现代数学基础

9 无限维空间上的测度和积分

——抽象调和分析

（第二版）

■ 夏道行 著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

现代数学基础

9

无限维空间上的测度和积分

——抽象调和分析

（第二版）

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书系统地总结了作者和国内外数学家在无限维空间上测度和积分论研究中所得到的某些结果，部分尚属初次发表. 全书包括六章: 测度论的某些补充知识, 正泛函与算子环的表示, 具拟不变测度的群上调和分析, 线性拓扑空间上的拟不变测度及调和分析, Gauss 测度, Bose–Einstein 场交换关系的表示. 另有两个附录, 介绍阅读本书所需的一些知识. 本书供高等学校数学系高年级学生、研究生及这方面的数学工作者、理论物理工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

无限维空间上的测度和积分：抽象调和分析／夏道行著. —2版. —北京：高等教育出版社，2008.12
ISBN 978-7-04-025317-7

Ⅰ.无… Ⅱ.夏… Ⅲ.①无限维—测度论②无限维—积分—函数论 Ⅳ.O174.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 149349 号

策划编辑 王丽萍　责任编辑 李 鹏　封面设计 张 楠
版式设计 陆瑞红　责任校对 殷 然　责任印制 韩 刚

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
总 机 010－58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京民族印务有限责任公司

开 本 787 × 1092 1/16
印 张 20.5
字 数 410 000

购书热线 010－58581118
免费咨询 800－810－0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
畅想教育 http://www.widedu.com

版 次 1965 年 4 月第 1 版
2009 年 1 月第 2 版
印 次 2009 年 1 月第 1 次印刷
定 价 58.00 元

物料号 25317-00

新 版 序

无限维空间上测度和积分的研究起源于随机过程理论, 特别是 Wiener 过程的理论. 自上世纪 50 年代, 关于特征泛函, 极限定理, 样本空间, 广义随机过程的研究都和它有密切的联系. 更值得注意的是, 许多学科, 如量子力学, 量子场论, 统计物理学, 不可逆热力学, 相对论, 湍流理论, 反应堆计算, 编码问题等中间都出现了无限维空间上的积分问题. 然而在这些领域中无限维空间上积分的进一步应用却遇到了许多较大的困难, 也缺乏处理的方法, 看来需要对它作进一步的研究.

本书只是对无限维空间上测度和积分的某些方面作初步介绍且侧重于抽象调和分析. 它大体上分为三部分: 一、正泛函和算子环的表示 (第二章), 这是抽象调和分析的基础, 这些内容虽然不应全部包含在无限维空间测度和积分理论的范围内, 但和它有密切联系. 二、关于拟不变测度的抽象调和分析 (第三、四章), 其中除几个定理外, 较多是著者及同事和研究生的成果. 这种调和分析可能为进一步研究无限维空间上测度和积分问题提供工具. 因为无限维空间 (非局部紧群) 上不存在平移不变测度, Segal, I.E. 和 Gel'fand, I.M. 等人提出了拟不变测度的概念并开始这方面的研究. 三、量子场论中的数学问题之一: Bose–Einstein 场交换关系的表示 (第六章), 其中也包含前两部分的应用. 另外, 作为无限维空间测度论中重要例子的 Gauss 测度也列为一章 (第五章).

本书的初版是在一年时间内, 著者从事教学, 研究, 教学行政工作的同时, 又要参加小四清、下厂、下乡的情况下抽空写成的. 当时中山大学郑曾同教授审读了部分手稿, 提出了一些宝贵意见. 复旦大学数学系函数论教研组泛函分析小组的教师和研究生, 特别是严绍宗, 也对本书提出过宝贵意见. 当时虽然著者感到立即出版会有许多不妥之处, 但预感到如不付梓, 也许就不能出版了. 初版出版后, 当时在香港中文大学执教的 Elmer J.Brody 曾对本书提出长达几十页的一些问题. 但收到他的

信时已是“文革”初期. 著者当时对海外来信不但不敢回, 而且未及详阅就立即销毁以防受累. 后来他将初版译成英文在美国 Academic Press 于 1972 年出版, 并加了许多译者注. 这次再版就吸收了其中的某些意见.

上世纪 70 年代, 在国外出版了无限维空间上测度和积分论方面的另一些专著, 如 Schwartz[1], Skorokhod[1], Watanabe[1]. 但都是在与本书不同方向上的发展. 据著者所知, 欧美一些学术著作中引用着本书, 而且据说有些导师指定本书, 作为他们的研究生的必读材料. 因此著者再版本书, 并作了必要的修改. 是为序.

