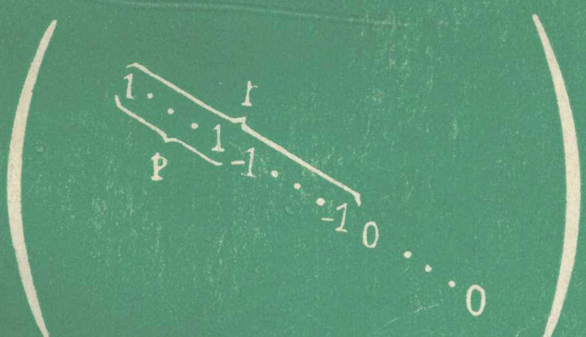
线性代数
学习方法指导

刘有炳　丁玉良　编



西北工业大学出版社

线性代数
学习方法指导

刘有炳　丁玉良　编

西北工业大学出版社
1989年5月　西安

内容简介

本书是为工科大学教材《线性代数》(刘有炳编，西北工业大学出版社出版)编写的配套参考书。全书由矩阵、线性方程组、行列式、特征值和特征向量、二次型五章组成，每章分别讲述基本要求、内容提要与内容分析、例题分析、习题选解、补充练习题解和自我测试题六个方面的内容。可作为工科大学本科生及函授生的辅导教材或参考书。

线性代数学习方法指导

编　　者　刘有炳　丁玉良

责任编辑　唐　莽　刘彦信

责任校对　丁玉良

*

西北工业大学出版社出版发行

(西安市友谊西路 127 号)

新华书店经销

西安电子科技大学印刷厂印装

ISBN7-5612-0195-8/O·19

*

开本 787×1092 毫米　1/32　5.5 印张　112 千字

1989 年5月第 1 版　1989 年 5 月第 1 次印刷

印数 1—5 000 册　　定价：1.90 元

前　　言

“线性代数”是工科大学的一门基础课，是以讨论有限维空间线性理论为主的课程，具有较强的逻辑性与抽象性。由于线性问题广泛存在于科学技术的各个领域，某些非线性问题在一定条件下可以转化为线性问题，尤其在计算机日益普及的今天，解大型线性方程组、求矩阵的特征值与特征向量等已经成为工程技术人员经常遇到的课题，因此“线性代数”所介绍的方法广泛地应用于各个学科。这就要求学生必须具备有关本课程的基本理论知识，并熟练地掌握它的方法。

本书分基本要求、内容提要与内容分析、例题分析、习题选解、补充练习题解、自我测试题六个部分。对“线性代数”课程的主要知识的前后连贯性、内在联系以及怎样理解概念、掌握解题的基本方法进行了较全面的介绍；剖析了各种典型题目的解法，并对某些题目作了一题多解，借以开阔读者的思路。

本书主要为工科大学生及函授生学习《线性代数》（刘有炳编，西北工业大学出版社出版）一书时，提供辅导。也可供工程技术人员参考。

由于编者水平有限，书中错误在所难免，请读者批评指正。

编　者

1988 年 3 月

目　　录

第一章　矩阵……………………………………………………1
一、基本要求 ……………………………………………………1
二、内容提要与内容分析 ………………………………………1
三、例题分析……………………………………………………10
四、习题选解……………………………………………………19
五、补充练习题解………………………………………………25
六、自我测试题…………………………………………………32
第二章　线性方程组理论………………………………………35
一、基本要求……………………………………………………35
二、内容提要与内容分析………………………………………35
三、例题分析……………………………………………………45
四、习题选解……………………………………………………54
五、补充练习题解………………………………………………60
六、自我测试题…………………………………………………67
第三章　行列式…………………………………………………69
一、基本要求……………………………………………………69
二、内容提要与内容分析………………………………………69
三、例题分析……………………………………………………74
四、习题选解……………………………………………………85

五、补充练习题解……………………………………92
六、自我测试题………………………………………98

第四章　特征值和特征向量……………………………100

一、基本要求…………………………………………100
二、内容提要与内容分析……………………………100
三、例题分析…………………………………………103
四、习题选解…………………………………………110
五、补充练习题解……………………………………116
六、自我测试题………………………………………123

第五章　二次型…………………………………………124

一、基本要求…………………………………………124
二、内容提要与内容分析……………………………124
三、例题分析…………………………………………128
四、习题选解…………………………………………142
五、补充练习题解……………………………………152
六、自我测试题………………………………………160

