初中學生文庫

代數學問題解法指導

編者　匡文濤

中華書局編印

民國二十四年六月發行
民國二十五年十月再版

初中學生文庫 代數學問題解法指導（全一冊）

◎

實價國幣三角二分
（郵運匯費另加）

編者 匡文濤
發行者 中華書局有限公司 代表人 路錫三
印刷者 上海澳門路 中華書局印刷所
總發行處 上海福州路 中華書局
分發行處 各埠中華書局

（八七二〇）

余介石先生編

四位算學用表（附初等算學基本公式及法則）

三角二分

本書羅列初等算學中最常用的「四位算表」共十種，以供中等學生研究之用。各表精密程度，恰合一般初中學生之需要。初等算學公式及法則的排列，重理解以明系統，由比較以助記憶；用法說明，則簡賅而扼要，閱之可以一目了然，極易領悟運用。本書篇幅雖不多，而對於初等算學基本公式及法則，已大致略備，使學者閱後，有一明晰概括的觀念。凡青年學子溫習課業，備此參考，或準備升學，藉資研究，均有極大的裨益。

五位算學用表（附中等算學基本公式）

四角八分

本書羅列五位對數表、三角函數表、三角函數對數表等，並加入切於實用之附表數種，以供中等學生之用。各表用法，均有簡要之說明，極便運用。全書將重要之公式，組成理解的系統，俾便於記憶，篇幅力求簡明，以節省讀者之腦力。舉凡代數（包括高等代數）、幾何（平面及立體）、三角、解析幾何之重要公式及定義，已概括無遺。高中學生平時複習，會考及升學準備，用以參考，解決疑難，均有極大之裨益。

中華書局發行

中1286(全)　25,7.

中1369(全)25,8.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongboo

本文庫算學書目

中華書局編印

算術問題解法指導	匡文濤	一冊	二角八分
算術問題解法研究	高季可	一冊	七角二分
算術捷徑	郭逵洲	一冊	六角
珠算捷徑	徐天游	一冊	二角
代數捷徑	華襄治	一冊	四角
代數學問題解法指導	匡文濤	一冊	三角二分
代數學問題解法研究	張鵬飛	一冊	三角五分
平面幾何學問題解法指導	匡文濤	一冊	三角二分
幾何學問題解法研究	郁樹銚	一冊	三角二分
平面三角問題解法指導	匡文濤	一冊	一角五分

叢1012-25,10.

代數學問題解法指導

目　次

代數學問題解法指導

摘　要　一

多項式乘法之公式

$m(a\pm b)=ma\pm mb.$

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2.$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$

$(x\pm a)(x\pm b)=x^2\pm(a+b)x+ab.$

$(a\pm b)(c\pm d)=ac\pm ad\pm bc+bd.$

$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3.$

$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4.$

剩餘定理及未定係數之法

剩餘定理　x 之有理整式,得以 $x-t$ 除之,則其剩餘等於以 t 代整式之 x 之式.

例如整式 $=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+px+q$ 以 $x-t$ 除之,則其剩餘

$$=at^n+bt^{n-1}+\cdots+pt+q.$$

剩餘定理系　x之有理整式,其x以a代之等於零,則此整式以$x-a$除之適盡.

例　$3x^3-5x^2+2$,令$x=1$則$3x^3-5x^2+2=0$,故$x-1$適除盡原式.

未定係數之法　有x之有理整式二個,不拘x之值如何而常相等,則此二式同次項之係數,皆相等,其不含x之項亦相等,用此定理決定未定係數,是云未定係數法.

多項式乘法

1. $x=b-c, y=c-a, z=a-b$,則

$x^3+y^3+z^3-3xyz$之值若干,試計算之.

【解】 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$,

以 x, y, z 之同數 $b-c$, $c-a$, $a-b$ 代之,則

$x+y+z=(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$,

從而右邊為 0,

$\therefore \quad x^3+y^3+z^3-3xyz=0.$

2. 設 x^2+px+q 以 $x-1$ 約之餘 6,以 $x+1$ 約之餘 2,求 p, q 之值.

【解】 由剩餘之定理知 $x-1$ 約 x^2+px+q 之剩餘為 $1+p+q$.

依題意得

$$1+p+q=6 \cdots\cdots(1)$$

同樣得 $x+1$ 約 x^2+px+q 之剩餘為

$$1-p+q=2 \cdots\cdots(2)$$

解(1),(2)聯立方程式,得

$$p=2$$

$$q=3.$$

3. 有 ax^2+bx+c 以 $2ax+b$ 約之適盡,則此二次式等於某之一次式之平方,試證之.

【解】 因 ax^2+bx+c 以 $2ax+b$ 約之適盡.

故　　令 $x=-\frac{b}{2a}$ 則原式爲 o,

即　　$a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=o.$

簡之爲 $b^2=4ac$,

$\therefore\ b=\pm 2\sqrt{ac}.$

然　　$ax^2+bx+c=ax^2\pm 2\sqrt{ac}x+c$

$=(\sqrt{a}x\pm\sqrt{c})^2.$

故如題言.

