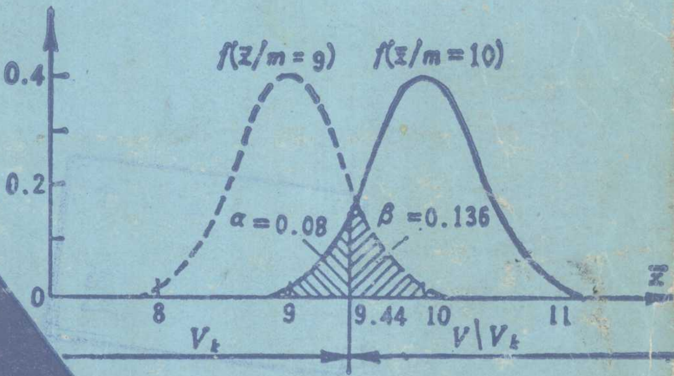
概率论与数理统计

何灿芝　吴俊杰　主编



湖南科学技术出版社

概率论与数理统计

主编　何灿芝　吴俊杰
编者　刘利民　罗　汉
　　　胡立辉　周润兰
主审　朱秀娟

湖南科学技术出版社

湘新登字 004 号

概率论与数理统计

何灿芝　吴俊杰主编
责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版发行
（长沙市展览馆路 3 号）
湖南省新华书店经销
湖南省新华印刷二厂印刷
（印装质量问题请直接与本厂联系）

*

1994 年 5 月第 1 版第 1 次印刷
开本：787×1092 毫米　1/32　印张：12.625　字数：288,000
印数：1—7,000

ISBN 7—5357—1454—4
O·117　定价：10.90 元

地科 146—60

内 容 简 介

该书包括概率论和数理统计两部分基本内容，即事件及其概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、极限定理、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析和正交试验等.

该书叙述深入浅出，通俗易懂，有推理分析，有典型范例，有大量评注，尽量做到了理论联系实际，能使读者学以致用.

此书可以作为本科生和专科生的教材，也可以作为参加成人自学考试的自学用书，还可以作为广大科技工作者和管理人员的应用参考书.

引　言

在客观世界中人们观察到的现象尽管是多种多样的，但归结起来大体可分为两类：一类现象是在一定条件下必然发生（或必然不发生），例如，在一个标准大气压下，水在100℃时会沸腾，清晨太阳必然从东方升起，向上抛一石子必然下落，等等，这类现象在观察之前是可以预知的，其结果是确定的，我们称它为确定性现象或必然现象．另一类现象是在一定条件下可能发生也可能不发生，例如，某自动化车间，某一天内将有多少台机床发生故障，某孕妇即将出生的婴儿是男孩还是女孩，将一枚均匀对称的硬币上抛一次，结果是正面朝上还是反面朝上，等等，这类现象在观察之前是无法预知它的确切结果的，就是说它的结果具有随机性或偶然性，我们称它为随机现象或偶然现象．对于随机现象或偶然现象是否就不可捉摸呢？辩证唯物论认为，偶然性始终是受内部隐蔽的规律支配的，无数的偶然性中隐含着事物的必然规律．对于随机现象，人们只要通过反复多次的观察和试验，就会发现它们具有某种规律性．例如，对某个别孕妇生男孩或女孩是具有随机性，但根据各个国家各个时期人口的统计资料，新生婴儿中男孩和女孩的比例总是约为1∶1，又如将一枚硬币上抛多次，就会发现正面朝上的次数约占二分之一．这种规律性称为随机现象的统计规律性．概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的数学学

科，一方面对随机现象发生的可能性大小作出定量的描述，另一方面根据试验和观察得到的数据，对研究对象作出种种合理的估计和判断.

概率论与数理统计是现代数学的重要分支之一，它不仅有丰富的理论，而且广泛地应用在工业、农业、军事、医学、公共事业、尖端科学等各个领域，并发挥着越来越重要的作用. 因此，对每一个科学工作者和工程技术人员来说，掌握这门学科是非常必要的.