夏道行
(Vanderbilt 大学)
2008 年 6 月 于上海寓所

初 版 序

无限维空间上测度和积分的研究起源于随机过程理论, 特别是 Wiener 过程的理论. 近年来, 关于特征泛函, 极限定理, 样本空间, 广义随机过程的研究都和它有密切的联系. 更值得注意的是, 最近十多年来在许多学科, 如量子力学, 量子场论, 统计物理学, 不可逆热力学, 相对论, 湍流理论, 反应堆计算, 编码问题等中都出现了无限维空间上的积分问题. 然而在这些领域中, 无限维空间上积分的进一步应用却遇到了许多深刻的困难, 也缺乏处理的方法. 看来似乎值得对这个新的课题作进一步的研究.

过去国内外都还没有书籍介绍这方面的成果. 据笔者所知, 只有 Friedrichs, K.O. 在 1957 年左右写过一本讲义 ——《希尔伯特空间上的积分》, 但未见发行. 并且除 Wiener 积分外, 无限维空间上测度和积分的数学理论大部分是在 1956 年后才发展起来的, 由于这方面的论文牵涉的知识面较广, 初学的人感到困难较大, 因而笔者不揣寡陋, 写出这本书, 为国内同志进行与这方面有关的研究提供 "铺路石子".

在这一册中着重介绍抽象调和分析, 大体上分为三部分: 一、正泛函和算子环的表示 (第二章), 这是抽象调和分析的基础, 虽然不应全部包含在无限维空间测度和积分理论的范围内, 但和它有密切联系. 二、关于拟不变测度的抽象调和分析 (第三, 四章), 其中除几个定理外, 较多的是国内的成果. 这种调和分析可能为进一步研究无限维空间上测度和积分问题提供工具. 三、量子场论中的数学问题之一: Bose–Einstein 场交换关系的表示 (第六章), 其中也包含前面两部分的应用. 另外, 作为无限维空间测度论中重要例子的 Gauss 测度也列为一章 (第五章).

有关在无限维空间积分问题的应用中大量出现的所谓 "连续积分" 问题, 积分与泛函变分方程的联系以及其他应用等, 准备放在下册中讨论.

我们假设读者已经熟习 Halmos《测度论》一书, 或已具备相当于该书的知识,

以及泛函分析的基本知识，如一般常见的泛函分析书中的内容. 还希望读者对拓扑空间，拓扑群，线性拓扑空间的基本概念已有一些了解，例如可查阅关肇直《拓扑空间概论》一书，本书的第一章及附录 I, II 也提供了一些补充的预备知识.

由于笔者水平及表达能力的限制，加以写成本书的时间较短，缺点一定很多，谬误之处亦属难免，希望读者不吝指正.

本书承中山大学郑曾同教授审读了部分手稿，提出了一些宝贵的意见. 复旦大学数学系函数论教研组泛函分析小组的教师和研究生，特别是严绍宗同志，也对本书提出过一些宝贵的意见. 在此一并致谢.

夏道行
1964 年 11 月 于上海，复旦大学

目　　录

第一章　测度论的某些补充知识

本书中所用到的测度论的一些概念和知识大多采自 Halmos 著《测度论》一书，此后在本书中将直接引用而不加以说明. 在第一章中介绍测度论的一些补充知识，其中有些不包括在 Halmos 书中，这些知识也是后面各章的基础.

本书中有时要讨论不是全 σ–有限的测度. 然而一般的非全 σ–有限的测度性质不很好，例如 Radon–Nikodym 定理就不成立，因此我们在 §1.2 考察可局部化测度，它不一定是全 σ–有限的，但保留了全 σ–有限测度的某些性质. 而且群上常用的测度是可局部化的，因而可局部化测度也是够广泛的一类测度. 关于可局部化测度比较深入的性质留到 §2.4 中介绍.

在 §1.3 中我们将介绍 Kolmogorov 定理. 这是由有限维空间测度构造无限维空间测度的一个基本定理，这里写出比较一般的形式，它和局部凸线性拓扑空间投影极限概念有一定联系，因而可以用来作为从 Banach 空间上测度构造局部凸线性拓扑空间上测度的一个工具.

在 §1.4 中介绍 Kakutani 内积，它不仅是研究乘积空间测度等价性的一个量，而且是研究拟不变测度的一个重要的量.

§1.1　测度论中某些概念

1° 测度的一种扩张，测度的限制

本书中把 Halmos[1] 中关于可测集的概念作一些推广.