【應用】有 $1-(3+x)^n$ 設指數 n 爲整數五,則得以 $2+x$ 整除,試證之.

4.　展開 $(x^3-px^2+qx-v)(px^3+x^2-5x-7)$,其 x^5,x^3,x 之係數爲零,則 p,q,v 之値若干,試決定之.

【解】將原式實行乘法,得

$$px^6+(-p^2+1)x^5+(pq-p-5)x^4$$
$$+(5p+q-pv-7)x^3+(7p-5q-v)x^2$$
$$+(-7q+5v)x+7v.$$

依題意　　$-p^2+1=0$……………………(1)

$5p+q-pv-7=0$……………………(2)

$-7q+5v=0$……………………(3)

從 (1) 得　　$p=\pm 1$

以 $p=1$ 代入 (2) 得

$q-v=2$……………………(4)

由 (3),(4) 得 $q=-7,\ v=-5$

又以 $p=-1$ 代入 (2) 得

$$q+v=12 \qquad (5)$$

由 (3), (5) 得 $q=5, v=7$.

$\therefore\quad p=\pm 1,\ q=\mp 5$, 或 $v=\mp 7$.

摘 要 二

因數分解之公式

$$ax+bx+cx=(a+b+c)x$$

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$x^2\pm(a+b)x+ab=(x\pm a)(x\pm b)$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

$$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)$$
$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$ax^2+bx+c=a\left\{x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$
$$\times\left\{x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots\cdots+y^{n-1})$$

其 n 爲偶數,則

$$x^n-y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots\cdots-y^{n-1})$$

其 n 爲奇數則

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots\cdots+y^{n-1})$$

因數分解

5. 設 $A+B(x+2)+C(x+2)^2+D(x+2)^3$ 等於 $1+x^3$，則 A,B,C,D 之值各幾何?

【解】依題意得

$$A+B(x+2)+C(x+2)^2+D(x+2)^3=1+x^3.$$

將上式右邊之括弧解之，列為 x 之遞昇方程式，則

$$(A+2B+4C+8D)+(B+4C+12D)x$$
$$+(C+6D)x^2+Dx^3=1+x^3.$$

依題意得 $$\begin{cases} A+2B+4C+8D=1 \\ B+4C+12D=0 \\ C+6D=0 \\ D=1. \end{cases}$$

依聯立方程式而解之，則得

$$A=-7,$$
$$B=12,$$
$$C=-6,$$
$$D=1.$$

6. (i) 試分解 $x^2-25x-116$ 之因數，
(ii) 試分解 $x^2-6x-91$ 之因數.

(i) 【解】

$\because \quad -25=-29+4$

$-116=-29\times 4.$

$\therefore\quad x^2-25x-116=(x-29)(x+4).$

(ii)【解】

$\because\quad -6=7-13$

$-91=-13\times 7.$

$\therefore\quad x^2-6x-91=(x+7)(x-13).$

7.　(i) 試分解 $(x-1)(x-2)^2-(x-1)^3$ 之因數,

(ii) 試分解 $x^4-2a^2x^2-2b^2x^2+a^4+b^4-2a^2b^2$ 之因數.

(i)【解】

$(x-1)(x-2)^2-(x-1)^3=(x-1)\{(x-2)^2-(x-1)^2\}$

$=(x-)1\{(x-2)+\ x-1)\}\{(x-2)-(x-1)\}$

$=(x-1)(2x-3)(-1)$

$=-(x-1)(2x-3).$

(ii)【解】

$x^4-2a^2x^2-2b^2x^2+a^4+b^4-2a^2b^2$

$=x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$

$=\{x^2-(a^2+b^2)\}^2-(2ab)^2$

$=\{x^2-(a^2+b^2)+2ab\}\{x^2-(a^2+b^2)-2ab\}$

$=\{x^2-(a-b)^2\}\{x^2-(a+b)^2\}$

$=(x-a+b)(x+a-b)(x+a+b)(x-a-b).$

8.　試分解次二式之因子:

(1) $x^3p^2-8y^3p^2-4x^3q^2+32y^3q^2$,

(2) $x^4+x^2y^2+y^4$.

(1) 【解】

原式 $=p^2(x^3-8y^3)-4q^2(x^3-8y^3)$

$=(p^2-4q^2)(x^3-8y^3)$

$=(p+2q)(p-2q)(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$.

(2) 【解】

由公式得

原式 $=(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$.

又法:

$x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$

$=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$

$=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$

$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

9. 試分解下二式之因數:

(i) x^4+36y^4,

(ii) $x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a^2-b^2)^2$.

(i) 【解】

$x^4+36y^4=x^4+12x^2y^2+36y^4-12x^2y^2$

$=(x^2+6y^2)^2-12x^2y^2$

$=(x^2+6y^2+2\sqrt{3}xy)(x^2+6y^2-2\sqrt{3}xy)$

$=(x^2+2\sqrt{3}xy+6y^2)(x^2-2\sqrt{3}xy+6y^2)$.