新课标

鼎尖教案

教材教案、教辅教案、习题教案

数学

必修4

人教A版

新课标·高中同步·鼎尖学案（个性化学案）

新课标·高中同步·鼎尖教案（通用型教案）

丛书主编：严治理　黄俊葵
马揄虎　刘芳芳

延边教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

鼎尖教案．数学．4：必修/唐益才，赵永主编．—延吉：延边教育出版社，2008.10

ISBN 978-7-5437-7377-6

Ⅰ．鼎… Ⅱ．①唐…②赵… Ⅲ．数学课—教案（教育）—高中 Ⅳ．G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 145053 号

□ 本册主编：唐益才　赵　永
□ 副 主 编：夏松甫　胡立群　陈美菊
□ 编　　著：唐恭学　廉开波　安田华　王　芳　刘国斌　石　磊
唐恭芳　彭京余　李清学　李兴国　武　岩　蒋胜博
李大健　彭玉安　亓振风
□ 责任编辑：严今石
□ 法律顾问：北京陈鹰律师事务所（010-64970501）

与 *人教A版* 普通高中课程标准实验教科书同步

《鼎尖教案》数学　必修4

出版发行：延边教育出版社
地　　址：吉林省延吉市友谊路 363 号（133000）
北京市海淀区苏州街 18 号院长远天地 4 号楼 A1 座 1003（100080）
网　　址：http://www.topedu.org
电　　话：0433-2913975　010-82608550
传　　真：0433-2913971　010-82608856
排　　版：北京鼎尖雷射图文设计有限公司
印　　刷：益利印刷有限公司印装
开　　本：890×1240　16 开本
印　　张：23
字　　数：890 千字
版　　次：2008 年 10 月第 1 版
印　　次：2008 年 10 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5437-7377-6
定　　价：46.00 元

Qianyan 前言

国家新课程改革的教学观，强调教学目标的全面性和具体化，强调学习方式、教学活动方式的多样化，强调学习的选择性。要适应新课程教学改革的要求，提倡自主、探索与合作的学习方式，使学生在教师指导下主动地、富有个性和创造性地学习，就必须坚持教学模式的多样化。

教学模式的多样化是新课程实施的重要途径，也为教学模式的多样化研究提供了有利的理论和实践环境。教学模式的多样化，要求教师必须在准确把握教学目标、教学内容、师生情况、运用条件和评价体系特点的前提下，利用和发挥自身特长、体现自身特色，采用相应的教学模式。

《鼎尖教案》系列丛书，是依托延边教育出版社多年教案出版经验和资源优势，由近百名教辅研究专家精心策划的一套教案丛书。书中的教学案例，大都是在全国范围内广泛征集的优秀作品，是全国一线特高级教师经验智慧的结晶，代表着当前教学改革方向和最高水平，堪称精品。

丛书以“教学模式多样化”为基本原则，通过科学合理的设计，克服了以往教案类产品无法解决的教学模式单一的问题，对于推进新课程改革具有很强的指导意义，是广大教师教学的参考和帮手，其主要特点如下：

○ **工具性** 突出实用性、系统性、工具性、资料性，汇集教学教案、重难点知识讲解、类题（题型）讲解、规律方法总结、知识体系构建、训练题库等内容，为教师提供融课堂教学、钻研教材、课后辅导、习题编选于一体的全息资源库。

○ **选择性** 体现教学模式多样化原则，对同一知识体系的教授和解读方式，提供两种教学形式和教学思路，展示两种解决问题的方法，搭建动态开放的资源平台。教师可根据学生特点和教学习惯自由选择组合，形成多种教学模式。

○ **系统性** 创新教案编写模式，内容包括教材教案、教辅教案、习题教案三个板块，为教师提供教学模式多样化的全方位系统解决之道，教师得到的不仅是新授课的教案，更有复习课、训练讲评等内容的教案。同时注重教师用书与学生用书的配套互补功能，同步推出配套学案，方便教师教学。

教学模式开发和应用的过程，是一个随着教育理论和教学实践不断发展的双向的动态的过程，在探索教学模式多样化的过程中，按照“学习—实践—评价—创新—构建”的思路，我们将不断探索和创新更多的教学模式。同时感谢在本书编写和教案征集中，为我们提供帮助和支持的广大教师，也希望有更多的人能够参与进来，与我们共同探索实现教学模式多样化的思路和办法。

北京世纪鼎尖教育研究中心

- 教材教案
  - 教学目标
    - 知识与技能
    - 过程与方法
    - 情感、态度与价值观
  - 重点难点
    - 重点
    - 难点
  - 案例一、二(以课时为单位)
    - 教学过程
    - 板书设计
    - 教学反思(随机设置)
- 教辅教案
  - 案例一　课时详解(以课时为单位)
    - 课堂导入
    - 课前自主学习
    - 课堂合作探究
      - 情景激疑
      - 知识点归纳
      - 典例剖析
    - 概括整合
  - 案例二　精析精练(以节为单位)
    - 课堂合作探究
      - 重点难点突破
      - 典型例题分析
    - 规律方法总结
  - 定时巩固检测
    - 基础训练
    - 能力提升
- 习题教案
  - 案例一　同步练习(以课时为单位)
  - 案例二　一课3练(以节为单位)
    - 基础巩固
    - 能力升级
    - 拓展探究
- 单元末
  - 单元概括整合
    - 单元复习课
    - 单元测试卷