目 录

第一章　随机事件及其概率

§1　随机事件

一　随机事件与样本空间

通常，我们把观察某种现象和各种科学试验统称为试验，凡具有下列特性的试验称为随机试验.

1. 试验在相同的条件下可以重复进行；

2. 每次试验的可能结果不止一个，并且在试验前能知所有可能结果；

3. 每次试验总是只出现所有可能结果中的一个，但一次试验前不能断定哪个结果会出现.

随机试验的每一个可能结果称为基本事件，也称为样本点. 全体基本事件组成的集合称为样本空间，用字母 Ω 表示.

例 1　抛一枚硬币，观察出现正、反面的情况.（在硬币上标有币值的一面为正面，另一面为反面）. 这是一个随机试验，记为 E_1. 试验的可能结果有两个：出现正面和出现反面. E_1 的样本空间 Ω_1 是以这两个基本事件为元素的集合，用"正"表示出现正面，"反"表示出现反面，则样本空间 $\Omega_1=$ {正，反}.

例 2　将二枚硬币先后各抛一次，观察出现正反面的情况. 这里把二枚硬币依序各抛一次是进行一次试验，这个随机试验

记为 E_2，试验的可能结果即基本事件有 4 个：（正，正），（正，反），（反，正），（反，反）. 这里的记号（正，反）表示第一枚出现正面，第二枚出现反面，E_2 的样本空间为 $\Omega_2=\{$(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)$\}$.

例 3 掷一颗骰子观察出现的点数也是随机试验，记为 E_3. 用"i"表示"出现 i 点"（$i=1, 2, 3, 4, 5, 6$），则基本事件有 6 个，E_3 的样本空间 $\Omega_3=\{1,2,3,4,5,6\}$.

例 4 从包含三件正品（记作 a_1, a_2, a_3）和一件次品（记作 b）的四件产品中任取两件，具体拿出两件就是进行一次试验. 这个试验记为 E_4，它有 6 个可能结是，如果用 (a_1, a_2) 表示拿到正品 a_1 和正品 a_2，则 E_4 的样本空间 Ω_4 为

$$\Omega_4=\{(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_2,a_3),(a_1,b),(a_2,b),(a_3,b)\}.$$

例 5 记录电话交换台在单位时间内接到的呼叫次数. 这个试验记为 E_5，如果用 k 表示"在单位时间内收到 k 次呼叫"这一结果，由于难以规定呼叫数的上界，所以认为每一个非负整数 k 都是一个可能的试验结果，因此 E_5 的样本空间 Ω_5 为：$\Omega_5=\{0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\}$.

从上述例子看到，样本空间所包含的基本事件的个数可以是有限个，也可以是无穷多个，如果这无穷多个可以依照某种次序排列出来，则称为可列多个，故例 5 中 Ω_5 有可列多个基本事件.

在具体分析随机试验的所有可能结果时，要特别注意试验的内容和目的，如随机试验 E_2 其样本空间为 $\Omega_2=\{$(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)$\}$，如果随机试验 E_6 是一次抛二枚硬币，观察出现正反面的情况，这里只有 3 个可能结果：两个正面，一正一反，两个反面. E_6 与 E_2 的内容不同，所以样本空间也不同. 再如一个射手对一目标射击，观察的目的不同就是

不同的随机试验，如果观察射手射击命中目标与否，则以试验的样本空间是$\Omega=$ {命中目标，未命中目标}，由两个基本事件组成. 如果观察弹着点与目标的距离 x，则样本空间为 $\Omega=\{x|0\leqslant x<\infty\}$，基本事件有无穷多个，但不可列.

二 随机事件

在某个随机试验中，对一次试验而言，可能出现（或发生）也可能不出现（或不发生）的事情称为这个试验的随机事件，通常用大写的英文字母 A，B，C，…或 A_1，A_2，…，B_1，B_2，…来表示.