附录………………………………………………………161

自我测试题答案…………………………………161

第一章 矩 阵

一 基本要求

1. 会用消元法求解线性方程组。

2. 理解矩阵的概念，熟练掌握矩阵的线性运算、乘法运算、转置及其运算规律。

3. 掌握矩阵的初等变换。

4. 理解逆矩阵的概念，掌握矩阵求逆的方法。

5. 掌握分块矩阵的运算。

6. 掌握几种特殊矩阵的概念及其基本性质。

二 内容提要与内容分析

(一) 内容提要

1. 线性方程组

1° 线性方程组的一般形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases} \tag{1}$$

其中 a_{ij} ($i=1, 2, \cdots, s$; $j=1, 2, \cdots, n$) 是第 i 个方程中第 j 个未知量 x_j 的系数，b_i 是第 i 个方程中的常数

项。s 未必等于 n。

2° 方程组的初等变换：

（一）用一个非零常数乘某个方程。

（二）把一个方程的 k 倍加到另一个方程上。

（三）互换两个方程的位置。

3° 线性方程组经初等变换后变为同解方程组。

4° 线性方程组(1)可经过初等变换化为下列形式：

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r + c_{r\,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r \\ 0x_n = d_{r+1} \\ 0 = 0 \\ \cdots\cdots \\ 0 = 0 \end{cases}$$

讨论：i）$d_{r+1} \neq 0$ 时，方程组无解。

ii）$d_{r+1} = 0$ 时，且 $r = n$，方程组有唯一解。

iii）$d_{r+1} = 0$ 时，且 $r < n$，方程组有无穷多组解。

5° 线性方程组(1)的常数项 b_i($i = 1, 2, \cdots, s$) 全为零时，称为齐次线性方程组。

6° 若齐次线性方程组的方程个数 s 小于未知量的个数 n，则它一定有非零解。

2．矩阵及其运算

1° **定义** 由 $s \times n$ 个数 a_{ij}($i = 1, 2, \cdots, s$；$j = 1, 2, \cdots, n$)排成 s 行，n 列的表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \quad \text{记为} A_{s\times n} \text{或} (a_{ij})_{s\times n}$$

2° 矩阵运算：

(1) 加减法。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & a_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

其中 $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

满足交换律：$A + B = B + A$

结合律：$(A+B)+C = A+(B+C)$

(2) 乘法。

$$\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1r} \\ \multicolumn{3}{c}{\boxed{a_{21} \quad a_{22} \cdots a_{2r}}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mr} \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \boxed{b_{13}} & \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \boxed{b_{23}} & \cdots b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \boxed{\cdots} & \cdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \boxed{b_{r3}} & \cdots b_{rn} \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \boxed{c_{23}} & \cdots c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots c_{mn} \end{pmatrix}$$

其中 $c_{23}=[a_{21}\ a_{22}\cdots a_{2r}]\begin{bmatrix}b_{13}\\b_{23}\\\vdots\\b_{r3}\end{bmatrix}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+\cdots$

$$+a_{2r}b_{r3}=\sum_{i=1}^{r}a_{2i}b_{i3}$$

$$\therefore c_{ij}=\sum_{k=1}^{r}a_{ik}b_{kj}\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

说明：矩阵 A 的列数必须等于 B 的行数，两 矩阵才能相乘。

矩阵乘法满足结合律：$(AB)C=A(BC)$

分配律：$A(B+C)=AB+AC$

$(B+C)A=BA+CA$

（3）矩阵的数乘。

$$k\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\\cdots\cdots & \cdots\cdots\\a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12}\cdots ka_{1n}\\ka_{21} & ka_{22}\cdots ka_{2n}\\\cdots\cdots & \cdots\cdots\\ka_{m1} & ka_{m2}\cdots ka_{mn}\end{pmatrix}$$

数乘满足：① $kA=Ak$　　② $k(A+B)=kA+kB$

③ $(l+k)A=lA+kA$　④ $l(kA)=(lk)A$

⑤ $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

3° 矩阵的转置

$$A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\\cdots\cdots & \cdots\cdots\\a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21}\cdots a_{m1}\\a_{12} & a_{22}\cdots a_{m2}\\\cdots\cdots & \cdots\cdots\\a_{1n} & a_{2n}\cdots a_{mn}\end{pmatrix}$$