体例表解

<table>
<tr><th colspan="4">主要栏目名称</th><th>栏目设计功能</th><th>栏目使用建议</th></tr>
<tr><td rowspan="8">教材教案</td><td rowspan="3">[教学目标]</td><td colspan="2">[知识与技能]</td><td rowspan="3">依据教材和课程标准，让学生了解本课时的“三维目标”</td><td rowspan="8">两套案例体现了不同的教学思路和技巧，教师可根据自己的授课模式，自主选择一种教学案例，师生互动，完成教学</td></tr>
<tr><td colspan="2">[过程与方法]</td></tr>
<tr><td colspan="2">[情感、态度与价值观]</td></tr>
<tr><td rowspan="2">[重点难点]</td><td colspan="2">[重点]</td><td rowspan="2">帮助教师、学生准确把握教材的深广度，明确本课时学习的重点、难点</td></tr>
<tr><td colspan="2">[难点]</td></tr>
<tr><td rowspan="3">案例一
案例二
（以课时为单位）</td><td colspan="2">[教学过程]</td><td>体现情景设置、师生互动等课堂教学思路，既给教师以启发，又不束缚教师的创造性</td></tr>
<tr><td colspan="2">[板书设计]</td><td>直观、清晰地呈现本课时的主要内容</td></tr>
<tr><td colspan="2">[教学反思]（机动）</td><td>对教学方法和教学过程的反思，提出改进设想</td></tr>
<tr><td rowspan="10">教辅教案</td><td rowspan="6">案例一
课时详解
（以课时为单位）</td><td colspan="2">[课堂导入]</td><td>激发学生学习兴趣，导入本课内容</td><td rowspan="2">学生课前自主完成</td></tr>
<tr><td colspan="2">[课前自主学习]</td><td>引导学生自学课本内容，培养自主学习能力</td></tr>
<tr><td rowspan="3">[课堂合作探究]</td><td>[情景激疑]</td><td>提供课堂讨论材料，学生思考归纳出知识点</td><td rowspan="7">可供教师授课，学生自主学习时使用</td></tr>
<tr><td>[知识点归纳]</td><td>通过情景激疑的讨论引出知识点内容，按知识分块讲解，各个击破</td></tr>
<tr><td>[典例剖析]</td><td>通过例题讲解、变式练习，理解、巩固知识点</td></tr>
<tr><td colspan="2">[概括整合]</td><td>将本课时主要内容总结归纳，帮助学生形成知识网络</td></tr>
<tr><td rowspan="3">案例二
精析精练
（以节为单位）</td><td rowspan="2">[课堂合作探究]</td><td>[重点难点突破]</td><td>对本节重点和难点知识进行详细全面讲解，按知识层次整体突破</td></tr>
<tr><td>[典型例题分析]</td><td>通过例题讲解、变式练习，理解、巩固知识点内容</td></tr>
<tr><td colspan="2">[规律方法总结]</td><td>将本节主要规律、方法总结归纳，帮助学生形成知识网络</td></tr>
<tr><td colspan="3">[定时巩固检测]</td><td>通过强化训练，巩固所学知识</td><td>教师可安排学生课堂集中检测和学生课后自主完成相结合</td></tr>
<tr><td rowspan="2">习题教案</td><td colspan="3">案例一　同步练习（以课时为单位）</td><td>用习题让学生对本课时所学知识进行检测</td><td rowspan="2">教师可安排学生课堂集中检测和学生课后自主完成相结合</td></tr>
<tr><td colspan="3">案例二　一课 3 练（以节为单位）</td><td>将习题划分为“基础巩固——能力升级——拓展探究”，让学生对本节所学知识分层次进行检测</td></tr>
<tr><td rowspan="2">单元末</td><td rowspan="2">[单元概括整合]</td><td colspan="2">[单元复习课]</td><td>通过例题分析导入，归纳总结知识规律或解题方法，提高解题能力</td><td>教师指导学生对本章内容进行回顾</td></tr>
<tr><td colspan="2">[单元测试卷]</td><td>以测试卷的形式对本章学习效果进行检测</td><td>教师安排学生课堂集中检测，或者学生课后自主完成</td></tr>
</table>

CONTENTS 目录

目录 CONTENTS

CONTENTS 目录

目录 CONTENTS

CONTENTS 目录

附录　个性化学案模式说明

第一章 三角函数

1.1 任意角和弧度制

1.1.1 任意角(1课时)

第一教案 **教材教案**

教学目标

☞知识与技能

理解任意角、象限角的概念.会用集合语言表示终边相同的角.

☞过程与方法

培养学生的类比思维能力,形象思维能力.

☞情感、态度与价值观

通过对任意角的概念的学习,体验角的概念扩展的必要性,促进学生对数学知识形成过程的认识.用数学知识认识世界,从而培养学生善于思考、勤于动手的良好品质.

重点 难点

☞重点

任意角的概念,用集合表示终边相同的角.

☞难点

角的概念的推广,终边相同的角之间的关系.

案例(一)

教学过程

教学环节	教学内容	教师活动	学生活动
课题引入	思考:(1)你的手表慢了5分钟,你是怎样将它校准的?当时间校准后,分针旋转了多少度? (2)假如你的手表快了1.25小时,你应当如何将它校准?当时间校准后,分针旋转了多少度?	提出问题,引发学生的认知冲突,说明角的概念扩展的必要性.板书课题.	学生通过实际动手操作作答.
角的概念的推广	我们规定,按逆时针方向旋转形成的角叫做正角,按顺时针方向旋转形成的角叫做负角.如果一条射线没有作任何旋转,我们称它形成了一个零角.角的概念推广到了任意角.	出示课本图1.1-1,让学生回忆角的定义,强调角的方向问题. 出示课本图1.1-2,让学生观察主动轮与被动轮的旋转方向有何不同. 出示课本图1.1-3.	回忆角的定义. 观察并回答,并举例说明日常生活中确实还会遇到“0°～360°”之外的其他类型的角. 进一步认识正角、负角,并举例.
象限角的概念	使角的顶点与原点重合,角的始边与x轴的非负半轴重合.那么,角的终边在第几象限,我们就说这个角是第几象限角.	你能说说在直角坐标系内讨论角的好处吗? 如果把角放在直角坐标系中,那么怎样放比较方便、合理?	画图探究、讨论、交流,总结分析合理放法. 充分直观感受象限角的概念,加深对象限角的理解.观察课本图1.1-4.
终边相同的角	所有与角α终边相同的角,连同角α在内,可构成一个集合$S=\{\beta\mid\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$,即任一与角$\alpha$终边相同的角,都可以表示成角$\alpha$与整数个周角的和.	探究:将角按照上述方法放在直角坐标系中后,给定一个角,就有唯一的一条终边与之对应.反之,对于直角坐标系内任意一条射线OB(出示课本图1.1-5),以它为终边的角是否唯一?如果不唯一,那么终边相同的角有什么关系?	画图,观察探究与$-32°$终边相同的所有角与$-32°$角之间的关系.并用“符号语言”和“文字语言”分别表述.

