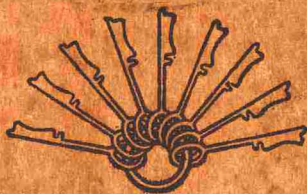


初中學生文庫

代數學問題解法指導

編者 匡文濤



中華書局編印

民國二十四年六月發行  
民國二十五年十月再版

初中學生文庫 代數學問題解法指導（全一册）

◎ 實價國幣三角二分

（郵運匯費另加）



編者 匡文濤

發行者 中華書局有限公司

代表人 路錫三

印刷者 上海中華書局印刷所

總發行處 上海福州路中華書局

分發行處 各埠中華書局

# 余介石先生編

## 四位算學用表

(附初等算學基本公式及法則)

三角二分

本書羅列初等算學中最常用的「四位算表」共十種，以供中等學生研究之用。各表精密程度，恰合一般初中學生之需要。初等算學公式及法則的排列，重理解以明系統，山比較以助記憶；用法說明，則簡賅而扼要，閱之可以一目了然，極易領悟運用。本書篇幅雖不多，而對於初等算學基本公式及法則，已大致略備，使學者閱後，有一明晰概括的觀念。凡青年學子溫習課業，備此參考，或準備升學，藉資研究，均有極大的裨益。

## 五位算學用表

(附中等算學基本公式)

四角八分

本書羅列五位對數表、三角函數表、三角函數對數表等，並加入切於實用之附表數種，以供中等學生之用。各表用法，均有簡要之說明，極便運用。全書將重要之公式，組成理解的系統，裨便於記憶，篇幅力求簡明，以節省讀者之腦力。舉凡代數（包括高等代數）、幾何（平面及立體）、三角、解析幾何之重要公式及定義，已概括無遺。高中學生平時複習，會考及升學準備，用以參考，解決疑難，均有極大之裨益。

### 中華書局發行

新課程標準適用  
教育部審定  
初中代數

余介石 胡術五 何商友編 全二冊

普及本各四角  
道林紙本五角六分

本書遵照新課程標準編輯，和本局出版的新課程標準適用初中算術程度相銜接；一面又與本局出版的新課程標準適用初中幾何互相聯絡。全書兩冊，每學年用一冊，極合初中第二、三兩學年之用。教材依極自然的次序，對於代數的基本法則，都先由特例和算術問題入手，歸納推出通則，然後再舉例說明，能引起學生研習之興趣，且可培養其自動作業的能力。負數和虛數，在初學最感困難，本書用極淺顯詳明的文字，反覆闡述，不厭求詳，以求易教易學。對數亦為初學者常感困難的地方，本書為使讀者易於理解起見，先就指數式入手，再徐徐導入對數式，并由此引出運算法則，最後始講算理，以減少抽象生澀之弊。書中習題，排列勻稱，使學生每次均有練習的機會，而助長其對於算理的瞭解。

另編習題解答 汪夢九編 二冊 ①一角六分 ②二角四分

中華書局發行

中學算學研究會叢書

# 幾何作圖題解法及其原理

Julius Petersen 著 余介石 譯

一冊 五角半

本書原本為丹麥佩忒森 (Julius Petersen) 原著，已有德、法、英、意、日五國譯本；本譯本則根據英文譯本重譯。共分三章：第一章論軌跡；第二、三兩章，論變形法；附錄三篇，論圓弧之相交圓組及規矩作圖之可能性等問題。舉凡幾何作圖之基本原理及法則，已盡於是冊。

## 算學通論

余介石 編著 一冊 八角

全書分三篇：第一篇敘述中等算學觀念的發達史；第二篇以幾何為主，說明算學的形式與結構；第三篇由代數講到解析幾何及微積分，以明算學抽象性與普通之方法。材料多取自中等算學教材，用極淺顯之文字，釋至抽象的算理，甚為詳明。習畢此書，關於算理全部，可得一概括之觀念及性質，而對於算學研究之方針，教學之方法，亦有重要之指示。

### 中華書局出版

# 本文庫算學書目

中華書局編印

算術問題解法指導	匡文濤	一冊	二角八分
算術問題解法研究	高季可	一冊	七角二分
算術捷徑	郭遠洲	一冊	六角
珠算捷徑	徐天游	一冊	二角
代數捷徑	華襄治	一冊	四角
代數學問題解法指導	匡文濤	一冊	三角二分
代數學問題解法研究	張鵬飛	一冊	三角五分
平面幾何學問題解法指導	匡文濤	一冊	三角二分
幾何學問題解法研究	郁樹銳	一冊	三角二分
平面三角問題解法指導	匡文濤	一冊	一角五分