定义 1.1.1　设 $(G, \mathfrak{B})$ 是可测空间. 设 $A \subset G$，且对每个 $B \in \mathfrak{B}$，$A \cap B \in \mathfrak{B}$，则称 A 是关于 $(G, \mathfrak{B})$ 的可测集. 记这种可测集全体为 $\widetilde{\mathfrak{B}}$.

显然 $\mathfrak{B} \subset \widetilde{\mathfrak{B}}$, 而且 $\widetilde{\mathfrak{B}}$ 是 G 上的 σ–代数. 若 $\mathfrak{B}$ 是代数, 则 $\mathfrak{B} = \widetilde{\mathfrak{B}}$.

设 f 是 G 上实 (复) 函数. 如果对于实数直线 (复平面) 上每个 Borel 集 A, 集 $\{g|f(g) \in A\} \in \widetilde{\mathfrak{B}}$, 那么称 f 是 $(G, \mathfrak{B})$ 上的可测函数.

定义 1.1.2 设 $(G, \mathfrak{B}, \mu)$ 是测度空间. 作 $(G, \widetilde{\mathfrak{B}})$ 上的集函数 $\tilde{\mu}$ 如下: 当 $A \in \widetilde{\mathfrak{B}}$ 时,

$$\tilde{\mu}(A) = \sup_{B \in \mathfrak{B}} \mu(A \cap B).$$

称 $\tilde{\mu}$ 为测度 μ 的扩张.

容易证明, 当 $A \in \mathfrak{B}$ 时, $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$. 因此以后仍记 $\tilde{\mu}$ 为 μ, 这不致发生混淆. 今后对于任何测度空间 $(G, \mathfrak{B}, \mu)$, 当必要时, 总是把它延拓成 $(G, \widetilde{\mathfrak{B}}, \mu)$.

再将 $(G, \widetilde{\mathfrak{B}}, \mu)$ 扩张成完备的测度空间 $(G, \mathfrak{B}^*, \mu^*)$, 若 f 关于 $(G, \mathfrak{B}^*)$ 为可测的, 则称 f 是 $(G, \mathfrak{B}, \mu)$ 上的可测函数.

当 $B \in \widetilde{\mathfrak{B}}$, 且 $\mu(B) = 0$ 时称 B 为 μ–零集, 简称零集.

定义 1.1.3 设 $(G, \mathfrak{B}, \mu)$ 是测度空间, $A \subset G$, 令

$$\mathfrak{B}_A = \{E \cap A | E \in \mathfrak{B}\},$$

称它是 $\mathfrak{B}$ 在 A 上的限制.

若有 $C \in \mathfrak{B}$ 使 $C \diagdown A$ 的内测度

$$\mu_*(C \diagdown A) = 0, \tag{1.1.1}$$

作 $\mathfrak{B}_A$ 上的集函数 μ_A 如下: 当 $E \in \mathfrak{B}$ 时,

$$\mu_A(A \cap E) = \mu(E \cap C). \tag{1.1.2}$$

称 μ_A 为测度 μ 在 A 上的限制, 这个 μ_A 和 C 有关.

引理 1.1.1[①] 设 $(G, \mathfrak{B}, \mu)$ 是测度空间, A 是 G 的子集适合条件 (1.1.1), 则 μ 在 A 上的限制 μ_A 有确定的意义, 而且 $(A, \mathfrak{B}_A, \mu_A)$ 也是测度空间.

证 这个引理中要证明的只是 μ_A 的意义的确定性, 其余的部分是显然的.

设 $E, F \in \mathfrak{B}$, 而且 $A \cap E = A \cap F$, 要证明 μ_A 的确定性也就是要证明

$$\mu(E \cap C) = \mu(F \cap C). \tag{1.1.3}$$

不妨设 $E \subset F$, 不然的话, 换 F 为 $E \cup F$ 即可. 那么由 $A \cap E = A \cap F, E \subset F$ 立即可知

$$A \cap (F \diagdown E) = 0,$$

①参看 Halmos[1].

即 $C\setminus A\supset(C\cap F)\setminus(C\cap E)$, 但 $\mu_*(C\setminus A)=0$, 因此 $\mu((F\cap C)\setminus(E\cap C))=0$, 这就是 (1.1.3). 证毕.

2° 函数空间 $\mathfrak{L}_k^2(\Omega)$

我们后面要用到取值于 Hilbert 空间中的向量的抽象函数的空间. 先引进如下的概念.