续表

教学环节	教学内容	教师活动	学生活动
进一步理解任意角、象限角、终边相同角的概念	课本例1,例2,例3. 教材第5页练习.	分析、板书例1,该例解决方法不唯一,另解:写出与角$-950°12'$终边相同的所有角$\alpha=-950°12'+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}$.求出$k$的一个值,使$\alpha\in(0°,360°)$. 对于例2,教师给出指导:两个集合合并的关键是把$270°$改写成$90°+180°$,然后重新组合,即把$180°+k\cdot 360°$看成一项,得到$(2k+1)\cdot 180°$. 师生共同分析完成例3.	自主完成教材第5页练习第1~4题.交流答案. 自学例2. 课本第5页练习第5题,学生回答.
归纳小结	1.本节课主要学习了任意角,象限角,终边相同的角的表示方法. 2.学习了数形结合思想和等价转化思想.	对学生的回答及时给出评价,好的给予表扬.	回答,讨论,交流,补充.
布置作业	课本习题1.1A组第1~3题.		

板书设计

一、课题引入 二、新知 1.角的概念的推广 2.象限角的概念 3.终边相同的角	三、进一步理解任意角、象限角、终边相同角的概念 例1 例2 学生板演	例3 练习 四、归纳小结 五、布置作业

案例(二)

教学过程

一、创设情境

思考:你的手表慢了5分钟,你是怎样将它校准的?假如你的手表快了1.25小时,你应当如何将它校准?当时间校准以后,分针转了多少度?

[取出一个钟表,实际操作]

我们发现,校正过程中分针需要正向或反向旋转,有时转不到一周,有时转一周以上,这就是说角已不仅仅局限于$0°\sim360°$之间,这正是我们这节课要研究的主要内容——任意角.

二、探究新知

1.初中时,我们已学习了$0°\sim360°$角的概念,它是如何定义的呢?

[展示投影]

角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形.如课本图1.1-1,一条射线由原来的位置OA,绕着它的端点O按逆时针方向旋转到终止位置OB,就形成角α.旋转开始时的射线OA叫做角的始边,OB叫终边,射线的端点O叫做角α的顶点.

2.如上述情境中所说的校准时钟问题以及在体操比赛中我们经常听到这样的术语:"转体720°"(即转体2周),"转体1 080°"(即转体3周)等,都是遇到大于360°的角以及按不同方向旋转而成的角.同学们思考一下,能否再举出几个现实生活中"大于360°的角或按不同方向旋转而成的角"的例子,这些说明了什么问题?又该如何区分和表示这些角呢?

[展示课件]

如自行车车轮、螺丝扳手等按不同方向旋转时成不同的角,这些都说明了我们研究推广角概念的必要性.为了区别起见,我们规定:按逆时针方向旋转形成的角叫做正角,按顺时针方向旋转形成的角叫做负角.如果一条射线没有作任何旋转,我们称它形成了一个零角.

[展示课件]

如课本图1.1-3(1)中的角是一个正角,它等于750°;图1.1-3(2)中,正角$\alpha=210°$,负角$\beta=-150°$,$\gamma=-660°$;这样,我们就把角的概念推广到了任意角,包括正角、负角和零角.为了简单起见,在不引起混淆的前提下,"角α"或"$\angle\alpha$"可简记为α.

3.在今后的学习中,我们常在直角坐标系内讨论角,为此我们必须了解象限角这个概念.

角的顶点与原点重合,角的始边与x轴的非负半轴重合.那么,角的终边在第几象限,我们就说这个角是第几象限角.如课本图1.1-4中的30°角、$-120°$角分别是第一象限角和第三象限角.要特别注意:如果角的终边在坐标轴上,就认为这个角不属于任何一个象限.

4.练习

[展示投影]

(1)(口答)锐角是第几象限角？第一象限角一定是锐角吗？再分别就直角、钝角来回答这两个问题.

(2)(口答)今天是星期三，那么$7k(k\in\mathbf{Z})$天后的那一天是星期几？$7k(k\in\mathbf{Z})$天前的那一天是星期几？100天后的那一天是星期几？

5.探究：将角按上述方法放在直角坐标系中后，给定一个角，就有唯一的一条终边与之对应.反之，对于直角坐标系中任意一条射线OB(如课本图1.1-5)，以它为终边的角是否唯一？如果不唯一，那么终边相同的角有什么关系？请结合上边练习(2)口答加以分析.

[展示课件]

不难发现，在课本图1.1-5中，如果$-32°$的终边是OB，那么$328°$，$-392°$…角的终边都是OB，而$328°=-32°+1\times360°$，$-392°=-32°+(-1)\times360°$.

设$S=\{\beta|\beta=-32°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，则$328°$，$-392°$角都是$S$的元素，$-32°$角也是$S$的元素.因此，所有与$-32°$角终边相同的角，连同$-32°$角在内，都是集合$S$的元素；反过来，集合$S$的任一元素显然与$-32°$角终边相同.

一般地，我们有：

所有与角α终边相同的角，连同角α在内，可构成一个集合$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，即任一与角$\alpha$终边相同的角，都可以表示成角$\alpha$与整数个周角的和.