# 代數學問題解法指導

## 目 次

---

	頁
1. 多項式乘法.....	1—5
摘要一	
問題 1—4	
2. 因數分解.....	6—13
摘要二	
問題 5—16	
3. 多項式之最大公約及最小公倍.....	14—31
摘要三	
問題 17—42	
4. 二元聯立一次方程式.....	32—52
摘要四	
問題 43—74	
5. 分數方程式之解法.....	53—75
摘要五	
問題 75—105	
6. 聯立二次方程式之解法.....	76—111

目 次

---

摘要六

問題 106—149

7. 冪及根.....112—122

摘要七

問題 150—165

8. 比及比例.....123—131

摘要八

問題 166—178

9. 級數.....132—149

摘要九

問題 179—203

10. 對數複利及年金.....150—155

摘要十

問題 204—210



# 代數學問題解法指導

## 摘 要 一

### 多項式乘法之公式

$$m(a \pm b) = ma \pm mb.$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

$$(x \pm a)(x \pm b) = x^2 \pm (a + b)x + ab.$$

$$(a \pm b)(c \pm d) = ac \pm ad \pm bc + bd.$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3.$$

$$(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4.$$

### 剩餘定理及未定係數之法

剩餘定理  $x$  之有理整式，得以  $x-t$  除之，則其剩餘等於以  $t$  代整式之  $x$  之式。

例如整式  $=ax^n + bx^{n-1} + \dots + px + q$  以  $x-t$  除之，則其剩餘

$$=at^n + b.t^{n-1} + \dots + pt + q.$$

---

剩餘定理系  $x$  之有理整式,其  $x$  以  $a$  代之等於零,則此整式以  $x-a$  除之適盡.

例  $3x^3 - 5x^2 + 2$ , 令  $x=1$  則  $3x^3 - 5x^2 + 2 = 0$ , 故  $x-1$  適除盡原式.

未定係數之法 有  $x$  之有理整式二個,不拘  $x$  之值如何而常相等,則此二式同次項之係數,皆相等,其不含  $x$  之項亦相等,用此定理決定未定係數,是云未定係數法.

## 多 項 式 乘 法

1.  $x=b-c, y=c-a, z=a-b$ , 則

$x^3+y^3+z^3-3xyz$  之 值 若 干, 試 計 算 之.

【解】  $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ ,

以  $x, y, z$  之 同 數  $b-c, c-a, a-b$  代 之, 則

$$x+y+z=(b-c)+(c-a)+(a-b)=0,$$

從 而 右 邊 為 0,

$$\therefore x^3+y^3+z^3-3xyz=0.$$

2. 設  $x^2+px+q$  以  $x-1$  約 之 餘 6, 以  $x+1$  約 之 餘 2, 求  $p, q$  之 值.

【解】 由 剩 餘 之 定 理 知  $x-1$  約  $x^2+px+q$  之 剩 餘 為  $1+p+q$ .

依 題 意 得

$$1+p+q=6 \dots\dots\dots(1)$$

同 樣 得  $x+1$  約  $x^2+px+q$  之 剩 餘 為

$$1-p+q=2 \dots\dots\dots(2)$$

解 (1), (2) 聯 立 方 程 式, 得

$$p=2$$

$$q=3.$$

3. 有  $ax^2+bx+c$  以  $2ax+b$  約 之 適 盡, 則 此 二 次 式 等 於 某 之 一 次 式 之 平 方, 試 證 之.

【解】 因  $ax^2+bx+c$  以  $2ax+b$  約 之 適 盡.

故 令  $x = -\frac{b}{2a}$  則原式爲 0,

$$\text{即 } a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0.$$

簡之爲  $b^2 = 4ac$ ,

$$\therefore b = \pm 2\sqrt{ac}.$$

然  $ax^2 + bx + c = ax^2 \pm 2\sqrt{ac}x + c$

$$= (\sqrt{a}x \pm \sqrt{c})^2.$$

故如題言。

【應用】有  $1 - (3+x)^n$  設指數  $n$  爲整數五, 則得以  $2+x$  整除, 試證之。

4. 展開  $(x^3 - px^2 + qx - v)(px^3 + x^2 - 5x - 7)$ , 其  $x^5, x^3, x$  之係數爲零, 則  $p, q, v$  之值若干, 試決定之。

【解】將原式實行乘法, 得

$$\begin{aligned} & px^6 + (-p^2 + 1)x^5 + (pq - p - 5)x^4 \\ & + (5p + q - pv - 7)x^3 + (7p - 5q - v)x^2 \\ & + (-7q + 5v)x + 7v. \end{aligned}$$

依題意  $-p^2 + 1 = 0 \dots\dots\dots(1)$

$$5p + q - pv - 7 = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$-7q + 5v = 0 \dots\dots\dots(3)$$

從 (1) 得  $p = \pm 1$

以  $p = 1$  代入 (2) 得

$$q - v = 2 \dots\dots\dots(4)$$

---

由 (3), (4) 得  $q = -7, v = -5$

又 以  $p = -1$  代入 (2) 得

$$q + v = 12 \dots\dots\dots (5)$$

由 (3), (5) 得  $q = 5, v = 7$ .