① $(A+B)^T=A^T+B^T$ ② $(AB)^T=B^TA^T$

③ $(kA)^T=kA^T$

4° 矩阵的分块运算

用几条纵线与横线把一个矩阵分成若干小块，每一小块称为原矩阵的子块。把一个子矩阵作为原矩阵的一个元素，就得到了分块矩阵。

特别注意，分块时要使各子块间可运算。如加减法时，使相应的同型矩阵可加减。乘法时要使 A 的列数的分法与 B 的行数分法一致。

5° 非奇异矩阵(可逆矩阵)

定义 设 $A_{n\times n}$。如果存在 $B_{n\times n}$ 使 $AB=BA=E$，则称 A 是非奇异矩阵或称 A 为可逆矩阵。

性质：① $(A^{-1})^{-1}=A$

② $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，

$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1}=A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$

③ $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

④ A^{-1} 求法：$(A\vdots E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\vdots A^{-1})$

3. 矩阵的等价

1° **定义** 如果矩阵 B 可以从矩阵 A 经过一系列初等变换得到，则称矩阵 A 与 B 等价。记为 $A\cong B$ 或 A 与 B 相抵。

2° 两个矩阵 A 和 B 等价的充要条件：

存在可逆矩阵 P 和 Q 使得 $B=PAQ$。

4. 几种特殊矩阵

1° 对角矩阵：$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$

2° 准对角矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

$A_i(i=1, 2, \cdots, s)$都是方阵。

3. 数量矩阵：

$$\begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix}=kE$$

4° 三角矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

当 $i>j$ 元素 $a_{ij}=0$ 的方阵。称为上三角矩阵。

当 $i<j$ 元素 $a_{ij}=0$ 的方阵。称为下三角矩阵。

5° 对称矩阵与反对称矩阵。

$A^T=A$ 称为对称矩阵，$A^T=-A$ 称为反对称矩阵。

6° 正交矩阵。

$AA^T=A^TA=E$ 称 A 为正交矩阵。

性质：① A 为正交矩阵$\Longleftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\delta_{ij}$

$$=\begin{cases} 1 & 当\ i=j \\ 0 & 当\ i\neq j \end{cases} \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

② 若 A 为正交矩阵，则 A^T，A^{-1} 也是正交矩阵。

③ 若 A_1, A_2 为同阶正交矩阵，则 A_1A_2 也是正交矩阵。

（二）内容分析

线性代数是在线性空间中研究线性变换的一门科学，线

性空间就是一个最基本的概念，而线性变换则是线性空间中元素间的一种最基本的联系，线性变换的数量表示是矩阵。矩阵是线性代数最重要部分，它贯穿于各个方面，因而线性代数也叫矩阵代数。而线性方程组是线性代数研究对象的具体模型。

本章教材本着由具体到抽象的原则，由研究线性方程组引出矩阵的概念，然后采用公理化的研究方法，进行推理，建立理论，进而用矩阵的理论进一步研究线性方程组的解。

1。首先介绍线性方程组的消元法。所施行的三种初等变换：i) $(i)\leftrightarrows(j)$ ii) $k\neq0$ $k(i)$ iii) $k\neq0$ $k(i)+(j)$

实质上也是矩阵的初等行变换。

线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases} \tag{1}$$

经过一系列初等变换，总可化成以下形式的同解方程组：

$$\begin{cases} x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3+\cdots+c_{1n}x_n=d_1 \\ \qquad x_2+c_{23}x_3+\cdots+c_{2n}x_{2n}=d_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad x_r+c_{rr+1}x_{r+1}+\cdots+c_{rn}x_n=d_r \\ \qquad\qquad 0x_n=d_{r+1} \\ \qquad\qquad 0=0 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad 0=0 \end{cases}$$

$$
\Longrightarrow \left[\begin{array}{cccccccc:c}
1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & & c_{1n} & d_1 \\
0 & 1 & c_{23} & \cdots & \cdots & \cdots & & c_{2n} & d_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r\,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right] \text{阶梯形矩阵}
$$

事实上消元法将方程组(1)的增广矩阵按阶梯矩阵的要求进行初等行变换，再写出其同解方程组，就能明显而简单地求出方程组(1)的解。

2。矩阵运算中要注意三点：

1° 对给定的两个矩阵 A 与 B，存在可加，不可加；可乘，不可乘问题。只有当 A 的行数与 B 的行数相等，A 的列数与 B 的列数相等时，才可以相加（减）；只有当 A 的列数等于 B 的行数时才可乘。