6.例题讲评

[展示投影]

例1　在$0°\sim360°$范围内，找出与$-950°12'$角终边相同的角，并判定它是第几象限角.(注：$0°\sim360°$是指$0°\leqslant\beta<360°$)

例2　写出终边在y轴上的角的集合.

例3　写出终边在直线$y=x$上的角的集合S，并把S中适合不等式$-360°\leqslant\beta<720°$的元素β写出来.

7.练习

[展示投影]

教材第5页练习第3～5题.

注意：(1)$k\in\mathbf{Z}$；(2)α是任意角(正角、负角、零角)；(3)终边相同的角不一定相等；但相等的角，终边一定相同；终边相同的角有无数多个，它们相差$360°$的整数倍.

三、学习小结

(1)你知道角是如何推广的吗？

(2)象限角是如何定义的呢？

(3)你熟练掌握具有相同终边角的表示了吗？会写终边落在x轴、y轴、直线$y=x$上的角的集合吗？

四、评价设计

1.作业：习题1.1A组第1～3题.

2.多举出一些日常生活中的“大于$360°$的角和负角”的例子，熟练掌握它们的表示，进一步理解具有相同终边的角的特点.

板书设计

一、创设情境 二、探究新知 1.任意角的概念 2.象限角的概念	3.终边相同的角的概念 四、例题讲评 例1 例2	例3 5.练习 三、学习小结 四、评价设计

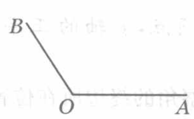
第二教案　　教辅教案

案例(一)——课时详解

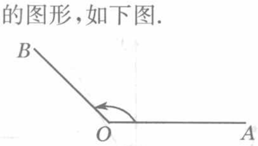
课堂导入

角是平面几何中的一个基本图形，对角的图形特点，人们有如下两种认识：

(1)角可以看成是平面内一点引出的两条射线所成的图形，如下图.



(2)角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形，如下图.



思考

1.你认为上述两种认识观点，哪一种认识更科学、合理？

2.工人师傅用扳手拧螺丝，那么他顺时针拧2圈和逆时针拧2圈效果相同吗？如何表示形成的两个角？

课前自主学习

1.角是一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形，按______方向旋转形成的角叫做正角，按顺时针方向旋转形成的角叫做______.如果一条射线没有作任何旋转，我们称它形成了一个______，其中正角、负角、零角统称为______.

2.$0°\sim270°$的读法是______，它表示的角含义是______.

3.在直角坐标系中研究角时，如果角的顶点与______，角的始边与______，那么角的终边落在第几象限，我们就说这个角是第几象限角.若终边落在坐标轴上，我们就认为这个角______.

4.所有与角α终边相同的角，连同角α在内，可构成一个集合：______.

5.终边落在x轴非负半轴的角的集合为：______.

终边落在y轴非负半轴的角的集合为：______.

终边落在x轴非正半轴的角的集合为：______.

终边落在 y 轴非正半轴的角的集合为:______.

6. 第一象限角的集合为:______.

第二象限角的集合为:______.

第三象限角的集合为:______.

第四象限角的集合为:______.

7. 角 α 与角 β 的终边关于原点对称,则 $\alpha-\beta=$______.

8. 角 α 与角 β 的终边关于 x 轴对称,则 $\alpha+\beta=$______.

9. 角 α 与角 β 的终边关于 y 轴对称,则 $\alpha+\beta=$______.

10. 角 α 与角 β 的终边在一条直线上,则 $\alpha-\beta=$______.

答案 1. 逆时针 负角 零角 任意角

2. 0°到 270° $0°\leqslant\alpha<270°$

3. 坐标原点重合 x 轴的非负半轴重合 不属于任何一个象限

4. $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

5. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$ $\{\alpha|\alpha=90°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

$\{\alpha|\alpha=180°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

$\{\alpha|\alpha=270°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

6. $\{k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$

$\{k\cdot360°+90°<\alpha<k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$

$\{k\cdot360°+180°<\alpha<k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$

$\{k\cdot360°+270°<\alpha<k\cdot360°+360°,k\in\mathbf{Z}\}$

7. $(2k+1)\cdot180°(k\in\mathbf{Z})$

8. $k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$

9. $(2k+1)\cdot180°(k\in\mathbf{Z})$

10. $k\cdot180°(k\in\mathbf{Z})$

课堂 合作 探究

知识点一 任意角的概念

知识点归纳

平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形叫做角.如课本图 1.1-1,射线的端点 O 叫做角的顶点,射线的起始位置 OA 叫做角的始边,射线的终止位置 OB 叫做角的终边.

我们规定,按逆时针方向旋转形成的角叫做正角,按顺时针方向旋转形成的角叫做负角.如果一条射线没有作任何旋转,我们称它形成了一个零角.

这样,我们就把角的概念推广到了任意角,包括正角、负角和零角.

特别提示 (1)确定一个角的大小需要考虑两个要素,即角的旋转量和旋转方向.旋转量相同而旋转方向不同的两个角是不相等的,如 $-60°\neq60°$.

(2)由于角包括正角、负角和零角,从而角的值可以取任意大小.

(3)两个任意角的数量大小可以相加、相减,并按实数的加、减法则进行.如 $50°+80°=130°,50°-80°=-30°$ 等.其几何意义是以 50°角的终边为始边,再逆时针(或顺时针)旋转 80°所成的角.

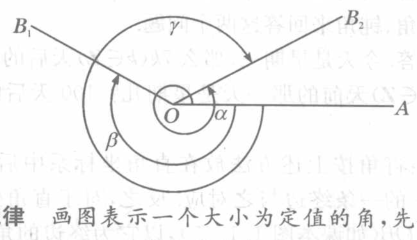
(4)角常用希腊字母 α、β、γ 等表示,在不引起混淆的前提下,"角 α"或"$\angle\alpha$"可以简记成"α".