$\therefore p = \pm 1, q = \mp 5, \text{ 或 } v = \mp 7.$

## 摘 要 二

### 因 數 分 解 之 公 式

$$ax + bx + cx = (a + b + c)x$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$x^2 \pm (a + b)x + ab = (x \pm a)(x \pm b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)$$

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$ax^2 + bx + c = a \left\{ x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

$$\times \left\{ x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$$

其  $n$  為偶數則

$$x^n - y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots - y^{n-1})$$

其  $n$  為奇數則

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$$

## 因數分解

5. 設  $A + B(x+2) + C(x+2)^2 + D(x+2)^3$  等於  $1+x^3$ , 則  $A, B, C, D$  之值各幾何?

【解】依題意得

$$A + B(x+2) + C(x+2)^2 + D(x+2)^3 = 1 + x^3.$$

將上式右邊之括弧解之, 列為  $x$  之遞昇方程式, 則

$$(A+2B+4C+8D) + (B+4C+12D)x + (C+6D)x^2 + Dx^3 = 1 + x^3.$$

$$\text{依題意得} \begin{cases} A+2B+4C+8D=1 \\ B+4C+12D=0 \\ C+6D=0 \\ D=1. \end{cases}$$

依聯立方程式而解之, 則得

$$A = -7,$$

$$B = 12,$$

$$C = -6,$$

$$D = 1.$$

6. (i) 試分解  $x^2 - 25x - 116$  之因數,  
(ii) 試分解  $x^2 - 6x - 91$  之因數.

(i) 【解】

$$\because -25 = -29 + 4$$

$$-116 = -29 \times 4.$$

$$\therefore x^2 - 25x - 116 = (x - 29)(x + 4).$$

(ii) 【解】

$$\therefore -6 = 7 - 13$$

$$-91 = -13 \times 7.$$

$$\therefore x^2 - 6x - 91 = (x + 7)(x - 13).$$

7. (i) 試分解  $(x-1)(x-2)^2 - (x-1)^3$  之因數,  
 (ii) 試分解  $x^4 - 2a^2x^2 - 2b^2x^2 + a^4 + b^4 - 2a^2b^2$   
 之因數.

(i) 【解】

$$\begin{aligned} (x-1)(x-2)^2 - (x-1)^3 &= (x-1) \{ (x-2)^2 - (x-1)^2 \} \\ &= (x-1) \{ (x-2) + (x-1) \} \{ (x-2) - (x-1) \} \\ &= (x-1)(2x-3)(-1) \\ &= -(x-1)(2x-3). \end{aligned}$$

(ii) 【解】

$$\begin{aligned} x^4 - 2a^2x^2 - 2b^2x^2 + a^4 + b^4 - 2a^2b^2 &= x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \\ &= \{ x^2 - (a^2 + b^2) \}^2 - (2ab)^2 \\ &= \{ x^2 - (a^2 + b^2) + 2ab \} \{ x^2 - (a^2 + b^2) - 2ab \} \\ &= \{ x^2 - (a-b)^2 \} \{ x^2 - (a+b)^2 \} \\ &= (x-a+b)(x+a-b)(x+a+b)(x-a-b). \end{aligned}$$

8. 試分解次二式之因子:



$$(1) \quad x^3 p^2 - 8y^3 p^2 - 4x^3 q^2 + 32y^3 q^2,$$

$$(2) \quad x^4 + x^2 y^2 + y^4.$$

(1) 【解】

$$\begin{aligned} \text{原 式} &= p^2(x^3 - 8y^3) - 4q^2(x^3 - 8y^3) \\ &= (p^2 - 4q^2)(x^3 - 8y^3) \\ &= (p + 2q)(p - 2q)(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2). \end{aligned}$$

(2) 【解】

由 公 式 得

$$\text{原 式} = (x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2).$$

又 法:

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 y^2 + y^4 &= x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 - x^2 y^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 - x^2 y^2 \\ &= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy) \\ &= (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2). \end{aligned}$$

9. 試 分 解 下 二 式 之 因 數:

$$(i) \quad x^4 + 36y^4,$$

$$(ii) \quad x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2.$$

(i) 【解】

$$\begin{aligned} x^4 + 36y^4 &= x^4 + 12x^2 y^2 + 36y^4 - 12x^2 y^2 \\ &= (x^2 + 6y^2)^2 - 12x^2 y^2 \\ &= (x^2 + 6y^2 + 2\sqrt{3}xy)(x^2 + 6y^2 - 2\sqrt{3}xy) \\ &= (x^2 + 2\sqrt{3}xy + 6y^2)(x^2 - 2\sqrt{3}xy + 6y^2). \end{aligned}$$