李文清科学论文集

李文清 著

NANQIANG CONGSHU

南强丛书

XIAMEN DAXUE CHUBANSHE

南强丛书

李文清科学论文集

李文清 著

厦门大学出版社

一九九〇年·厦门

"南强"丛书

李文清科学论文集

*

厦门大学出版社出社发行

福建省新华书店经销

三明日报社印刷厂照排

福建省第二新华印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/16　12.75 印张　346 千字

1990 年 10 月第 1 版　1990 年 10 月第 1 次印刷

印数　1—1000 册

ISBN　7—5615—0245—1

O・13　定价:7.45 元

“南强丛书”序

厦门大学是爱国华侨领袖陈嘉庚先生于1921年4月6日创办的，到明年将有70年的历史。为了庆贺这个光辉节日，在海内外校友的倡导和支持下，我们编辑出版了这套“南强丛书”。

厦门大学创办伊始，就明确宣告：“本大学之目的，在博集东西各国之学术及其精神，以研究一切现象之底蕴与功用，同时并阐发中国固有学艺之美质，使之融合贯通，成为一种完善之文化。”厦大校歌则反复咏唱：“吁嗟乎南方之强”。几十年来，厦门大学师生弘扬“南强”精神，为实现自己的办学宗旨和追求自己的理想目标，做出了可贵的努力和贡献，培养造就了一批卓有成就的学者专家，编写出版了许多引人注目的优秀教材和学术专著，丰富了我国文化宝库。特别是新的社会主义历史时期，厦门大学满园春色，欣欣向荣，人才辈出，成果丰盈。以历史的眼光，选萃集成我校学者专家的优秀之作，出版一套以教材、专著为主的“南强丛书”，这是具有深远意义的文化积累工作，也是对建校70周年大庆的最好纪念。

“南强丛书”的出版，是我校发展史上的一件盛事，引起了广泛的关注和强烈的反响。首次征稿，各系、所踊跃推荐，参评的优秀书稿达50多部。经“南强丛书”编审委员会认真评选，首批入选的书稿有15部。这些著作涉及自然科学和社会科学各个主要学科，都是作者多年潜心研究的重要成果，其中既有久负盛名的老一辈学者专家花了心血的力作，又有后起之秀富有开拓性的佳作，还有已故著名教授的遗作。虽然数量有限，门类不全，但在某种程度上仍可以体现我校的教学、科研特色和学术水平。

出版“南强丛书”，是一项长期性的重大工程，需要各方面的热情支持和密切合作。今后，我们将根据本丛书的出版宗旨和具体条件，成熟一批，出版一批，以求更全面更系统地展示我校教学、科研的丰硕成果。

由于时间匆促和我们的水平有限，评选工作和编辑出版工作遗漏、错误在所难免，衷心希望校友和作者、读者给予指正。

最后，我们谨向资助出版本丛书的厦门大学旅港校友会前理事长黄克立先生致以衷心感谢！

厦门大学副校长
“南强丛书”编审委员会主任 郑学檬

1990年9月15日

序

《李文清科学论文集》现在与广大读者见面了。

李文清教授是一位满怀爱国主义的学者，早年留学日本，新中国成立后毅然回国，应聘到厦门大学任教。四十年来，他辛勤耕耘，教书育人，培养英才，为祖国的教育事业呕心沥血，奉献毕业精力。

李文清教授重视科学研究，善于结合教学开展研究工作，一直致力于泛函分析、控制论等学科的建设，在函数论及其在系统科学的应用研究方面多有建树。早在五十年代，他就从事函数论、泛函分析及逼近论方面的研究，获得成果，享有声誉。七十年代，他又适应时代的需要，开展对控制论的研究，并创办了控制理论专业，参加组建计算机与系统科学系。在他的推动下，厦门大学控制理论研究有较大的进展。

本文集的出版，对函数论、控制论及其应用的研究将产生一定的影响。

辜联昆

1989 年 2 月

引　言

自 1950 年到 1988 年在厦大任教以来，我结合教学工作开展了函数理论及其在系统科学的应用研究，取得了一些成果。其内容大致可以分为四个主要方面：(一)函数的零点分布；(二)泛函分析；(三)逼近论；(四)控制系统的性态分析。

三十年代末，国内大学的数学系多以函数论为主要教学内容。我曾在燕京及北京大学当学生时受到徐献瑜教授、刘书琴教授的影响而对函数作了学习，它使我在五十年代初期对解析函数值分布作了一些工作。四十年代，我就读日本大阪大学，当研究生时受到角谷静夫的影响，学习泛函分析，特别是对维纳的无限维空间积分作了认真的学习，得到一些结果，即组成本论文集的第二部分。1956 年参加在北京召开的全国数学会时，听了陈建功教授关于函数构造的综合报告，使我受到启发。又因计算机的出现，所以使我又作了一些逼近论方面的工作，这就构成本论文集的第三部分。最后，由于第二次世界大战以来兴起的信息论、系统论、控制论，为了赶上时代的步伐，我与控制论教研室的同志共同对控制系统的性态分析作了一些工作，并得到国家科学基金委员会、校科研处的资助，其研究成果就构成了本论文集的第四部分。此外，对数论及对策论也作了一点工作，作为论文的补篇出现。

实践表明，近代科学成就都不是个人的。我得到一点科研成果，也是在厦大数学系、计算机与系统科学系控制论教研室同事的帮助下，并得到校科研处的支持而完成的。在此，向他们表示感谢。