典例剖析

【例 1】 画图表示下列各角:$\alpha=390°$,$\beta=-210°$,$\gamma=-330°$.

解析 α 为正角,将射线绕其端点逆时针旋转 390°,β、γ 为负角,将射线绕其端点顺时针分别旋转 210°和 330°.

答案 如图.



解题规律 画图表示一个大小为定值的角,先要画一条射线作为角的始边(一般画成水平向右的射线),再由角的正负确定角的旋转方向,再由角的绝对值大小确定角的旋转量,画出角的终边,并用带箭头的螺旋线加以标注.

【变式训练 1】 α 是任意一个角,则 α 与 $-\alpha$ 的终边 ( )

A. 关于坐标原点对称 B. 关于 x 轴对称

C. 关于 y 轴对称 D. 关于直线 $y=x$ 对称

答案 B

知识点二 象限角和非象限角

知识点归纳

为了便于讨论角,我们常常将角放到直角坐标系中,并且使角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴的正半轴重合,这样就出现了象限角和非象限角.

象限角:当角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合,那么,角的终边在第几象限,我们就说这个角是第几象限角.

当角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴的正半轴重合,那么角的终边在坐标轴上,这个角不属于任何一个象限.例如 0°,90°,180°,270°,360°,−90°,−180°,−270°,−360°,−1 080°等.

易错点提示 (1)角的正负与角所在的象限没有必然的联系,第一象限的角既有正角(如 60°)又有负角(如 −330°),其他象限的角也是如此.

(2)任何一个锐角都是第一象限的角,但第一象限的角不一定是锐角.同样,钝角是第二象限的角,直角不属于任何象限,但反之不成立.

(3)象限角只反映角的终边所在的象限,不能反映角的大小,不能说第二象限的角比第一象限的角大.

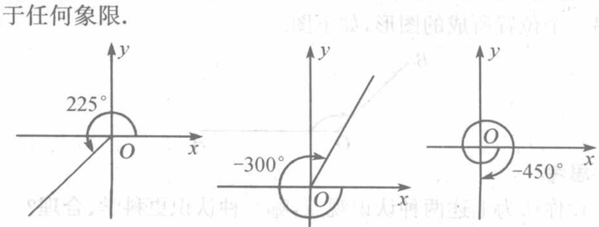
典例剖析

【例 2】 已知角的顶点与直角坐标系的原点重合,始边与 x 轴的正半轴重合,作出下列各角,并指出它们是第几象限角.

(1)225°; (2)−300°; (3)−450°.

解析 以原点为顶点,x 轴的正半轴为始边作出 225°,−300°,−450°.

答案 如下图,观察角的终边所在位置,知 225°,−300°分别是第三象限角和第一象限角,−450°的终边在 y 轴负半轴上,不属于任何象限.



(1) (2) (3)

方法指导 在直角坐标系内作角，其始边位置及角的顶点是统一固定的，结合角的正负符号和角的绝对值大小作出其终边，并用带箭头的螺旋线标注就行了．确定一个角是第几象限角，可以通过在直角坐标系内作出这个角来说明，这是象限角概念的直接应用．

【变式训练2】 $A=\{$小于$90°$的角$\}$，$B=\{$第一象限的角$\}$，则$A\cap B$等于 ( )

A.$\{$锐角$\}$　　B.$\{$小于$90°$的角$\}$

C.$\{$第一象限的角$\}$　　D.以上都不对

解析 小于$90°$的角由锐角、零角和负角组成，而第一象限的角包含有锐角及其他终边在第一象限的角，所以$A\cap B$是由锐角和终边在第一象限的负角组成，故A、B、C都不对．

答案 D

知识点三 终边相同的角

知识点归纳

所有与角α终边相同的角，连同角α在内，可构成一个集合$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，即任一与角$\alpha$终边相同的角，都可以表示成角$\alpha$与整数个周角的和．

特别提示 (1)在直角坐标系中，对于一个给定的角，只有唯一的一条终边与之对应．但大小不同的角可以有相同的终边，与角α终边相同的角有无数个，它们构成一个集合$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$．

(2)在$0°\sim360°$范围内，与角α终边相同的角有且只有一个．一般地，若$\theta_2-\theta_1=360°$，则在$\theta_1\sim\theta_2$范围内，与角α终边相同的角有且只有一个，若$\theta_2-\theta_1=k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$，则在$\theta_1\sim\theta_2$范围内，与角$\alpha$终边相同的角有且只有$k$个．

(3)终边在y轴上的角的集合

$S_1=\{\beta|\beta=90°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta|\beta=270°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\beta|\beta=90°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$；

终边在x轴上的角的集合

$S_2=\{\beta|\beta=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta|\beta=180°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}=\{\beta|\beta=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$．

(4)第一、二、三、四象限内的角的集合分别为$S_1=\{\beta|k\cdot360°<\beta<90°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，$S_2=\{\beta|90°+k\cdot360°<\beta<180°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，$S_3=\{\beta|180°+k\cdot360°<\beta<270°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，$S_4=\{\beta|-90°+k\cdot360°<\beta<k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$．

(5)若β与α是终边相同的角，则$\beta=\alpha+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$，这表明任意两个终边相同的角，它们相差周角的整数倍．

典例剖析

【例3】 求与$3\ 900°$终边相同的最小正角和最大负角，并指出它们是第几象限角．

解析 与$3\ 900°$终边相同的最小正角和最大负角，就是分别在$0°\sim360°$，$-360°\sim0°$范围内，与$3\ 900°$终边相同的角．找出了在$0°\sim360°$范围内与$3\ 900°$终边相同的角，就能指出它的象限位置．