2° 分块矩阵的加法与乘法也存在可不可运算的问题，只有 A 的行数与 B 的行数相等，A 的列数与 B 的列数相等，同时 A 的分块方法与 B 的分块方法完全相同才可以相加（减）；只有 A 的列数等于 B 的行数，A 的列的分法与 B 的行的分法相同时，才可以相乘。

3° 在矩阵运算中，有一些数的运算规律是不成立的。

比如：$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\neq 0$，　$B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\neq 0$，但 $AB=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=0$ 又 $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\neq 0$，$A^2=AA=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=0.$$

上二式说明：A，B 都是非零矩阵，但乘积为 0 矩阵．A 为非零矩阵，但 A 的若干次幂等于零矩阵．另外矩阵乘法不满足交换律，也一般不满足消去律，即若 $AB=AC$，$A\neq 0$．未必有 $B=C$。

4° 讨论了矩阵加减乘的运算后，要问矩阵有无“除”的运算？回答是否定的。今就方阵来讨论这一问题．

对于数 a，只要 $a\neq 0$，则必存在它的倒数 $\frac{1}{a}$，且 $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$。此时，任一数 b 除以 a，可以表示为 $b\cdot\frac{1}{a}$．相仿地，要谈及方阵的“除”，首先就要问，对于方阵 A，若 $A\neq 0$ 是否存在方阵 B，使 $AB=BA=E$．回答并非是肯定的．

如 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，显然 $A\neq 0$，但任一 2 阶方阵 B，都不能使 $AB=BA=E$，这是因为 AB 的第一行第一列位置上的元素恒为 0。

而 E 的第一行第一列位置上的元素恒为 1，因此在矩阵运算中不存在“除”的问题。

3。逆矩阵的求法。

1° 初等变换法：

$$(A\,\vdots\,E)\xrightarrow{\text{有限次初等行变换}}(E\,\vdots\,A^{-1})$$

或 $$\left(\frac{A}{E}\right)\xrightarrow{\text{有限次初等列变换}}\left(\frac{E}{A^{-1}}\right)$$

此法对一些数字矩阵特别适用。

2° 行列式法（见行列式一章）

3° 降阶法(降阶法是矩阵理论中核心的思 想方法)。降阶法往往运用分块矩阵的方法来实现的。

三 例题分析

例 1 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \quad\quad + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

用矩阵表示：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

把第 1 个方程的 -3 倍、-2 倍、-1 倍分别加到第 2、3、4个方程上去. $\Longrightarrow$ 把第一行的 -3 倍、-2 倍、-1 倍分别加到第二、三、四行上去。

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ 5x_2 - x_3 - 5x_4 = 1 \\ 5x_2 - x_3 - 5x_4 = 1 \\ 5x_2 - x_3 - 5x_4 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

把第 2 个方程的 -1 倍加到第 3、4 个方程上去，然后用 -1 乘第 2 个方程得：

把第二行的 -1 倍加到第三、四行上去，然后用 -1 乘第二行得：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ -5x_2 + x_3 + 5x_4 = -1 \\ 0x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而可知利用初等变换化简线性方程组和利用矩阵的初

等行变换化简该方程组所表示的矩阵是一致的。

令 $x_2=k_1$，$x_4=k_2$ 为自由未知量。

所以方程组的解为：$\begin{cases} x_1=k_1-2k_2, & x_2=k_1 \\ x_3=-1+5k_1-5k_2, & x_4=k_2 \end{cases}$

因为方程组经消元法化简后，其中 $d_{r+1}=0$ 且 $r<n(2<4)$。所以方程组有无穷多组解。

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=3 \\ x_1+2x_2-x_3+2x_4-x_5=5 \\ x_1-x_2-x_3-x_4+2x_5=a \\ -3x_1+2x_2+3x_3+2x_4-5x_5=b \\ -x_1+3x_2+x_3+3x_4-4x_5=c \end{cases}$$

问 i）a，b，c 为何值时，方程组无解？

ii）a，b，c 为何值时，方程组有解？

iii）有解时，试求其解。

解：用初等变换化简方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & a \\ -3 & 2 & 3 & 2 & -5 & b \\ -1 & 3 & 1 & 3 & -4 & c \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 2 & a-3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & -5 & b+9 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & -4 & c+3 \end{pmatrix}$$