定义 1.1.4 设 H 是 Hilbert 空间, $\Omega=(G,\mathfrak{B},\mu)$ 是一测度空间, 又设 f 是 Ω 上的抽象函数, (i) 对每个 $g\in G, f(g)\in H$, (ii) 对每个 $u\in H$, 数值函数 $(f(g),u)$, $g\in G$ 是 Ω 上可测函数, (iii) 值域 $\{f(g)|g\in G\}$ 包含在 H 的一个可析子空间中. 那么称 f 是可测函数, 这种函数全体记成 $M(H,\Omega)$.

容易看出, $M(H,\Omega)$ 按函数加法及数与函数的乘法成为线性空间.

引理 1.1.2 设 $\{e_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 是 Hilbert 空间 H 上完备就范直交系, 则 $f\in M(H,\Omega)$ 的充分必要条件是存在一列 $\{\lambda_n\}\subset\Lambda$ 以及 Ω 上一列可测函数 f_{λ_n}, 使

$$f(g)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{\lambda_n}(g)e_{\lambda_n}. \tag{1.1.4}$$

证 设 f 满足引理 1.1.2 的条件, 则 f 的值域包含在 $\{e_{\lambda_n},n=1,2,\cdots\}$ 张成的可析空间之中, 而且 $(f(g),u)=\sum f_{\lambda_n}(g)(e_k,u)$ 是可测的. 反之, 若 f 是可测的, 设 M 是包含 f 的值域的可析线性闭子空间, 设 $\{\varphi_k\}$ 是 M 的完备就范直交系, 对每个 k 必有一列 $\{\lambda_n^{(k)}\}\subset\Lambda$, 使得

$$\varphi_k=\sum(\varphi_k,e_{\lambda_n^{(k)}})e_{\lambda_n^{(k)}},$$

因此 f 的值域含在 $\{e_{\lambda_n^{(k)}},k,n=1,2,\cdots\}$ 张成的可析线性闭子空间中. 由于 $(f,e_{\lambda_n^{(k)}})$ 是 Ω 上的可测函数, 而且

$$f(g)=\sum_{n,k=1}^{\infty}(f,e_{\lambda_n^{(k)}})e_{\lambda_n^{(k)}},$$

所以满足引理中条件. 证毕.

系 1.1.3 若 $\varphi,f\in M(H,\Omega)$, 则 $(f(g),\varphi(g))$ 是 Ω 上可测函数. 特别, $\|f(g)\|^2$ 是 Ω 上可测函数.

证 利用引理 1.1.2, 有 $\{e_{\lambda_n}\}$ 使 (1.1.4) 成立, 因此

$$(f(g),\varphi(g))=\sum(f(g),e_{\lambda_n})\overline{(\varphi(g),e_{\lambda_n})},$$

立即知道 $(f(g),\varphi(g))$ 是可测函数. 证毕.

定义 1.1.5 设 H 是 Hilbert 空间, $\Omega=(G,\mathfrak{B},\mu)$ 是测度空间, 令 $\mathfrak{L}^2(H,\Omega)$ 为 $M(H,\Omega)$ 中满足条件

$$\int_G \|f(g)\|^2 d\mu(g)<\infty \tag{1.1.5}$$

的函数全体, 按内积

$$(f,\varphi)=\int_G (f(g),\varphi(g))d\mu(g) \tag{1.1.6}$$

所成的内积空间①.

记 $L_2(\Omega)$ (或 $L^2(\Omega)$) 为通常的可测平方可积函数空间.

定理 1.1.4 设 $\{e_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 是 H 中完备就范直交系, $H_\lambda=\{f(g)e_\lambda|f\in L^2(\Omega)\}$. 那么

$$\mathfrak{L}^2(H,\Omega)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\oplus H_\lambda. \tag{1.1.7}$$

证 设 $f\in\mathfrak{L}^2(H,\Omega)$. 由引理 1.1.2, 有一列 $\{\lambda_n\}\subset\Lambda$ 使 (1.1.4) 成立. 又因为 $|f_{\lambda_k}(g)|\leqslant\|f(g)\|$, 所以 $f_{\lambda_k}\in L^2(\Omega)$, 即 $f_{\lambda_k}(g)e_{\lambda_k}\in H_{\lambda_k}$. 因此 $f\in\sum\limits_{k=1}^{\infty}\oplus H_{\lambda_k}$. 也就是说 f 落在 (1.1.7) 右边. 证毕.