答案 设$\beta=3\ 900°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$．

则当$k=-10$时，$\beta=3\ 900°-10\times360°=300°$，

当$k=-11$时，$\beta=3\ 900°-11\times360°=-60°$．

$\therefore$与$3\ 900°$终边相同的最小正角是$300°$，最大负角是$-60°$，且$3\ 900°$是第四象限的角．

规律总结 求在某个范围内与角α终边相同的角，先要写出其一般表达式：$\beta=\alpha+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$，再根据$\beta$的取值范围确定整数$k$的取值．确定绝对值较大的角的象限位置，可先在$0°\sim360°$范围内找出其终边相同的角，再作出判断．

【变式训练3】 如果角α、β的终边分别关于x轴、y轴和原点对称，那么α、β的关系如何？

答案 $\because\alpha$与$-\alpha$的终边关于x轴对称，若α与β的终边关于x轴对称，则β与$-\alpha$的终边相同，$\therefore\beta=k\cdot360°-\alpha$，即$\alpha+\beta=k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$．

$\because\alpha$与$180°-\alpha$的终边关于y轴对称，若α与β的终边关于y轴对称，则β与$180°-\alpha$的终边相同，$\therefore\beta=180°-\alpha+k\cdot360°$，即$\alpha+\beta=k\cdot360°+180°(k\in\mathbf{Z})$．

同理，若α与β的终边关于原点对称，则$\beta=180°+\alpha+k\cdot360°$，即$\beta-\alpha=k\cdot360°+180°(k\in\mathbf{Z})$．

概括 整合

1.角的旋转定义给出以后，就将原来的$0°\sim360°$间的角扩展为任意的正角、负角和零角，从而为角和实数之间建立对应关系奠定了基础．

2.要明确象限角的概念及其内涵，并能依据概念判断一个角是哪一个象限角或轴上角．

3.会用集合表示终边相同的角，并要深刻理解终边相同角的含义，会利用概念求得符合某种条件的角．

案例(二)——精析精练

课堂 合作 探究

重点难点突破

知识点一 任意角的概念

(1)用旋转运动的观点来定义角，就可以把角的概念推广到任意角，包括任意大小的正角、负角和零角．

(2)在直角坐标系中如果将角的终边绕原点逆时针方向旋转，则可以得到所有的正角；如果按顺时针方向旋转，则又可以得到所有的负角．在这里角的正、负由旋转方向确定，而角的绝对值的大小则由旋转的圈数以及终边所在的位置有关．

知识点二 象限角

(1)象限角的表示

利用终边相同的角的集合表示特征，我们可以得到象限角的表示：

根据终边相同的角的表达式，终边在第一象限的角有：$\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+\beta,0°<\beta<90°,k\in\mathbf{Z}\}$，将不等式$0°<\beta<90°$的两边同时加$k\cdot360°$，可得终边在第一象限的角的表示：$\{\alpha|k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$．

同理，终边在第二象限的角为$\{\alpha|k\cdot360°+90°<\alpha<k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$，

终边在第三象限的角为$\{\alpha|k\cdot360°+180°<\alpha<k\cdot360°+$

$270^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$;

终边在第四象限的角为$\{\alpha | k\cdot 360^\circ-90^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$.

(2)象限角的引入是为了便于讨论三角函数，这一点在今后的学习中可得到深刻的体会，学习象限角时，关键是应把握住这样一个条件：角的顶点与原点重合，角的始边与x轴的非负半轴重合，由此还能有效地表现出角的终边为之"周而复始"的现象，要会用集合的方法表示各个象限的角.

知识点三　终边相同的角

终边相同的角的概念既是重点，又是难点，与α终边相同的角的一般形式是$\alpha+k\cdot 360^\circ$，其中①$k\in \mathbf{Z}$，②α是任意角，③终边相同的角不一定相等，但相等的角的终边一定相同. 终边相同的角有无限多个，它们相差360°的整数倍.

例如设$S=\{\beta | \beta=-32^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$，则$328^\circ$，$-392^\circ$等角都是$S$的元素，$-32^\circ$角也是$S$的元素. 因此，所有与$-32^\circ$角终边相同的角，连同$-32^\circ$角在内，都是集合$S$的元素；反过来，集合$S$的任一元素显然与$-32^\circ$角终边相同.

典型例题分析

题型1　象限角的判定

【例1】 判定下列各角是第几象限角.

(1)-60°；(2)585°.

解析　要确定角的象限，这就需要确定角的终边落在第几象限，为了确定角的终边所落在的象限，需要把复杂的角化为简单的角.

答案　(1)因为-60°角终边在第四象限，所以它是第四象限角.

(2)因为$585^\circ=360^\circ+225^\circ$，所以$585^\circ$与$225^\circ$角的终边重合，而$225^\circ$终边在第三象限，所以$585^\circ$是第三象限角.

规律总结　利用终边相同的角的一般表示形式，可以把较为复杂的角表示为较为简单的角，即$\beta=\alpha+k\cdot 360^\circ(k\in \mathbf{Z})$，剩下的问题就只需要确定$\alpha$角所在的象限即可.

【例2】 判断下列各角所在的象限，并指出其在$0^\circ\sim 360^\circ$范围内与其终边相同的角.

(1)549°；(2)-60°；(3)$-304^\circ 26'$.

答案　(1)$549^\circ=189^\circ+360^\circ$，而$180^\circ<189^\circ<270^\circ$，因此$549^\circ$为第三象限角，且与$189^\circ$角有相同的终边.

(2)$-60^\circ=300^\circ-360^\circ$，而$270^\circ<300^\circ<360^\circ$，因此$-60^\circ$为第四象限角，且与$300^\circ$角有相同的终边.

(3)因为$-503^\circ 36'=216^\circ 24'-2\times 360^\circ$，而$180^\circ<216^\circ 24'<270^\circ$，因此$-503^\circ 36'$是第三象限的角，且与$216^\circ 24'$角有相同的终边.