李文清

1988 年 12 月

目　录

四、控制理论

五、数论及对策论

附：

一、函数的零点分布

多项式根的分布问题*

P. Erdos 和 P. Turán 在 Annals of Mathematics 的 51 卷第一部(1950 年正月号)中曾研究此问题. 其文章主旨在于说明多项式根的分布在任一以原点为顶的不同的角内是均匀分配的,其条件为'在中间'的系数不比两端的系数过大。下面是大家熟知的多项式:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n. \tag{1}$$

在$|a_0| = |a_1| = \cdots = |a_n|$,这种分配是理想的情形。今作者从另一方面去讨论此问题。我们在 Titchmarsh 的'函数论'里,能知 n(r)这函数是表示 f(z)在$|z| \leqslant r$ 域内的 f(z)根的个数。现在所要证明的是在 Erdos—Turán 的条件下,几乎全部的根都落在一狭仄的环状开域中。在证明中,n(r)函数的是一主要工具。上列的话亦可用下列式表示:环域$a < |z| < b$ 当 $b - a$ 的差小时,则环的面积亦随之变小。所谓几乎全部的根的意义是:假定(1)式的根为

$$z_1 = r_1e^{i\theta_1},\ z_2 = r_2e^{i\theta_2}, \cdots, z_n = r_ne^{i\theta_n}, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big[\sum_{a<r_i<b} 1\Big] = 1. \tag{3}$$

兹将所要证的定理写在下面。

定理(一) 若多项式

$$f(z) = a_0 + a_1z + \cdots\cdots + a_nz^n \tag{4}$$

的根是

$$z_i = r_ie^{i\theta_i},\ i = 1, 2, \cdots\cdots n, \tag{5}$$

且(4)之系数满足下列条件

$$|a_n| = |a_0| = c, c \geqslant |a_i|, i = 2, \cdots\cdots n-1. \tag{6}$$

则在 m 为固定数值(m<<n)时,

$$\Big(n - \sum_{\frac{m}{m+1}<r_i<\frac{m+1}{m}} 1\Big) = o(n) \text{ 或 } = O(\log n). \tag{7}$$

---

* 1950 年 9 月 6 日收到

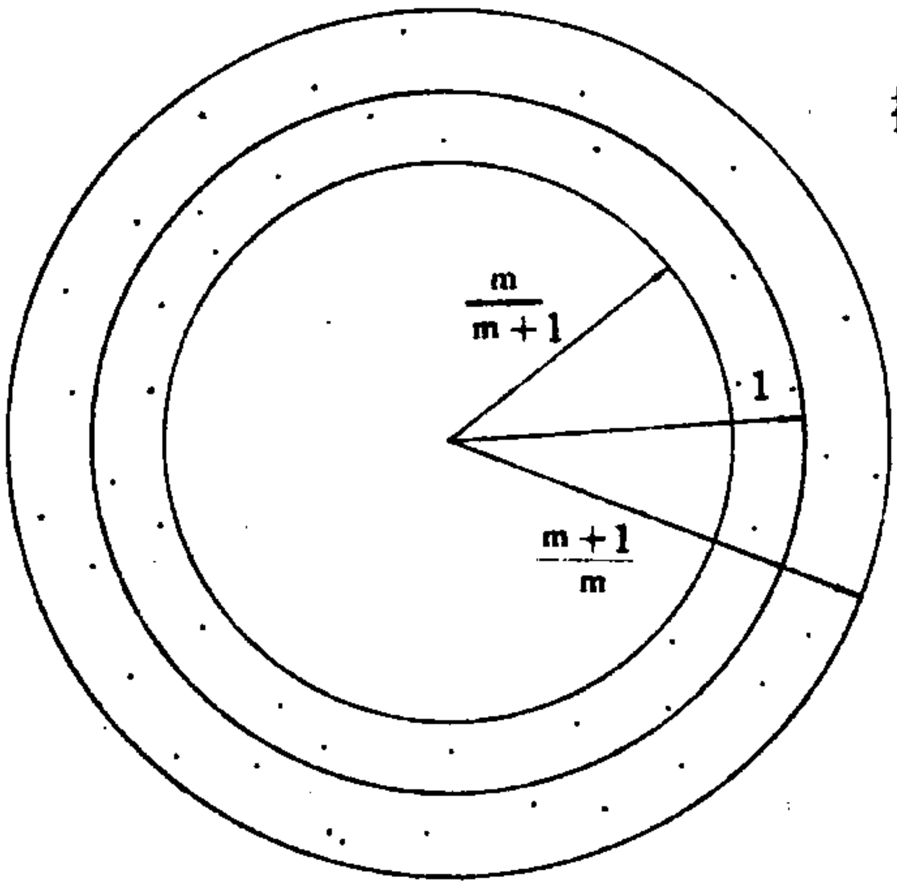

图 1-1 根密集在两同心圆之间

证明　　命 n(x) 为 f(z) 在圆 $|z|\leqq x$ 内的根的个数。按 Jensen 的公式，

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta - \log|f(0)|.$$

n(x)是非迭减(non—decreasing)函数。

$$\int_r^{\frac{m+1}{m}r} \frac{n(x)}{x}dx \geqslant n(r)\int_r^{\frac{m+1}{m}r}\frac{dx}{x} = n(r)\log\frac{m+1}{m},$$

$$\therefore\quad n(r) \leqslant \frac{1}{\log\frac{m+1}{m}}\int_r^{\frac{m+1}{m}r}\frac{n(x)}{x}dx.$$