我们再留意, 若 $f_{\lambda_k}(\cdot)e_{\lambda_k}\in H_{\lambda_k}, k=1,2,\cdots$, 而且

$$\sum\|f_{\lambda_k}(\cdot)e_{\lambda_k}\|^2<\infty,$$

那么按 (1.1.4) 作 $f\in M(H,\Omega)$, 这时

$$\int_\Omega\|f(g)\|^2d\mu(g)=\sum\int_\Omega|f_{\lambda_k}(g)|^2d\mu(g)=\sum\|f_{\lambda_k}(\cdot)e_{\lambda_k}\|^2<\infty.$$

因此 $f\in\mathfrak{L}^2(H,\Omega)$. 由此易证

系 1.1.5 $\mathfrak{L}^2(H,\Omega)$ 是 Hilbert 空间.

我们可以看出 $\mathfrak{L}^2(H,\Omega)$ 与 H 的具体形式关系不大, 重要的是 H 的维数 —— 即 H 中完备就范直交系的势. 若 H 是 k 维的, 则改记 H 为 H_k, 改记 $\mathfrak{L}^2(H,\Omega)$ 为 $\mathfrak{L}^2_k(\Omega)$. 特别当 $k=1$ 时, H_1 可视为实数直线 (或复数平面), 这时 $\mathfrak{L}^2_1(\Omega)$ 就是 $L^2(\Omega)$.

一般, 我们令 $L^p(\Omega)$(或 $L_p(\Omega)$), $p\geqslant 1$, 表示 Ω 上 p 方可积的可测函数全体按通常的线性运算及范数

$$\|f\|_p=\left(\int_G|f(x)|^pd\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

① 由系 1:1.3, $(f(g),\varphi(g)), g\in G$, 确是 Ω 上可测函数. 又由于条件 (1.1.5), $\int_G\|f(g)\|\|\varphi(g)\|d\mu(g)<\infty$, 则 $\int_G|(f(g),\varphi(g))|d\mu(g)\leqslant\int_G\|f(g)\|\|\varphi(g)\|d\mu(g)<\infty$, 即 (f,φ) 有确定意义. 容易验证, (f,φ) 确是 $\mathfrak{L}^2(H,\Omega)$ 上内积.

所成的 Banach 空间. 又令 $L_\infty(\Omega)$(或 $L^\infty(\Omega)$) 表示 Ω 上本性有界可测函数全体按通常运算及范数

$$\|f\|_\infty = \inf_{\mu(E)=0} \sup_{x\in G\setminus E} |f(x)|$$

所成的 Banach 空间.

3° 决定集

定义 1.1.6 设 $(G,\mathfrak{B})$ 是一可测空间, $\mathfrak{B}$ 是 σ–代数, 又设 $\mathfrak{D}$ 是 $(G,\mathfrak{B})$ 上一族可测函数, 而且不存在任何子 σ–代数 $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1 \neq \mathfrak{B}$, 使 $\mathfrak{D}$ 成为 $(G_1,\mathfrak{B}_1)$ 上的可测函数族. 那么称 $\mathfrak{D}$ 是 $(G,\mathfrak{B})$ 上的决定 (函数) 集, 称 $\mathfrak{B}$ 是由 $\mathfrak{D}$ 决定的 G 上 σ–代数.

容易知道, 设 G 为一集, $\mathfrak{D}$ 是 G 上的一族函数, 那么唯一地存在着由 $\mathfrak{D}$ 决定的 σ–代数 $\mathfrak{B}$. 事实上, 只要令 $\mathfrak{B}$ 是包含形如

$$\{g|f(g)\in C, g\in G\}, \quad f\in\mathfrak{D}$$

(C 是 Borel 集) 的一切集的最小 σ–代数就可以了.

定义 1.1.7 设 $\Omega=(G,\mathfrak{B},\mu)$ 是一测度空间, $\mathfrak{D}$ 是 Ω 上的一族可测函数, 如果对于 Ω 的任一 σ–有限集 A, 当记 $\mathfrak{B}_A$ 是由 $\mathfrak{D}$ 决定的 A 上的 σ–代数时, Ω 的每个含在 A 中的可测子集必和 $\mathfrak{B}_A$ 中某一集相差一 μ–零集, 那么称 $\mathfrak{D}$ 是 Ω 上的决定 (函数) 集.

显然, 若 $\mathfrak{D}$ 是 $(G,\mathfrak{B})$ 上决定集, 则 $\mathfrak{D}$ 必是 $(G,\mathfrak{B},\mu)$ 上的决定集.

引理 1.1.6 设 $\mathfrak{D}$ 是测度空间 Ω 上的一族有界可测函数, 而且 $\mathfrak{D}$ 按通常的运算成为含单位元 1 的代数, 同时 $\mathfrak{D}$ 又是 Ω 上的决定集.