题型2　终边相同的角的表示

【例3】 写出与50°角终边相同的角的集合S，并把S中适合不等式$-360^\circ\leqslant\beta<720^\circ$的元素$\beta$写出来.

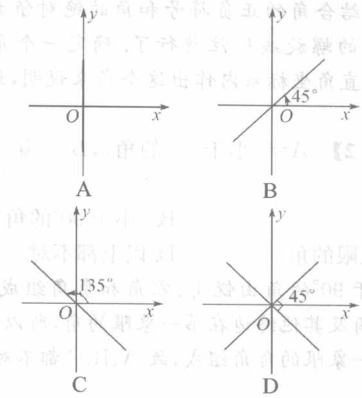
解析　只写出终边相同的角，再解不等式$-360^\circ\leqslant\beta<720^\circ$，确定整数$k$即可.

答案　$S=\{\beta | \beta=50^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$.

S中适合$-360^\circ\leqslant\beta<720^\circ$的元素是：$50^\circ-1\times 360^\circ=-310^\circ$，$50^\circ+0\times 360^\circ=50^\circ$，$50^\circ+1\times 360^\circ=410^\circ$.

规律总结　一般地，由终边相同的角的集合写出在某一个范围的特殊角(如$-360^\circ\sim 720^\circ$)，只需先写出不等式(如$-360^\circ\leqslant\alpha+k\cdot 360^\circ<720^\circ$)，再解此不等式，从而确定整数$k$可取哪些值即可.

【例4】 写出终边在图中所示直线上的角的集合.



解析　对于直线上的角都是180°的整数倍再加上相应的锐角(或直角).

答案　A：$S=\{\alpha | \alpha=90^\circ+k\cdot 180^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$；B：$S=\{\alpha | \alpha=45^\circ+k\cdot 180^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$；C：$S=\{\alpha | \alpha=135^\circ+k\cdot 180^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$.

对于D：$S=\{\alpha | \alpha=45^\circ+k\cdot 180^\circ, k\in \mathbf{Z}\}\cup\{\alpha | \alpha=135^\circ+k\cdot 180^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$. 即$S=\{\alpha | \alpha=45^\circ+2k\cdot 90^\circ, k\in \mathbf{Z}\}\cup\{\alpha | \alpha=45^\circ+(2k+1)\cdot 90^\circ, k\in \mathbf{Z}\}=\{\alpha | \alpha=45^\circ+k\cdot 90^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$.

规律总结　终边相同的角具有重要的意义，其核心是周期现象. 那么如何探求终边相同的角呢？利用除法将之转化到$0^\circ\sim 360^\circ$之间是有效的. 就本题而言，正确写出图中终边所示的角除了掌握终边角表示的方法外，还需熟练地进行集合的合并. 由本题还可得出的结论便是终边在同一条直线上的角的周期为180°，而终边在互相垂直的两条直线上的角的周期为90°.

题型3　实际应用题

【例5】 现在是8点5分，经过2小时15分钟后，钟表上的时针和分针转过的角度分别是多少？此时它们所成的角为多少？

解析　利用钟面分别确定在同一单位时间(1分钟)内分针和时针所转过的角度，进而确定所求角.

答案　时针每小时转过了$\left(-\dfrac{360^\circ}{12}\right)$，即$(-30^\circ)$，则每分钟转过了$(-0.5^\circ)$，而分针每分钟转过了$\left(-\dfrac{360^\circ}{60}\right)$，即$(-6^\circ)$.

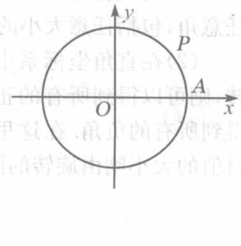
故2小时15分钟后，时针转过了$(2\times 60+15)\times(-0.5^\circ)=-67.5^\circ$；分针转过了$(2\times 60+15)\times(-6^\circ)=-810^\circ$. 2小时15分钟后为10点20分.

此时如右图所示，分针指向4，时针则由10转过了$20\times(-0.5^\circ)=-10^\circ$，故此时时针和分针所成的角为$170^\circ$.

规律总结　(1)确定经过一段时间后，时针和分针分别转过了多少角度，关键在于确定每分钟时针和分针分别转过了多少角度. 这样的方法还能解决哪些问题？例如齿轮问题，情形如何？

(2)要确定在某一时刻时针和分针所成的角为多少，关键是画图(钟面)分析，以及起始位置的确定.

【例6】 如右图半径为1的圆的圆心位于坐标原点，点P从点$A(1,0)$出发，依逆时针方向等速沿单位圆周旋转. 已知P在1秒钟内转过的角度为$\theta$$(0^\circ<\theta<180^\circ)$，经过2秒钟到达第三象



限，经过14秒钟后又恰好回到出发点A.求θ.

解析 P点重回A点的数学语言即14θ的终边与x轴的非负半轴重合，利用$0°<\theta<180°$的范围限制，可以找到角θ.

答案 $\because 0°<\theta<180°$，且$k\cdot 360°+180°<2\theta<k\cdot 360°+270°(k\in\mathbf{Z})$，则必有$k=0$，于是$90°<\theta<135°$.

又$\because 14\theta=n\cdot 360°(n\in\mathbf{Z})$，$\therefore \theta=\dfrac{n\cdot 180°}{7}$，

从而$90°<\dfrac{n\cdot 180°}{7}<135°$，$\dfrac{7}{2}<n<\dfrac{21}{4}$.

$\therefore n=4$或5，或$\theta=\dfrac{720°}{7}$或$\theta=\dfrac{900°}{7}$.

规律总结 (1)把实际问题转化为数学问题的关键是把实际语言翻译为数学语言.

(2)"回到出发点A"$\Leftrightarrow$"14θ的终边与$0°$的终边相同"，再利用终边相同的角间的关系列方程，使问题顺利得到解决.因此终边相同的角间的关系有助于方程思想的运用，有利于问题的解决.