命

$$\log\frac{m+1}{m} = \frac{1}{A(m)},$$

则

$$n(r) \leqslant A(m)\int_0^{\frac{m+1}{m}r}\frac{n(x)}{x}dx,$$

$$n(r) \leqslant A(m)\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\frac{m+1}{m}re^{i\theta})|d\theta - \log|f(o)|\right],$$

$$n(\frac{m}{m+1}) \leqslant A(m)\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\theta})|d\theta - \log|f(0)|\right],$$

$$n(\frac{m}{m+1}) \leqslant A(m)\log\frac{|a_0|+|a_1|+\cdots\cdots+|a_n|}{|a_0|}, \tag{8}$$

$$\therefore\quad n(\frac{m}{m+1}) \leqslant A(m)\log n.$$

当 m 固定时，$n(\frac{m}{m+1})=O(\log n)=O(n)$；上式的意义是落在圆 $|z|\leqslant\frac{m}{m+1}$ 内的根的个数是 $O(\log n)$. 以倒置换 $z=\frac{1}{z'}$ 施行于 f(z)，于是得

$$a_0z^m + u + a_1z^{m-1} + \cdots\cdots + a_n = 0.$$

$\therefore$　$f(\frac{1}{z})$ 在圆 $|z|=\frac{m+1}{m}$ 外的根即 $f(z')$ 在 $(\frac{m}{m+1})=|z|$ 内的根。所以可得以下的结论：若 $m<<n$，则

$$\left(n - \sum_{\frac{m}{m+1}<r_i<\frac{m+1}{m}} 1\right) \leqslant 2A(m)\log n \tag{7}$$

$$= O(\log n)$$

$$= o(n). \qquad\qquad (q.e.d.)$$

为 A(m)的计算可用下列公式：

$$\log(m+1) - \log m = 2\left[\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{3(2m+1)^3} + \frac{1}{5(2m+1)^5} + \cdots\cdots\right].$$

按粗略的计算，$n(\frac{m}{m+1})\leqslant(m+1)\log n$.

我们更可以把条件(6)改成

$$n^{-\lambda} < |a_i| < n^{\lambda}.$$

则定理(一)仍然成立，因为

$$n\left(\frac{m}{m+1}\right) \leqslant A(m)\log\frac{|a_0|+|a_1|+\cdots|a_n|}{|a_0|}$$
$$\leqslant A(m)\log\frac{n^{\lambda}+n^{\lambda}+\cdots+n^{\lambda}}{n^{-\lambda}}$$
$$\leqslant A(m)(2\lambda+1)\log n.$$

应用以上的定量于收敛级数上，则更可明白一些部份和 $S_n(z)=1+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 的性质。

定理(二)　(定理(一)的推论)若级数

$$f(z)=1+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$$

满足

$$n^{-\lambda}<|a_i|<n^{\lambda}, \qquad 1<i\leqslant n.$$

则此一部份和 $S_n(z)$ 的根密集在含有单位圆的环状域 $\frac{m}{m+1}<|z|<\frac{m+1}{m}$ 内。

附　注

以上定理的证明使只用了 Jensen 公式，在任何复变数函数论中都可以查得到。

关于多项式的研究两个方向：一是计算根的实际方法，在这方面例如有牛顿的方法等，并且近来中国数学家林家翹在麻省理工学院的数理学志常发表文章；另一方向是根的位置分布问题，这篇一短文只说明在首项和末项系数较大时的一个粗略的结果。

(原载于《中国科学》第 2 卷第一期，21—23 页，1951 年 2 月)。

指数函数和的零点分布

§1. **引言** 在微分方程式的稳定性理论中，有时关联到指数函数和的零点分布问题。例如贝尔曼(参考文献 1,2)在讨论方程式中

$$\frac{d}{dt}u(t+1)=a_1u(t+1)+a_2u(t)$$

$$u=\Phi(t) \qquad\qquad 当\ 0\leqslant t\leqslant 1$$

此 $u(t)$ 的有界解存在的条件为

$$se^s-a_1e^s-a_2=0$$

的根全部落在 $R(s)=\lambda<0$ 的左半平面内。我们要问 a_1 及 a_2 要满足什么条件才有这样的分布呢？为了研究这一类问题我们来讨论更广泛的问题即所谓指数函数和

$$\Phi(s)=\sum_{r=0}^{n}A_r(s)e^{a_rs} \tag{1}$$

之根的分布问题。为了明确设 $a_0=o<a_1<a_2\cdots<a_n$ 为实数，s 表示复数。$A_r(s)$ 表示非常数的多项式，当 $A_r(s)$ 退化为常数时，已被朗格尔讨论了(参考文献 3)。这里顺便把朗格尔的结果提一下即当 $A_r(s)\quad r=1,2,\cdots n$ 都是常数时，则 $\Phi(s)$ 的根分布在与虚轴平行的一条子域内。即 $s=\sigma+i\tau,|\sigma|<k$ 的一域内，他也讨论了 $A_r(s)=c_\gamma s^{\gamma_r},c_\gamma$ 是常数，γ_r 是实常数的情况，我们这里把 $A_r(s)$ 考虑作非常数的多项式。则 $\Phi(s)$ 的零点落在一曲线条子域，因多项式的不同而选取的曲线不同，本文最后把 $\Phi(s)=P(s)+Q(s)e^{as}$ 作详细的讨论，并把贝尔曼稳定条件用 a_1、a_2 的性质说明了出来。

§2. 为了计算上的方便，命 $0<a_1<a_2<\cdots<a_n$ 考虑指数函数和

$$\Phi(s)=A_0(s)+A_1(s)e^{a_1s}+A_2(s)e^{a_2s}+\cdots+A_n(s)e^{a_ns} \tag{2}$$

在上式中 $A_i(s),i=0,1,2,\cdots n$ 是非常数的多项式。又用 B_i 表示 $A_i(s)$ 的系数的绝对值之最大者，$A_i(s)$ 幂次以 m_r 表之用 N 表示 $\max\{m_0,m_1,\cdots m_n\}$ 则得下列定理。