对于一个随机试验，它的每一个基本事件都是一个随机事件，它是这个试验中最简单的随机事件，如在例 3 中的随机试验 E_3，样本空间 $\Omega_3=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，“出现 2 点”这个基本事件是随机事件，而 $A_1=$“出现偶数点”也是随机事件，它是由基本事件“出现 2 点”，“出现 4 点”，“出现 6 点”所组成，可写成 $A_1=\{2, 4, 6\}$，把 A_1 看成集合，它是样本空间 Ω_3 的子集，当 A_1 出现时，组成 A_1 的三个基本事件中必有一个出现，而当这三个基本事件之一出现时，A_1 必定出现. 又如 $A_2=$“点数大于 3”是 E_3 的随机事件，它是由三个基本事件所组成，$A_2=\{4, 5, 6\}$，A_2 是 Ω_3 的子集，事件 A_2 出现当且仅当组成它的三个基本事件中的某一个出现.

由此可见，随机事件是由若干个基本事件所组成，是以这些基本事件为元素的集合，它是样本空间的子集，随机事件出现当且仅当这个子集所包含的一个基本事件出现.

我们把每次试验都一定出现的事情称为必然事件，用 Ω 表示，而把每次试验一定不出现的事情称为不可能事件，记为$\varnothing$，例如在随机试验 E_3 中，“点数大于零且小于 8”是必然事件，而“点数大于 10”是不可能事件.

必然事件与不可能事件本质上没有不确定性，但是为了方便起见，我们还是把它们看作随机事件.

今后，我们把随机事件简称为事件，而将随机试验简称为试验.

三 事件的关系及运算

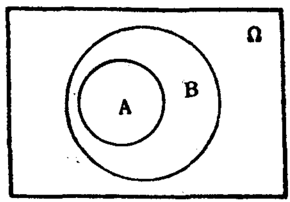
和现实世界其它事物一样，事件也是相互联系的，我们不能孤立地研究一个事件，而需要研究在同样的条件下的几个事件以及它们之间的关系，使我们能够通过对一些较简单事件的了解，去研究与它有关的较复杂的事件. 在下面的讨论中假定样本空间 Ω 已经给定，而且 A、B、C 及 A_i ($i=1, 2, \cdots$) 是 Ω 中的事件.

1. 事件的包含与相等

如果事件 A 出现必然导致事件 B 出现，则称事件 B 包含事件 A，或称 A 是 B 的子事件. 记为

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A.$$

例 6 设试验是让点随机地落在矩形内，事件 A 表示“点落在小圆里”，B 表示“点落在大圆里”，则当点落在小圆里时，该点必落在大圆里（见图 1.1），也就是说，若 A 出现则 B 必出现，因此 B 包含 A.



A⊂B

图 1.1

如果事件 A 包含事件 B，同时事件 B 也包含事件 A，即 $B \subset A$，$A \subset B$ 同时成立，则称事物 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

如在例 3 中若 A 表示“出现 3 点”，B 表示“出现奇数点”，则 $A \subset B$，如果 C 表示“点数能被 3 整除”，D 表示“出现 3 或 6 点”，则 $C=D$.

例 7 在检查某圆柱形零件时，要求它的长度和直径都符合规格才算合格品，若 A 表示“合格品”，B 表示“圆柱形零件直径和长度都符合规格”，则 $A=B$.

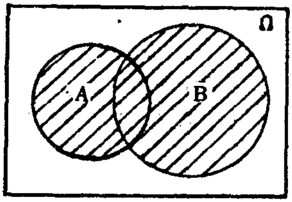
2. 事件的和

事件 A 与 B 中至少有一个出现是一个事件，称为事件 A 与 B 的和，记为 $A\cup B$.

事件 $A\cup B$ 出现等价于 A 出现或者 B 出现.

如在例 7 中，检查圆柱形零件，若用 A 表示“零件不合格”，B_1 表示“零件长度不合格”，B_2 表示“直径不合格”，则有 $A=B_1\cup B_2$.

例 8 设点随机地落在矩形区域内. 用 A 表示“点落在左边小圆内”，B 表示“点落在右边大圆内”，如图 1.2 所示，考虑事件“点落在阴影部分内”，记为 C，可以看出，当且仅当点至少落在一个圆里时，点落在阴影部分内，也就是说，当且仅当事件 A、B 中至少有一个出现时（即点落在左边小圆内，或者点落在右边大圆内）事件“点落在阴影部分内”出现，因此，事件 C 是事件 A 与 B 的和.