规律 方法 总结

1.角的概念推广后，应注意区别"0°到90°的角"、"第一象限角"、"锐角"和"小于90°的角"."0到90°的角"是指属于$[0°,90°)$左闭右开范围内的角，"第一象限角"是指如下范围内的角$\{\alpha|k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$，"锐角"是指开区间$(0°,90°)$范围内的角，"小于90°的角"是指集合$\{\alpha|\alpha<90°\}$中的角，包括零角和所有的负角.

2.对于终边落在某一条射线、直线，或某几条直线的角的集合，要首先确定起始角，然后根据旋转的周期来考虑.

3.概念的说明

(1)象限角：当角的终边落在轴线上，我们规定它不属于任何象限，因此当$180°<\alpha<360°$时，则不能称α为第三象限角或第四象限角，还应补充y轴负半轴上的角.

(2)象限角、区间角、锐角：锐角是第一象限角，但第一象限角不一定是锐角；象限角可用一个区间表示出来(如第一象限角可表示为$(k\cdot 360°,k\cdot 360°+90°)(k\in\mathbf{Z})$)，但区间角是在这个区间内取值的角(如区间角$(0°,90°)$).

定时 巩固 检测

基础训练

1.下列命题中是真命题的是 ( )

A.第二象限角比第一象限角大

B.第一象限的角都是锐角

C.若$k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+180°(k\in\mathbf{Z})$，则$\alpha$为第一、二象限的角

D.当始边重合时，角相等，则终边重合；终边重合时，角不一定相等

【答案】 D(点拨：由$370°>120°$排除A；由$370°$排除B；由$\alpha=90°$排除C；故选D.)

2.若α是第三象限角，则$180°-\alpha$是 ( )

A.第一象限角　　B.第二象限角

C.第三象限角　　D.第四象限角

【答案】 D(点拨：$\because\alpha$是第三象限角，$\therefore k\cdot 360°+180°<\alpha<k\cdot 360°+270°$且$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore k\cdot 360°-90°<180°-\alpha<k\cdot 360°$且$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore 180°-\alpha$为第四象限角.)

3.始边在x轴的正半轴，则终边落在坐标轴或各象限角的平分线上的角的集合是 ( )

A.$\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°+45°$，或$\alpha=k\cdot 360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$

B.$\{\alpha|\alpha=k\cdot 180°,k\in\mathbf{Z}\}$

C.$\{\alpha|\alpha=k\cdot 45°,k\in\mathbf{Z}\}$

D.$\{\alpha|\alpha=k\cdot 90°,k\in\mathbf{Z}\}$

【答案】 C(点拨：由画图可知，α为与$0°,45°,90°,135°,180°,225°,270°,315°$终边相同的角，$\therefore\alpha=k\cdot 45°(k\in\mathbf{Z})$.)

4.终边在直线$y=\sqrt{3}x$上的所有角的集合是______.

【答案】 $\{\alpha|\alpha=k\cdot 180°+60°,k\in\mathbf{Z}\}$(点拨：$60°$与$240°$的终边都在直线$y=\sqrt{3}x$上，则与它们终边相同的角即为$\alpha$角.)

能力提升

5.已知α是第二象限角，且7α与2α的终边相同，则$\alpha=$______.

【答案】 $k\cdot 360°+144°(k\in\mathbf{Z})$(点拨：$7\alpha=2\alpha+k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$，$\therefore\alpha=k\cdot 72°$，又$\alpha$为第二象限角，$\therefore$在$0°\sim 360°$内符合条件的角为$144°$，故$\alpha=k\cdot 360°+144°(k\in\mathbf{Z})$.)

6.已知α是第三象限角，则$\dfrac{\alpha}{3}$角的终边所在的象限为______.

【答案】 一、三、四(点拨：由几何法可知$\dfrac{\alpha}{3}$为第一、三、四象限角.)

7.自行车大链轮有48齿，小链轮有20齿，当大链轮转过一周时，小链轮转过的角度是多少？

【答案】 $\because$当大链轮转过一周时，转过了48个齿，这时小链轮也同步地转过48齿，有$\dfrac{48}{20}=2.4$周，也就是小链轮转了2.4周，$\therefore$小链轮转过的角度为$360°\times 2.4=864°$.

8.在与$530°$终边相同的角中，求满足下列条件的角：

(1)最大的负角；(2)最小的正角；(3)$-720°$到$-360°$的角.

【答案】 与$530°$终边相同的角为$k\cdot 360°+530°(k\in\mathbf{Z})$.

(1)由$-360°<k\cdot 360°+530°<0°$且$k\in\mathbf{Z}$，得$k=-2$，故所求的最大负角为$-190°$.

(2)由$0°<k\cdot 360°+530°<360°$且$k\in\mathbf{Z}$，得$k=-1$，故所求的最小正角为$170°$.

(3)由$-720°<k\cdot 360°+530°<-360°$且$k\in\mathbf{Z}$，得$k=-3$，故所求的角为$-550°$.

9.零点整，时针与分针重合，则经过多少分钟后时针与分针再次重合？若记这次重合为第一次重合，则第12次重合时是几时？为什么？

【答案】 设经过x分钟后时针与分针第一次重合，则分针多转了一圈，因而有$(-6°)\cdot x=-360°+(-0.5°)x$，$\therefore x=\dfrac{720}{11}$(分)，故$65\dfrac{5}{11}$分钟后，时针与分针再次重合.

设经过x分钟后时针与分针第12次重合，则分针多转了12圈，因而有：$(-6°)\cdot x=-360°\times 12+(-0.5°)x$，$\therefore x=\dfrac{8\,640}{11}=785\dfrac{5}{11}$(分)，故第12次重合时是13时$5\dfrac{5}{11}$分.