任取 $\rho\in L^1(\Omega), \rho\geqslant 0$, 令 $L^2(\Omega,\rho)$ 是 Ω 上适合条件

$$\|f\| = \left(\int_G |f(g)|^2\rho(g)d\mu(g)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

的可测函数 f 全体按范数 $\|f\|$ 所成的赋范空间, 那么 $\mathfrak{D}$ 是在 $L^2(\Omega,\rho)$ 中稠密的.

证 令 $\mathfrak{S}$ 是形如

$$\prod_{j=1}^{n}\{x|f_j(x)\in(a_j,b_j]\}^{①}, \quad f_j\in\mathfrak{D} \tag{1.1.8}$$

的集全体,$\mathfrak{F}$ 是 $\mathfrak{S}$ 中有限个集的和集全体所成的集族, 那么 $\mathfrak{F}$ 是代数. 事实上, $G\in\mathfrak{F}$ 是显然的.$\mathfrak{F}$ 中的任意有限个集的和集或通集也显然属于 $\mathfrak{F}$. 只要证明 $\mathfrak{F}$ 中集的余集

①这里 $a_j < b_j$. 而当 $b_j=\infty$ 时, $(a_j,b_j]$ 表示大于 a_j 的实数全体.

属于 $\mathfrak{F}$, 就知道 $\mathfrak{F}$ 是代数. 容易看出, 只要证明 $\mathfrak{G}$ 中集的余集属于 $\mathfrak{F}$ 即可, 而这一点可由下式立即得到:

$$G\diagdown\bigcap_{j=1}^{n}\{x|f_j(x)\in(a_j,b_j]\}$$
$$=\bigcup_{j=1}^{n}\{x|f_j(x)\in(-\infty,a_j]\}\bigcup_{j=1}^{n}\{x|f_j(x)\in(b_j,\infty)\},$$

因此 $\mathfrak{F}$ 是代数.

令 $\mathfrak{D}^{\circ}$ 是 $\mathfrak{D}$ 在 $L^2(\Omega,\rho)$ 中的包, 那么由于 $\mathfrak{D}$ 是线性的, $\mathfrak{D}^{\circ}$ 是线性闭子空间. 现在来证明对一切 $E\in\mathfrak{F}$, E 的特征函数 $C_E\in\mathfrak{D}^{\circ}$. 设 $f_1,\cdots,f_n\in\mathfrak{D}$, 那么必有正数 ξ 使得对一切 $g\in G, |f_j(g)|\leqslant\xi, j=1,2,\cdots,n$. 作区间 $[-\xi,\xi]$ 上的函数

$$\psi_j(x)=\begin{cases}1, & x\in(a_j,b_j]\cap[-\xi,\xi],\\ 0, & x\in[-\xi,\xi]\diagdown(a_j,b_j].\end{cases}$$

容易证明, 存在多项式序列 $\{p_{mj}; j=1,\cdots,n; m=1,2,\cdots\}$, 使得

$$\max_{|x|\leqslant\xi}|p_{mj}(x)|\leqslant 2, \tag{1.1.9}$$

而且, 对每个 j, 当 $x\in[-\xi,\xi]$ 时,

$$\lim_{m\to\infty}p_{mj}(x)=\psi_j(x). \tag{1.1.10}$$

若记 (1.1.8) 中的集为 E, 那么由 (1.1.10) 容易看出

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{j=1}^{n}p_{mj}(f_j(g))=\prod_{j=1}^{n}\psi_j(f_j(g))=C_E(g). \tag{1.1.11}$$

因为 $\mathfrak{D}$ 是具有单位元 1 的代数, 因此 $\varphi_m(g)=\prod\limits_{j=1}^{n}p_{mj}(f_j(g))\in\mathfrak{D}$. 由 (1.1.9), $|\varphi_m(g)|\leqslant 2^n$. 再根据 Lebesgue 控制收敛定理, 得到

$$\lim_{m\to\infty}\|\varphi_m-C_E\|=0.$$

因此, 当 $E\in\mathfrak{G}$ 时 $C_E\in\mathfrak{D}^{\circ}$. 若 $E_1,E_2\in\mathfrak{G}$, 则 $E_1\cap E_2\in\mathfrak{G}$. 又由

$$C_{E_1\cup E_2}=C_{E_1}+C_{E_2}-C_{E_1\cap E_2}$$

和 $\mathfrak{D}^{\circ}$ 的线性, 得知 $C_{E_1\cup E_2}\in\mathfrak{G}$. 因此对一切 $E\in\mathfrak{F}, C_E\in\mathfrak{D}^{\circ}$.

