin(t-x)\mathrm{d}t = \cos x\int_0^x \sin t\mathrm{d}t - \sin x\int_0^x \cos t\mathrm{d}t$$

$$F'(x) = -\sin x\int_0^x \sin t\mathrm{d}t + \cos x\sin x - \sin x\cos x - \cos x\int_0^x \cos t\mathrm{d}t$$

$$= -\sin x(-\cos t)\big|_0^x - \cos x(\sin t)\big|_0^x = -\sin x$$

令 $F'(x) = 0$,得驻点 $x_n = n\pi, F''(x) = -\cos x, F''(n\pi) = -\cos(n\pi) = (-1)^{n+1}$.

从而 $x = (2n+1)\pi$ 为 $F(x)$ 的极小值点,$x = 2n\pi$ 为 $F(x)$ 的极大值点.

(19)[证明]

设 $F(x) = \ln f(x)$,由 $f(x) > 0$ 知 $F(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,由拉格朗日中值定理知存在 $\xi \in (a,b)$,使

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) \text{ 即 } \ln f(b) - \ln f(a) = \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(b-a),$$

亦即 $\ln\frac{f(b)}{f(a)} = \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(b-a)$.

(20)[证明]

将 $\boldsymbol{A}$ 的列向量记为 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$,$\boldsymbol{AB}$ 的列向量记为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$,则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r) = (\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r)\boldsymbol{B}. \qquad (*)$$

可见,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 能由 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ 线性表出,若 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ 为某一齐次线性方程组的解,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 也是该齐次线性方程组的解.

又因 $\boldsymbol{B}$ 可逆,故由(*)式可得

$$(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{B}^{-1}.$$

可见 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出,因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ 等价.

而 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ 为某一齐次线性方程组的基础解系,线性无关,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 也线性无关,且每个解向量可由它线性表示,从而为该齐次线性方程组的一个基础解系.

(21)[解析]

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -a & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2 - 8\lambda + 10 + a).$$

若 $\lambda = 2$ 是重根,则 $\lambda^2 - 8\lambda + 10 + a$ 中含有 $\lambda - 2$ 的因式,于是 $2^2 - 8\times 2 + 10 + a = 0$,得 $a = 2$,此时 $\lambda^2 - 8\lambda + 12 = (\lambda-2)(\lambda-6)$,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值是 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$.

因为 $\mathrm{r}(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = \mathrm{r}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 1$,

可见 $a=2$ 时，$\lambda_1=\lambda_2=2$ 有两个线性无关的特征向量，因此 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化.

若 $\lambda=2$ 不是重根，则 $\lambda^2-8\lambda+10+a=0$ 有重根，从而 $8^2-4(10+a)=0$，得 $a=6$，$\lambda=4$(二重根).

由于 $\mathrm{r}(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\begin{pmatrix}3&-6&3\\1&0&3\\-1&2&-1\end{pmatrix}=2\neq1$，

故 $a=6$ 时，$\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

(22)[证明]

只需证明对于 (X,Y) 的一切可能值 (x_i,y_j)，$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$，$(i,j=1,2)$.

X,Y 的分布律分别为

X	0	1
P_i	$1-P(A)$	$P(A)$

Y	0	1
P_j	$1-P(B)$	$P(B)$

XY 的分布律为

XY	0	1
P_k	$1-P(AB)$	$P(AB)$

于是有 $E(X)=P(A)$，$E(Y)=P(B)$，$E(XY)=P(AB)$.

由 $\rho_{XY}=0$ 推出 $E(XY)=E(X)E(Y)$，即 $P(AB)=P(A)P(B)$，故 A,B 相互独立，即 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立. 从而有

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=P\{X=0\}P\{Y=0\}.$$

类似地可推出

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\},$$
$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\},$$
$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\},$$

因此 X 与 Y 相互独立.

(23)[证明]

(Ⅰ) 设 $F(x)$ 为 X 的分布函数，则

$$F(x)=\begin{cases}1, & x>\theta,\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0\leqslant x\leqslant\theta,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

令 $Y=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant3}X_i$，$Z=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant3}X_i$.

则 Y 的分布函数与分布密度分别为

$$F_Y(x)=[F(x)]^3,\varphi_Y(x,\theta)=\begin{cases}3(\dfrac{x}{\theta})^2\dfrac{1}{\theta}, & 0\leqslant x<\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

Z 的分布函数与分布密度分别为

$F_Z(x) = 1 - [1 - F(x)]^3$

$$\varphi_Z(x,\theta) = \begin{cases} 3(1 - \dfrac{x}{\theta})^2 \dfrac{1}{\theta}, & 0 \leqslant x < \theta, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以 $E(Y) = \dfrac{3}{\theta^3}\int_0^\theta x^3 \mathrm{d}x = \dfrac{3}{4}\theta, E(\dfrac{4}{3}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3} X_i) = \theta,$

$$E(Z) = \frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta x(\theta - x)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\theta, E(4\min_{1\leqslant i\leqslant 3} X_i) = \theta.$$

所以 $\dfrac{4}{3}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3} X_i$ 与 $4\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3} X_i$ 都是 θ 的无偏估计.

(Ⅱ)因为 $D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \dfrac{3}{\theta}\int_0^\theta x^2(\dfrac{x}{\theta})^2 \mathrm{d}x - (\dfrac{3}{4}\theta)^2 = \dfrac{3}{\theta^3}\int_0^\theta x^4 \mathrm{d}x - \dfrac{9}{16}\theta^2$

$$= \frac{3}{5}\theta^2 - \frac{9}{16}\theta^2 = \frac{3}{80}\theta^2,$$

所以 $D(\dfrac{4}{3}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3} X_i) = \dfrac{16}{9}D(Y) = \dfrac{1}{15}\theta^2,$

$$D(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = \frac{3}{\theta}\int_0^\theta x^2(1 - \frac{x}{\theta})^2 \mathrm{d}x - (\frac{1}{4}\theta)^2$$

$$= \frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta x^2(\theta - x)^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{16}\theta^2 = \frac{1}{10}\theta^2 - \frac{1}{16}\theta^2 = \frac{3}{80}\theta^2.$$

所以 $D(4\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3} X_i) = 16D(Z) = 16 \cdot \dfrac{3}{80}\theta^2 = \dfrac{3}{5}\theta^2.$

从而 $D(\dfrac{4}{3}Y) < D(4Z)$,即 $\dfrac{4}{3}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3} X_i$ 比 $4\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3} X_i$ 更有效.