

N

新世纪高职机电类教学改革规划教材

工程应用数学

万金保 主 编

舒虹 王文智 副主编

(上册)

GONGCHENG

YINGYONG

SHUXUE



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS





新工科背景下应用型人才培养的理论与实践

工程应用数学

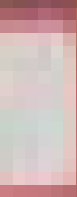
冯世强 王 强 编
刘红 王爱群 编主审

（上册）

（第2版）

机械工业出版社

（北京）



机械工业出版社



新世纪高职机电类教学改革规划教材

工程应用数学

(上册)

主 编 万金保

副主编 舒 虹 王文智

参 编 刘中瑞 贺 萍 康晓红

周旭光 董铸荣 夏毓鹏



机械工业出版社

本书是教育部“21 世纪高职高专教育机械基础课程教学内容体系改革与实践”和广东省高教厅“高职高专教育机电类专业教学内容体系改革与实践”研究项目的试点教材之一,是通过教学实践探索及在国内外高职高专教育教学内容体系研究基础上完成的。

本书以高等数学和理论力学为主线,适当介绍了线性代数、矢量代数、微分方程、振动理论及流体力学等相关内容。本书形成了以培养综合工程技术应用能力为目标的理论教学内容体系,适应了当前教学改革的需要。本书分为上、下两册,共 3 篇。本书为上册,包括:第 1 篇数学与力学基础,内容有矩阵与线性方程组、矢量代数、静力学、函数与极限等;第 2 篇微积分与运动学,内容有导数与微分、质点运动学、刚体运动学、一元函数积分等。

本书参考学时数为 140 学时。其中,上册为 90 学时,下册为 50 学时。

本书可作为高职高专及成人高校机电类专业数学和工程力学相关内容的教学用书,也可作为有关工程技术人员参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

工程应用数学.上册/万金保主编. —北京:机械工业出版社,2004.6
新世纪高职机电类教学改革规划教材

ISBN 7-111-14300-0

I. 工... II. 万... III. 工程数学—高等学校:技术学校—教材 IV. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 028434 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:贡克勤 宋学敏 版式设计:冉晓华 责任校对:张 媛

封面设计:张 静 责任印制:李 妍

北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2004 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

1000mm×1400mm B5·8.75 印张·337 千字

定价:22.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线电话(010)68993821、88379646

封面无防伪标均为盗版

前 言

本书是作者在承担教育部“21 世纪高职高专教育机械基础课程教学内容体系改革与实践”和广东省高教厅“高职高专教育机电类专业教学内容体系改革与实践”项目研究基础上,结合多年从事教学、科研开发与生产实践的经验编写的。

高职高专专业设置岗位针对性强,要求有较强的实践能力和解决生产、建设、管理、服务一线问题的综合能力。这种特点使得高等职业技术教育的理论课时大为减少,导致目前高职院校的学生不是基础理论学得太少,就是基础理论学的“夹生”,甚至成为公式、定理的记忆机器,难以在解决实际问题中发挥作用。如何在基本理论“适度、够用”的原则下,重构课程内容体系,是高职教育面临的重大课题。

《机械基础》课程涉及内容较广,且无明确的界定。但是在实践中,涉及机械基础的理论、概念、方法却是广泛的。为了满足高职教育特点、适合机电类不同专业的需要,本项目的“机械基础课程教学内容体系”已超越了传统的《机械基础》课程的基本内容体系,由本教材和《实用机械设计基础》、《机械应用基础》教材来实现。《工程应用数学》主要以高等数学和理论力学为基本内容,同时还包括了线性代数、矢量代数、常微分方程、振动理论及流体力学等内容,形成了相关理论内容的关联应用体系,以增加学生的学习兴趣和理论内容的灵活掌握。《实用机械设计基础》以机械设计、材料力学为基本内容,包括机械系统涉及的材料、液压与电动机驱动、动力平衡等,形成了对机械系统进行分析、构建与应用的综合应用体系,以增强学生对机械系统的分析与构建的实践应用能力。《机械应用基础》则以机械基础为基本内容,包括常用机械(构)的原理、结构、使用、维护中所涉及的机构、零件、材料、公差配合、驱动、平衡及效率等内容,形成对机械系统进行使用与维护的综合应用体系,以增强学生对机械系统认识、使用与维护的实际综合应用能力。

《工程应用数学》将高等数学和理论力学有机地结合在一起,将高等数学、理论力学、机械设计相关内容进行合理编排,让学生在相对较少的学时内学到的更多、学得更好、用得活是编者的心愿。