定理 1 满足上述条件的

$$\Phi(s)=A_0(s)+A_1(s)e^{a_1s}+A_2(s)e^{a_2s}+\cdots+A_n(s)e^{a_ns}$$

的零点落在下列(i)(ii)(iii)的联合区域内。$(s=\sigma+i\tau)$

(i) $\quad |s|\leqslant m \qquad$ 图形域

(ii) $$\left.\begin{aligned}&|\tau|\geqslant e^{\frac{a_n-a_{n-1}}{N}\sigma} &&\cdots\ 在右半平面\\ &|\tau|\geqslant e^{-\frac{a_1}{N}\sigma} &&\cdots\ 在右半平面\end{aligned}\right\}曲线域$$

(iii) $\quad -\sigma'_n\leqslant\sigma\leqslant\sigma_n \quad (\sigma'_n,\sigma_n>0) \qquad$ 条子域

上述之 M,σ'_n,σ_n 由 $A_r(s),r=0,1,\cdots n$ 的系数及幂次及 $a_1,a_2\cdots a_n$ 所决定。(i)(ii)(iii)之联合域如图 1—2 之黑影部分。

证明 先证右半平面的情况.(σ>0)

设 $$A_n(s)=a_0^{(n)}s^{m_n}+a_1^{(n)}s^{m_n-1}+\cdots+a_{m_n}^{(n)}$$

则 $$|\Phi(s)|\geqslant|A_n(s)|e^{a_n\sigma}-\sum_{r=1}^{n-1}|A_r(s)|e^{a_r\sigma}-|A_0(s)|$$

$$|\Phi(s)|\geqslant|a_0^{(n)}s^{m_n}|e^{a_n\sigma}-B_n\sum_{r=0}^{m_n-1}|s^r|e^{a_n\sigma}-\sum_{r=1}^{n-1}|A_r(s)|e^{a_r\sigma}-|A_0(s)|$$

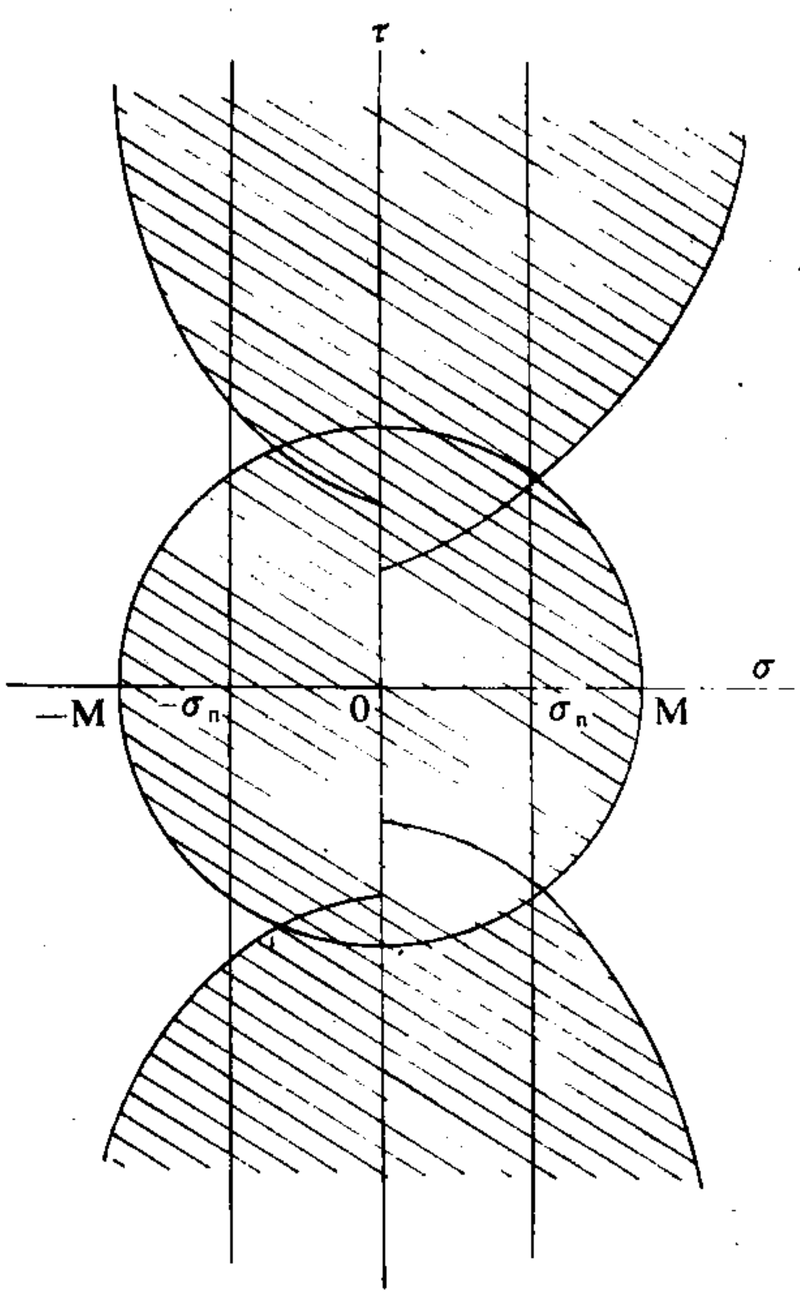

图 1—2

$$=\frac{1}{2}|a_0^{(n)}||s|^{m_n}e^{a_n\sigma}B_n\sum_{r=0}^{m_n-1}|s|^r e^{a_n\sigma}$$

$$+\frac{1}{2}|a_0^{(n)}||s|^{m_n}e^{a_n\sigma}-\sum_{r=1}^{n-1}|A_r(s)|e^{a_r\sigma}-|A_0(s)|$$

$$=I+J \qquad \text{(分为两部分)}$$

第一部分

$$I=\left(\frac{1}{2}|a_0^{(n)}||s|^{m_n}-B_n\sum_{r=0}^{m_n-1}|s|^r\right)e^{a_n\sigma}$$

$$\geqslant\left(\frac{1}{2}|a^{(n)}0|\cdot|s|^{m_n}-B_n\cdot m_n|s^{m_n-1}|\right)e^{a_n\sigma} \qquad 当\ |s|\geqslant 1$$

$$>0 \qquad 当\ |s|>\left\{\frac{2B_n\cdot m_n}{|a_0^{(n)}|},1\right\}=M_1,\ \{a,b\}\ 表\ max[a,b]。$$