若 $\mathfrak{D}^{\circ}\neq L^2(\Omega,\rho)$, 必有非零的向量 $\varphi\in L^2(\Omega,\rho)$, 使得 $\varphi\perp\mathfrak{D}^{\circ}$. 因此对一切 $E\in\mathfrak{F}$,

$$\int_E\bar{\varphi}\rho d\mu=\int C_E\bar{\varphi}\rho d\mu=0. \tag{1.1.12}$$

利用积分的可列可加性得知, 对于包含 $\mathfrak{F}$ 的最小 σ–代数 $\mathfrak{F}_1$ 中的集 E, (1.1.12) 也成立. 令 $A=\{g|\rho(g)>0\}$, 那么 A 是 Ω 的 σ–有限集. 由 $\mathfrak{D}$ 的决定性, 对于 A 的每个可测子集 F, 必有 $E\in\mathfrak{F}_1$, 使 $E\cap A$ 与 F 只差一 μ–零集. 因此由 (1.1.12) 得到

$$\int_F\bar{\varphi}\rho d\mu=\int_{E\cap A}\bar{\varphi}\rho d\mu=\int_E\bar{\varphi}\rho d\mu=0.$$

所以对几乎一切 $g\in A,\varphi(g)=0$. 这就是说, φ 为 $L^2(\Omega,\rho)$ 中的零向量, 这是矛盾, 因此 $\mathfrak{D}^\circ=L^2(\Omega,\rho)$. 证毕.

4° 乘积空间上的测度

我们注意, 虽然 Halmos[1] 中只考察过可列个测度空间的乘积, 事实上那些处理方法也可用来定义任意个测度空间的乘积, 这里不准备详细叙述. 今后记测度空间族 $\{\Omega_\alpha=(G_\alpha,\mathfrak{B}_\alpha,\mu_\alpha),\alpha\in\mathfrak{A}\}$ 的乘积空间为 $\bigtimes_{\alpha\in\mathfrak{A}}\Omega_\alpha$ 或 $(\bigtimes_{\alpha\in\mathfrak{A}}G_\alpha,\bigtimes_{\alpha\in\mathfrak{A}}\mathfrak{B}_\alpha,\bigtimes_{\alpha\in\mathfrak{A}}\mu_\alpha)$. 我们再列出下面一些明显的事实.

设 $(G,\mathfrak{B},\mu_k),k=1,2$, 是两个测度空间, $(H,\mathfrak{F},\nu_k),k=1,2$ 是另外两测度空间, 那么 $(G\times H,\mathfrak{B}\times\mathfrak{F})$ 上的测度 $\mu_1\times\nu_1$ 对于 $\mu_2\times\nu_2$ 绝对连续的充要条件是 $\mu_1\ll\mu_2,\nu_1\ll\nu_2$. 这时有

$$\frac{d\mu_1\times\nu_1(g,h)}{d\mu_2\times\nu_2(g,h)}=\frac{d\mu_1(g)}{d\mu_2(g)}\frac{d\nu_1(h)}{d\nu_2(h)}. \tag{1.1.13}$$

设 $\{\Omega_n=(G_n,\mathfrak{B}_n,\mu_n),n=1,2,\cdots\}$ 是一列概率测度空间,$\Omega=(G,\mathfrak{B},\mu)=\bigtimes_{n=1}^{\infty}\Omega_n$. 记 $\Omega^{(n)}=\bigtimes_{\nu=1}^{n}\Omega_\nu=(G^{(n)},\mathfrak{B}^{(n)},\mu^{(n)})$. 对于每个 $f\in L^2(\Omega^{(n)})$, 作 Ω 上的函数 $g\to f(g^{(n)})$, 这里 $g=\{g_1,g_2,\cdots,g_n,\cdots\}\in G$ 而 $g^{(n)}=\{g_1,\cdots,g_n\}\in G^{(n)}$. 显然这个函数属于 $L^2(\Omega)$. 这样把 $L^2(\Omega^{(n)})$ 嵌入 $L^2(\Omega)$ 成为 $L^2(\Omega)$ 的闭线性子空间. 令 P_n 是$L^2(\Omega)$ 到 $L^2(\Omega^{(n)})$ 的投影算子. 今证

引理 1.1.7 $\{P_n\}$ 强收敛于恒等算子 I.