《工程应用数学》是“机械基础课程教学内容体系”改革的一部分。对高职高

专机电类专业的学生,主要以上册内容为主,下册内容可根据专业进行选取。《工程应用数学》教学内容的选取,应根据专业要求,结合后续的《实用机械设计基础》或《机械应用基础》教学内容综合考虑。以真正实现高职高专教育面向实际、面向岗位、面向应用的目的。

参加本书编写的有:刘中瑞(第1、2、9章),贺萍(第3、4章),舒虹(第5、6章),万金保(第7、8章),康晓红(第10章),周旭光(第11章),王文智(第12章),董铸荣(第13章),夏毓鹏(第14章)。全书由万金保主编。

由于编者水平有限,缺点、错误及不妥之处在所难免,恳请广大读者批评指正,并提出宝贵的意见和建议。

编者

目 录

1.1	矩阵及其运算	1.2
1.2	矩阵的初等变换与逆矩阵	8
1.3	线性方程组的求解	13
1.4	习题	16
2.1	矢量及其线性性质	18
2.2	空间直角坐标系与矢量的表示	21
2.3	矢量的数量积与矢量积	28
2.4	习题	34
3.1	静力学公理	36
3.2	约束和约束力	39
3.3	物体的受力分析和受力图	43
3.4	思考题	48
3.5	习题	50
4.1	力矩与力偶矩	52
4.2	平面力偶系作用下的刚体平衡	61
4.3	平面汇交力系作用下的刚体平衡	62
4.4	平面任意力系作用下的刚体平衡	70
4.5	考虑摩擦时的刚体平衡	72
4.6	思考题	78
4.7	习题	79

前言

第 1 篇 数学与力学基础

第 1 章 矩阵与线性方程组	1
1.1 矩阵及其运算	1
1.2 矩阵的初等变换与逆矩阵	8
1.3 线性方程组的求解	13
1.4 习题	16
第 2 章 矢量代数	18
2.1 矢量及其线性性质	18
2.2 空间直角坐标系与矢量的表示	21
2.3 矢量的数量积与矢量积	28
2.4 习题	34
第 3 章 静力学分析	36
3.1 静力学公理	37
3.2 约束和约束力	39
3.3 物体的受力分析和受力图	43
3.4 思考题	48
3.5 习题	50
第 4 章 静力学计算	52
4.1 力矩与力偶矩	52
4.2 平面力偶系作用下的刚体平衡	61
4.3 平面汇交力系作用下的刚体平衡	62
4.4 平面任意力系作用下的刚体平衡	70
4.5 考虑摩擦时的刚体平衡	72
4.6 思考题	78
4.7 习题	79

第5章 函数与极限	84
5.1 函数	84
5.2 数列的极限	94
5.3 函数的极限	96
5.4 两个重要极限	102
5.5 无穷小的比较	106
5.6 函数的连续性	107
5.7 习题	113

第2篇 微积分与运动学

言简

第6章 导数与微分	116
6.1 导数的概念	116
6.2 导数的运算	123
6.3 函数的微分	134
6.4 导数的应用	139
6.5 习题	163
第7章 点的平面运动学	167
7.1 点的平面运动分析	167
7.2 基本运动刚体上点的运动分析	176
7.3 点的合成运动	184
7.4 思考题	196
7.5 习题	197
第8章 刚体的平面运动学	202
8.1 刚体平面运动概念和运动分解	202
8.2 平面运动刚体内各点的速度和加速度	204
8.3 平面机构的运动分析	212
8.4 思考题	220
8.5 习题	221
第9章 积分	225
9.1 不定积分	225
9.2 定积分	229
9.3 换元积分法	238
9.4 分部积分法	247
9.5 定积分的应用	250
9.6 广义积分	262

9.7 习题	266
参考文献	270

第1篇 数学与力学基础

第1章 矩阵与线性方程组

矩阵是一种重要的数学工具,在经济工作和工程问题中有着广泛的应用。本章介绍矩阵的基本知识,包括矩阵的概念和运算,矩阵的初等变换,矩阵的逆矩阵,以及以矩阵为工具求解线性方程组。

1.1 矩阵及其运算

1.1.1 矩阵的概念

引例 1 设工厂生产 A、B、C 三种产品,需要甲、乙、丙、丁四种原材料,其用量如表 1-1 所示。

表 1-1

(单位: $\times 10^3 \text{kg}$)