第二部分

$$J=\frac{1}{2}|a_0^{(n)}|\cdot|s^{m_n}|e^{a_n\sigma}-\sum_{r=1}^{n-1}|A_r(s)|e^{a_r\sigma}-|A_0(s)|$$

$$>\frac{1}{2}|a_0^{(n)}||s|^{m_n}e^{a_n\sigma}-\{(\sum_{r=1}^{n-1}|A_r(s))|+|A_0(s)|\}e^{a_{n-1}\sigma}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}|a_0^{(n)}||s|^{m_n}e^{a_n\sigma}-((\sum_{r=0}^{n-1}(m_r+1)B_r|s|^N))e^{a_{n-1}\sigma} \qquad 当\ |s|\geqslant 1。$$

上列式中的 $N=max\{m_0,m_1,\cdots m_n\}$，命 $K_1=\sum_{r=0}^{n-1}(m_r+1)B_r$，则

$$J\geqslant\frac{1}{2}|a_0^{(n)}||s|^{m_n}e^{a_n\sigma}-k_1|s|^Ne^{a_{n-1}\sigma}$$

$$=\left(\frac{1}{2}|a_0^{(n)}|-k_1|s|^{N-m_n}e^{(a_n-a_{n-1})\sigma}\right)|s|^{m_n}e^{a_n\sigma}$$

命 $\quad |\tau|<e^{\frac{a_n-a_{n-1}}{N}\sigma} \qquad s=\sigma+i\tau$

则 $\quad |s|^{N-m_n}\leqslant(|\sigma|+|\tau|)^{N-m_n}\leqslant\{|\sigma|+e^{\frac{a_n-a_{n-1}}{N}\sigma}\}^{N-m_n}\leqslant 2e^{\frac{a_n-a_{n-1}}{N}\sigma}\} \qquad$ 当 $\sigma>\sigma_0$ 时

∴

$$J\geqslant\left\{\frac{1}{2}|a_0^{(n)}|-k_12^{N-m_n}\cdot e^{\frac{(a_n-a_{n-1})(N-m_n)}{N}\sigma+(a_{n-1}-a_n)\sigma}\right\}|s|^{m_n}\cdot e^{a_n\sigma}$$

$$\geqslant\left\{\frac{1}{2}|a_0^{(n)}|-k_12^{N-m_n}e^{-\frac{(a_n-a_{n-1})m_n}{N}\sigma}\right\}|s|^{m_n}\cdot e^{a_n\sigma}$$

>0 当 σ 充分大 设为 $\sigma>\sigma_n>\sigma_0$

此 σ_n 可看做 $\frac{1}{2}|a_0^{(n)}|-k_12^{N-m_n}e^{-\frac{a_n-a_{n-1}}{N}m_n\sigma}=0$ 的唯一的实根。故当 $s=\sigma+i\tau,\sigma>0$ 时 $|\Phi(s)|>0$ 当(i) $|s|>\max\left\{1,\frac{2B_n\cdot m_n}{|a_0^{(n)}|}\right\}=M_1$ (ii) $|\tau|<e^{\frac{a_n-a_{n-1}}{N}\sigma}$ (iii) $\sigma>\sigma_n$ 时 上列(i),(ii),(iii)的点集合即定理 1,在右平面所满足的结果。至于左半平面考虑。

$$F(s)=\Phi(s)e^{-a_ns}+A_1(s)e^{-[a_n-a_1]s}+\cdots+A_n(s)$$

按左半与右半的对称性得相同的结果，只不过 (1) σ'_n 与 σ_n 大小不同。(2) $|s|>M_2$, M_2 与 M_1 不同取其大量者为 $|s|>M$。(3) $|\tau|>e^{-\frac{a_1\sigma}{N}}$。

定理 2 设 $\quad X(s)=A_0(s)+A_1(s)e^{a_1s}+\cdots+A_n(s)e^{a_ns}$

设 $\quad a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$

且 $\quad m_0<m_1<m_2<\cdots<m_n$。 ($m_r$ 是 $A_r(s)$ 的幂次)

则 $\Phi(s)$ 在右半平面及虚轴上只有有限个零点。

证明 $|\Phi(s)| \geq |A_n(s)|e^{a_n\sigma} - \sum_{r=1}^{n-1}|A_r(s)|e^{a_r\sigma} - |A_0(s)|$

$\geq e^{a_n\sigma}\{|A_n(s)| - \sum_{r=1}^{n-1}|A_r(s)| - |A_0(s)|\}$ 当 $\sigma \geq 0$

$\geq e^{a_n\sigma}\{|a_0^{(n)}||s|^{m_n} - \sum_{r=1}^{m_n}|a_r^{(n)}||s|^{m_n-r} - \sum_{r=0}^{n-1}|A_r(s)|\}$

$\geq e^{a_n\sigma}\{|a_0^{(n)}||s|^{m_n} - m_nB_n|s|^{m_n-1} - \sum_{r=0}^{n-1}(m_r+1)B_r|s|^{m_n-1}\}$，当 $|s| \geq 1$

> 0. 当 $|s| > \dfrac{m_nB_n + \sum_{r=0}^{n-1}(m_r+1)B_r}{|a_0^{(n)}|}$.