证 显然有 $P_1\leqslant P_2\leqslant\cdots\leqslant P_n\leqslant\cdots$, 我们只要证明 $Q=\bigcup_{n=1}^{\infty}L^2(\Omega^{(n)})$ 在 $L^2(\Omega)$ 中稠密就可以了. 令 $\mathfrak{D}$ 是 Q 中有界可测函数全体, 显然 $\mathfrak{D}$ 是含有单位元 1 的代数. 然而对任何 n 及 n 维空间的 Borel 集 E,

$$\widetilde{E}=\{g|g=\{g_1,g_2,\cdots\}\in G,\{g_1,\cdots,g_n\}\in E\}$$

的特征函数 $C_{\widetilde{E}}\in L^2(\Omega^{(n)})$. 因此 $C_{\widetilde{E}}\in\mathfrak{D}$. 又形如 $\widetilde{E}$ 的集全体张成 $\mathfrak{B}$. 因此 $\mathfrak{D}$ 是 Ω 的决定集. 根据引理 1.1.6, $\mathfrak{D}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中稠密子集. 证毕.

5° 直接和测度

定义 1.1.8 设 $\Omega_\alpha=(G_\alpha,\mathfrak{B}_\alpha,\mu_\alpha),\alpha\in\mathfrak{U}$, 是一族测度空间, 其中 $\{G_\alpha,\alpha\in\mathfrak{U}\}$

是一族互不相交的集. 记 $G=\bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{U}} G_\alpha$. 令 $\mathfrak{B}$ 是下面形式的集:

$$A=\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_{\alpha_\nu},\quad A_{\alpha_\nu}\in\mathfrak{B}_{\alpha_\nu},\quad \{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\cdots\}\subset\mathfrak{U} \tag{1.1.14}$$

的全体. μ 是 $(G,\mathfrak{B})$ 上的如下的集函数: 当 A 形如 (1.1.14) 时,

$$\mu(A)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu_{\alpha_\nu}(A_{\alpha_\nu}).$$

那么称 $\Omega=(G,\mathfrak{B},\mu)$ 为测度空间 $\{\Omega_\alpha,\alpha\in\mathfrak{U}\}$ 的直接和. 又当 $\mu_\alpha(G_\alpha)<\infty,\alpha\in\mathfrak{U}$ 时, 我们称 $\{G_\alpha,\alpha\in\mathfrak{U}\}$ 是 Ω 的一个剖分.

显然, 定义 1.1.8 中的 Ω 确是测度空间.

引理 1.1.8 设 $\Omega=(G,\mathfrak{B},\mu)$ 是一族测度空间 $\{(G_\alpha,\mathfrak{B}_\alpha,\mu_\alpha),\alpha\in\mathfrak{U}\}$ 的直接和. 那么 $B\in\widetilde{\mathfrak{B}}$ 的充要条件是对每个 $\alpha\in\mathfrak{U}$,

$$B\cap G_\alpha\in\widetilde{\mathfrak{B}}_\alpha, \tag{1.1.15}$$

而且这时

$$\mu(B)=\sum_{\alpha\in\mathfrak{U}}\mu_\alpha(B\cap G_\alpha). \tag{1.1.16}$$

证 若 B 满足条件 (1.1.15), 对形如 (1.1.14) 的 A, 显然

$$A\cap B=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}(A_{\alpha_\nu}\cap B).$$

因为 (1.1.15), $A_{\alpha_\nu}\cap B\in\mathfrak{B}_{\alpha_\nu}\subset\mathfrak{B}$. 因此 $B\in\widetilde{\mathfrak{B}}$. 反之, $B\in\widetilde{\mathfrak{B}}, A_\alpha\in\mathfrak{B}_\alpha$, 则有

$$(B\cap G_\alpha)\cap A_\alpha=B\cap A_\alpha\in\mathfrak{B},$$

然而 $B\cap A_\alpha\subset G_\alpha$, 因此 $B\cap A_\alpha\in\mathfrak{B}_\alpha$, 即得 (1.1.15).

再来证明 (1.1.15). 设 $A\in\mathfrak{B}$ 形如 (1.1.14), 则

$$\mu(B\cap A)=\sum\mu_{\alpha_i}(B\cap A_{\alpha_i})\leqslant\sum\mu_\alpha(B\cap G_\alpha),$$

即得

$$\mu(B)=\sup_{A\in\mathfrak{B}}\mu(B\cap A)\leqslant\sum\mu_\alpha(B\cap G_\alpha). \tag{1.1.17}$$

若 (1.1.17) 的右边是有限数, 则 $\mu_\alpha(G_\alpha\cap B)>0$ 的 α 最多只有可列个, 记为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\cdots$, 因此

$$\sum_{\alpha}\mu_\alpha(G_\alpha\cap B)=\sum\mu_{\alpha_i}(G_{\alpha_i}\cap B). \tag{1.1.18}$$