A∪B

图 1.2

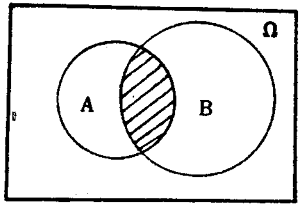
3. 事件的积

事件 A 与事件 B 同时出现是一个事件，称为事件 A 与 B 的积，记为 $A\cap B$ 或 AB.

如在例 7 中检查圆柱形零件时，“产品合格”是“直径合格”与“长度合格”这两个事件的积.

例 9 设点随机地落在矩形区域内，事件 A 与 B 的定义与

例 8 中的定义相同，如图 1.3 所示，则事件“点落在两圆公共部分里”就是事件 A 与 B 的积，此时点既落在左边的圆内，又落在右边的圆内，故 A、B 同时都出现.



A∩B

图 1.3

事件的和与事件的积可以推广到有限个甚至无限多个事件的情形.

事件“A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个出现”称为事件 A_1，A_2，…，A_n 的和，记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 或缩写为 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$，事件“A_1，A_2，…，A_n，…中至少有一个出现”称为可列多个事件 A_1，A_2，…，A_n…的和，记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cdots$，或记成 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

事件“A_1，…，A_n 都同时出现”称为事件 A_1，…，A_n 的积，记为 $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$，缩写为 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$，事件“A_1，A_2…，A_n…都同时出现”称为可列多个事件 A_1，…，A_n…的积，记为 $A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n \cdots$，或 $A_1A_2\cdots A_n\cdots$，缩写为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

如在例 5 中，事件“呼叫次数是奇数”是事件“呼叫 1 次”，“呼叫 3 次”，“呼叫 5 次”，…等事件的和，而“呼叫偶数次”，“呼叫次数大于 3”，“呼叫次数不超过 8”这三个事件的积是事件“呼叫次数为 4 或 6 或 8”.

4. 互不相容（互斥）事件与对立事件

如果两个事件 A、B 不能同时出现，即 A、B 同时出现是不可能事件

$$AB = \varnothing,$$

则称 A、B 互不相容或互斥.

如果事件 A、B 满足

$$A \cup B=\Omega, \quad AB=\varnothing,$$

则称 B 为 A 的对立事件，记为 $B=\overline{A}$. 它说明在一次试验中 A 与 B 必定出现一个，且只能出现一个，A 不出现 B 必出现，A 出现 B 必不出现.

例如在例 5 中，以 A 表示“呼叫偶数次，”则 A 的对立事件 $\overline{A}$ 为“呼叫奇数次”，同样“呼叫奇数次”的对立事件是“呼叫偶数次”，这说明 A 是 B 的对立事件则 B 也是 A 的对立事件，即 A、B 互为对立事件，必然事件与不可能事件互为对立事件.

我们注意到，随机试验的所有基本事件都是两两互不相容的，因为每次试验只能出现一个结果（基本事件），任何两个不同结果都不能同时出现，但基本事件彼此未必互为对立事件，例如在例 3 中，“出现 2 点”与“出现 3 点”这两个基本事件是互不相容的，但它们不是对立事件，总之，对立事件一定互不相容，而互不相容事件未必是对立事件.

例 10 设点随机地落在矩形域内，用 A 表示“点落在圆内”的事件，“点落在圆外”就是 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$，如图 1.4 所示.

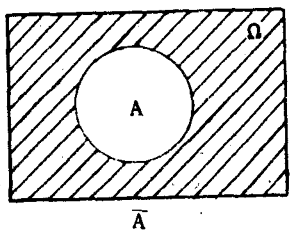


图 1.4

5. 事件的差

事件 A 出现而 B 不出现是一个事件，称为事件 A 与事件 B 的差，记为 $A-B$.

如在例 3 中，设 A 表示“出现偶数点”，B 为“出现的点数超过 3”，则事件 $A-B$ 表示既要点数为偶数又不能超过 3 的事件，于是 $A-B$ 为事件“出现 2 点”.