定理 2 的零点分布如图 1—3 的黑影部分。

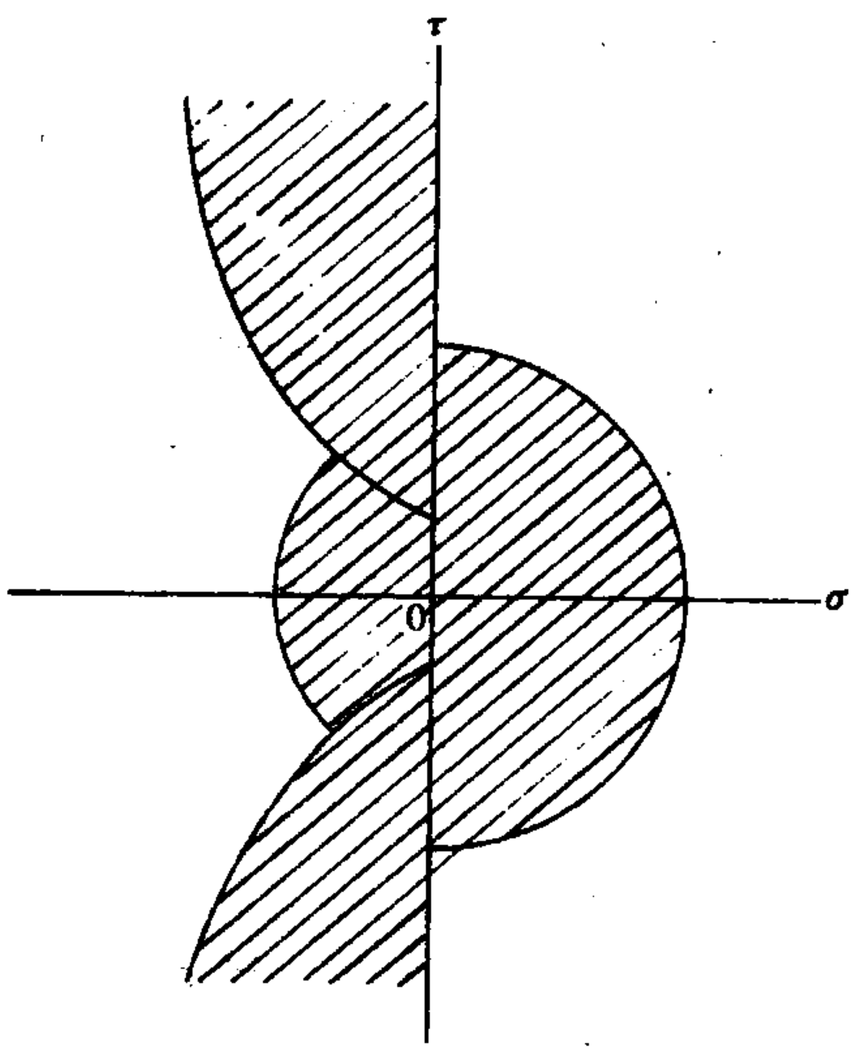

图 1—3

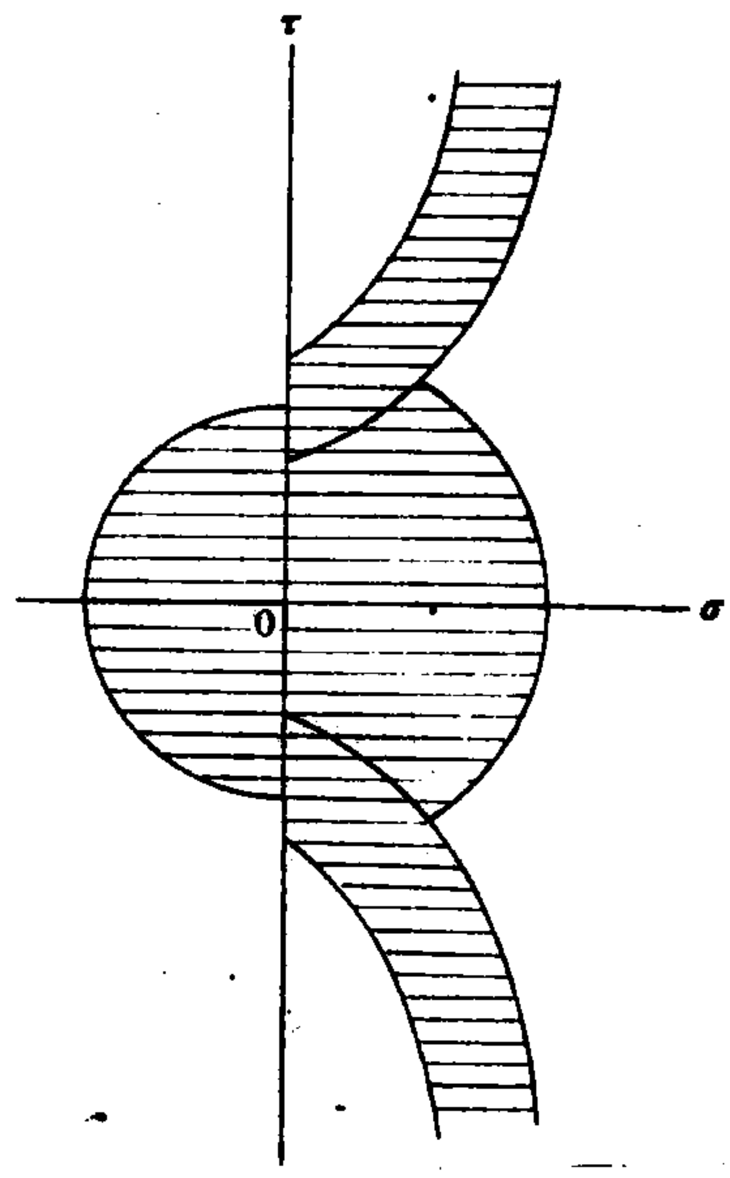

图 1—4

§3. 设 $A_0(s) = a_0s^m + a_1s^{m-1} + \cdots + a_m$

$A_1(s) = b_0s^n + b_1s^{n-1} + \cdots + a_n$

定理 3 考 $\Phi(s) = A_0(s) + A_1(s)e^{as}, a > 0$

设 $m > n$。则 $\Phi(s)$ 的零点落在下列两闭区域之联合集合上

1. $|s| \leq \frac{1}{|a_0|}|[mM_0 + n(M_1 + 1)]$ $\sigma \leq 0$

此 $M_0 = \max_{0\leq i\leq m}|a_i|, M_1 = \max_{0\leq i\leq n}|b_i|$

2. 下列两曲线 c_1 及 c_2 之间的闭域

$$c_1\begin{cases} |\tau| = \left(\dfrac{2m(M_1+1)}{|a_0|}\right)^{\frac{1}{m-n}} e^{\frac{(a+1)}{m-n}\sigma}, \quad \sigma > 0 & \text{当 } |s| > \dfrac{2m(M_0)}{|a_0|} \\ \tau\text{轴} & \text{当 } |\tau| \leq \dfrac{2mM_0}{|a_0|} \end{cases}$$

$$c_2\left\{\begin{array}{l}\tau = e^{\frac{a}{m}\sigma}\\ |s| = M \text{ 常数}\\ \sigma = \sigma_1 \quad \text{常数}\end{array}\right\}$$ 三曲线中取最右之点所成之曲线。如图 1—4 之黑影部份。

证明 1) 命 $F(s) = e^{-a\sigma}\Phi(s)$

$$F(s) = e^{-as}A_0(s) + A_1(s)$$

$$|F(s)| \geqslant e^{-a\sigma}|A_0(s)| - |A_1(s)|$$

$$\geqslant e^{-a\sigma}|a_0 s^m - \sum_{i=1}^{m}|a_i||s^{m-i}|\} - \sum_{i=0}^{n}|b_i s^{n-i}|$$

$$\geqslant e^{-a\sigma}\{|a_0||s|^m - mM_0|s|^{m-1} - m(M_1+1)|s|^{m-1}\} \quad \text{当 } \sigma \leqslant 0, |s| \geqslant 1$$

$$\therefore \quad |F(s)| > 0 \quad \text{当 } |s| > \frac{1}{|a_0|}[mM_0 + n(M_1+1)]$$

2) $$(c_1) \quad |F(s)| \geqslant \frac{e^{-a\sigma}}{2}|a_0||s|^m - mM_0|s|^{m-1}e^{-a\sigma}$$