	甲材料	乙材料	丙材料	丁材料
A 产品	1	2	3	4
B 产品	2	3	1	3
C 产品	3	2	4	1

如果取出表中的数据并保持原来的相对位置,则可以得到一个排列成长方形的数表

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

引例 2 在 n 个未知数、 m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1-1)$$

中,如果把未知数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 前的系数

$a_{ij} (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ 按

和常数项

$$b_i (i = 1, 2, \dots, m)$$

按原有的顺序写出,也得到一个 m 行 $n+1$ 列的长方形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

由上面的两个引例可见,对于这一类的问题可以用不同的长方形数表来表示,数学上把这样的长方形数表称为矩阵。由此看来,矩阵就是数字表格的抽象形式。

定义 1-1 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij} (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ 排成 m 行 n 列的长方形数表称为一个 $m \times n$ 矩阵。通常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 等表示矩阵,记作

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵 A 中的横排称为矩阵的行,纵排称为矩阵的列。数 a_{ij} 称为矩阵 A 中第 i 行第 j 列的元素。 a_{ij} 的下标 i 称为行标,下标 j 称为列标,分别表示元素 a_{ij} 在矩阵 A 中所处的行列位置。

在需要标明矩阵 A 行数 m 和列数 n 时,可写成 $A_{m \times n}$ 。矩阵 A 有时也记作 (a_{ij}) ,或者 $(a_{ij})_{m \times n}$ 。

所有元素均为 0 的矩阵称为零矩阵,用 $0_{m \times n}$ 或 0 表示。

只有一行元素的矩阵

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$$

称为行矩阵。

只有一列元素的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

称为列矩阵。

为了叙述方便,将矩阵中元素全部为 0 的行称为零行;元素不全为 0 的行称为非零行。

如果从矩阵 A 的第二行起,每一行第一个非零元素的列标都大于上一行第一个非零元素的列标,并且矩阵 A 中零行(如果存在的话)下面不再有非零行,则称

矩阵 A 为梯形矩阵。以下为几个阶梯矩阵的例子:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

当矩阵 A 的行数 m 等于列数 n 时,称矩阵 A 为 $n(m)$ 阶方阵。

特别地,规定一阶方阵就是一个数,即

$$A = (a) = a$$

方阵 A 中从左上角到右下角由元素 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 连成的直线称为方阵 A 的主对角线。

如果方阵 A 中主对角线左下方的元素均为 0,则称 A 为上三角矩阵,即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

类似地,形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的方阵称为下三角矩阵。

上、下三角矩阵统称为三角矩阵。

如果方阵 A 中除主对角线上的元素之外,其他的元素全为 0,则称 A 为对角矩阵。即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

容易看出,当且仅当方阵 A 既是上三角矩阵又是下三角矩阵时才为对角矩阵。

如果对角矩阵中的主对角线上的元素全为 1,则称之为单位矩阵,记为 E ,即

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.2 矩阵的运算

1.1.2.1 矩阵的相等

定义 1-2 设矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$, 则当且仅当 $a_{ij} = b_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 时有 $A = B$ 。

由定义 1-2, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 虽然都是 $\mathbf{0}$ 矩阵, 但它们并不是相等的矩阵。

【证略】

1.1.2.2 矩阵的加法和减法

定义 1-3 设矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$, 则矩阵 A 与矩阵 B 的和定义为: $C = A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ 。

例 1-1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $A + B$ 。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad A + B &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+1 & 3+4 & 2+1 \\ 2+4 & 1+3 & 3+2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

容易验证矩阵的加法满足以下的规律(设 A, B, C 都是 $m \times n$ 矩阵):

1) 矩阵的加法满足交换律、结合律, 即

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

2) 对于任意的矩阵 A , 总有 $A + \mathbf{0} = A$ 。

3) 对于任意的矩阵 A , 总存在惟一的矩阵 B , 使 $A + B = \mathbf{0}$ 。

使 $A + B = \mathbf{0}$ 成立的矩阵 B 称为矩阵 A 的负矩阵, 记作 $B = -A$ 。

利用负矩阵定义, 两个矩阵的减法可写为:

$$A - B = A + (-B)$$

应该注意: 只有当矩阵 A 与矩阵 B 的行数、列数都相同时, 才能进行加法或减法的运算。

例 1-2 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $A + X = B$, 求 X 。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad X &= B - A \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4-1 & 2-3 \\ 3-2 & 1-4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1.1.2.3 常数与矩阵的乘法