$$+ \frac{e^{-a\sigma}}{2}|a_0||s|^m - n(M_1+1)|s|^n \qquad \text{当 } |s| \geqslant 1。$$

$$= I + J$$

$$I = e^{-a\sigma}\left\{\frac{|a_0|}{2}|s|^m - mM_0|s|^{m-1}\right\} > 0 \quad \text{当 } |s| > \frac{2mM_0}{|a_0|}$$

$$J = \frac{|a_0|}{2}e^{-a\sigma}|s|^m - n(M_1+1)|s|^n$$

$$= |s|^n\left\{\frac{|a_0|}{2}e^{-a\sigma}|s|^{m-n} - n(M_1+1)\right\} \geqslant |s|^n\left\{\frac{|a_0|}{2}e^{-a\sigma}|\tau|^{m-n} - n(M_1+1)\right\}$$

设 $$|\tau| \geqslant \left(\frac{2n(M_1+1)}{|a_0|}\right)^{\frac{1}{m-n}} e^{\frac{(a+1)\sigma}{m-n}}$$

$$J \geqslant |s|^n\left\{\frac{|a_0|}{2}e^{-a\sigma}\frac{2n(M_1+1)}{|a_0|}\cdot e^{(a+1)} - n(M_1+1)\right\}$$

$$\geqslant |s|^n\{n(M_1+1)e^{\sigma} - n(M_1+1)\} \geqslant 0 \quad \text{当} \geqslant 0$$

$$\therefore \quad |F(s)| > 0 \quad \text{当 } |s| > \frac{2mM_0}{|a_0|}, |\tau| > \left(\frac{2n(M_1+1)}{|a_0|}\right)^{\frac{1}{m-n}} \cdot e^{\frac{(a+1)\sigma}{m-n}}$$

故在曲线(c_1)的左边除 1) $|s| \leqslant \frac{1}{|a_0|}[mM_0 + n(M_1+1)]$ 之域外没有零点。至于(c_2)不难由定理 1 推得。

附注 若考虑 $\Phi(s) = A_0(s) + A(s)e^{as}$ 此 $A(s)$ 的幂次大于 $A_0(s)$ 之幂次时，其图为定理 4 之图以 τ 轴对称之图形，不再讨论。

定理 4 考 $\Phi(s) = A_0(s) + A_1(s)e^{as} \qquad a > 0$

并设 $A_0(s)$ 与 $A_1(s)$ 的幂次相同： $A_0(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n$

$A_1(s) = s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n$ 则 $\Phi(s)$ 的零点落在下列两闭域的联合集合上：置 ε 为任一大于零的小常数 $\varepsilon > 0$。

(i) $|\sigma| \leqslant \varepsilon$ 一狭条子域

(ii) $$|s| \leqslant \frac{n\{B_1 e^{\frac{a}{2}\varepsilon} + B_0 e^{-\frac{a}{2}\varepsilon}\}}{e^{\frac{a}{2}\varepsilon} - e^{-\frac{a}{2}\varepsilon}} \leqslant nB\coth\frac{a}{2}\varepsilon \text{ 此}\left\{\begin{array}{l}B = max\{B_0, B_1\}\\ B_1 = \max\limits_i\{|b_i|\}\\ B_0 = \max\limits_i\{|a_i|\}\end{array}\right.$$

证明 考查 $F(s) = e^{-\frac{a}{2}s}\Phi(s) = A_0(s)e^{-\frac{a}{2}s} + A_1(s)e^{\frac{a}{2}s}$

$$|F(s)| \geqslant |A_1(s)|e^{\frac{a}{2}\sigma} - |A_0(s)e^{-\frac{a}{2}\sigma} \quad \varepsilon \geqslant \sigma \geqslant 0$$

$$\geqslant |s|^n e^{\frac{a}{2}\sigma} - e^{\frac{a}{2}\sigma} n B_1 |s|^{n-1} - |s|^n e^{-\frac{a}{2}\sigma} - e^{-\frac{a}{2}\sigma} n B_0 |s|^{n-1}, \text{当 } |s| \geqslant 1$$

$$= |s|^n (e^{\frac{a}{2}\sigma} - e^{-\frac{a}{2}\sigma}) - n|s|^{n-1}(B_1 e^{\frac{a}{2}\sigma} + B_0 e^{-\frac{a}{2}\sigma})$$

$$> 0 \quad \text{当 } s > \frac{n[B_1 e^{\frac{a}{2}\sigma} + B_0 e^{-\frac{a}{2}\sigma}]}{e\frac{a}{2}\sigma - e^{-\frac{a}{2}\sigma}} \qquad \text{当 } 0 \leqslant \sigma \leqslant \varepsilon。$$

$$|F(s)| > 0 \quad \text{当 } s > nB\coth\frac{a}{2}\varepsilon。$$ 证终。

由上列证明可知定理 4 之 $\Phi(s)$ 的零点的实部分是趋于零的，换言之 $\Phi(s)$ 的零点密集在虚轴的附近。

§ 4. 对微分方程式定性理论的应用。(参考 2)

考查　微分差分方程式

(3)　$\sum_{u=0}^{m}\sum_{v=0}^{n} a_{u,v} x^{(v)}(t+\tau_u) = 0$　$a_{u,v}, \tau_u$ 是实常数

用尤拉方法　命 $x(t) = e^{st}$ 求特殊解得

(4)　$\sum_{u=0}^{m}\sum_{v=0}^{n} a_{u,v} s^v \cdot e^{\tau_u s} = 0$　为其特征方程

则(3) 的解可用 $\sum_{j=1}^{\infty} p_j(t)e^{s_j t}$ 表达出来。$p_j(t)$ 表多项式或常数，s_j 表示(4) 的根。其为渐近稳定的条件是(4) 的根之实部都 $< -u < 0$。而(4) 方程的根即本文讨论的(1) 之 $\Phi(s) = 0$ 的根。所以 $\Phi(s)$ 的根的分布情况可以说明(3) 的解是否稳定的。关于较复杂的 $\Phi(s)$ 本文只谈到其全平面上的分布，如果想应用于稳定性理论仍要考察局部的分布，关于局部的分布问题是更细致。现在我们来考虑贝尔曼的方程式

(5)　$se^s - a_1e^s - a_2 = 0$

贝尔曼的条件说当(5) 的根全部落在 $R(s) = -\lambda < 0$ 以左时

$$\frac{d}{dt}u(t+1) = a_1u(t+1) + a_2u(t)$$

$$u = \Phi(t) \qquad \text{当 } 0 \leqslant t \leqslant 1$$

的解 $u(t)$ 存在且有界。这一结果载在参考文献(1,2)。

我们来仔细考虑(5) 的根之分布，则贝尔曼的假设条件可改为(5) 的根都是负根即可。并且求出 a_1 与 a_2 的关系。首先我们看(5) 是有无限个根的($a_1 \neq 0$ $a_2 \neq 0$) 其证法如下：命

$$f(s) = se^s - a_1e^s - a_2$$

因 $f(s)$ 是指函数型的整函数，若 $f(s)$ 只有有限个零点则 $f(s)$ 可表示为

(6)　$f(s) = e^{as+b} \cdot p_n(s)$　$p_n(s)$ 为一多项式

命 $a = a_1 + ia_2$　则 1)　$a_1 = 0$　2)　$a_1 > 0$ 或 $a_1 < 0$。

1)　当 $a_1 = 0$　$f(s) = e^{ia_2s+b}p_n(s) = se^s - a_1e^s - a_2$ 使 $s \to +\infty$ 沿实轴　左端的阶是 σ^n，右端的阶是 e^σ。等式不成立。

2) $a_1 > 0$　则 $e^{as+b}p_n(s)$　沿实轴 $\sigma \to -\infty$ 时趋于零

但　$se^s - a_1e^s - a_2 \to a_2$　当 s 沿实轴 $\to -\infty$。

3) $a_1 < 0$　沿实轴　当 $\sigma \to +\infty$　$e^{as+b}pn(s) \to 0$ 但

$se^s - a_1e^s - a_2 \to +\infty$。

故 $f(s) = se^s - a_1e^s - a_2$ 有无限个根。关于 $f(s)$ 的根可得下列定理。命 $\Phi(s) = -f(s)$