定义 1-4 常数 λ 与矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$, 定义为

$$\lambda A = A\lambda = \lambda(a_{ij})_{m \times n} = (\lambda a_{ij})_{m \times n}$$

例 1-3 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, 求 $2A$ 。

解 $2A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$

容易验证数乘矩阵满足以下的算律(设 A, B 为 $m \times n$ 矩阵, λ, μ 为常数):

- 1) $1 \cdot A = A$;
- 2) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;
- 3) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
- 4) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ 。

1.1.2.4 矩阵与矩阵的乘法

定义 1-5 设有 $m \times s$ 矩阵 $A = (a_{ik})_{m \times s}$ 和 $s \times n$ 矩阵 $B = (b_{kj})_{s \times n}$, 定义 A 与 B 的乘积矩阵是

$$C = AB = (c_{ij})_{m \times n}$$

其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$$

从定义 1-5 可见, 乘积矩阵 $AB = C$ 的第 i 行第 j 列的元素 c_{ij} 就是矩阵 A 的第 i 行的元素与矩阵 B 的第 j 列的对应元素的乘积之和。但是, 必须注意, 只有当左边的矩阵 A 的列数等于右边的矩阵 B 的行数的时候, 两个矩阵才能相乘, 否则没有意义。

例 1-4 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, 试求 AB 和 BA 。

解 $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 0 \times (-1) + 3 \times 2 & 1 \times 1 + 0 \times 1 + 3 \times 0 \\ 2 \times 4 + 1 \times (-1) + 0 \times 2 & 2 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \times 1 + 1 \times 2 & 4 \times 0 + 1 \times 1 & 4 \times 3 + 1 \times 0 \\ (-1) \times 1 + 1 \times 2 & (-1) \times 0 + 1 \times 1 & (-1) \times 3 + 1 \times 0 \\ 2 \times 1 + 0 \times 2 & 2 \times 0 + 0 \times 1 & 2 \times 3 + 0 \times 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

按定义 1-5, 元素个数相同的行矩阵与列矩阵的乘积是一个一阶矩阵, 也就是一个数。即

$$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

从例 1-4 可以看出, $AB \neq BA$ 。需强调指出, 一般来说矩阵的乘法不满足交换律。

矩阵乘法满足下列的规律(假设运算是可施行的):

$$1) (AB)C = A(BC);$$

$$2) (A+B)C = AC + BC;$$

$$C(A+B) = CA + CB;$$

$$3) \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B) (\lambda \text{ 是一个常数});$$

$$4) AE = A, EA = A (E \text{ 是单位矩阵}).$$

当 A 为 n 阶方阵的时候, 定义方阵的幂为

$$A^2 = AA, A^3 = AAA = (AA)A, \cdots, A^k = \overbrace{AA \cdots A}^{k \text{ 个}}$$

由于矩阵的乘法不满足交换律, 故一般地, $(AB)^k \neq A^k B^k$ 。

再去考察引例 2 中的 n 个未知数、 m 个方程的线性方程组式(1-1), 如果令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

则式(1-1)可以表示为矩阵方程

$$AX = B \quad (1-2)$$

显然,在形式上式(1-2)比式(1-1)更简单。

1.1.2.5 矩阵的转置

定义 1-6 设有 $m \times n$ 矩阵 A , 如果 $n \times m$ 矩阵 B 的第 j 行的元素恰好是矩阵 A 的第 j 列的对应元素 ($j = 1, 2, \dots, n$), 则矩阵 B 称为矩阵 A 的转置矩阵, 记作 $B = A^T$ 。

例 1-5 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, 求 A^T

解 $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

把矩阵的转置看成是一种运算, 则矩阵的转置运算满足以下的规律 (假设运算是可行的):

$$1) (A^T)^T = A;$$

$$2) (A + B)^T = A^T + B^T;$$

$$3) (\lambda A)^T = \lambda A^T;$$

$$4) (AB)^T = B^T A^T.$$

设 A 为 n 阶方阵, 如果满足 $A^T = A$, 即

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

则称 A 为对称矩阵。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & -4 & 4 \end{pmatrix} = A^T$$

由于 $A^T = A$, 所以 A 是对称矩阵。

设 B 是 n 阶方阵, 如果满足 $B^T = -B$, 即

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

则称 B 是反对称矩阵。例如

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 0 & -4 \\ -5 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 0 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} = -B^T$$

由于 $B^T = -B$, 所以 B 是反对称矩阵。

1.2.1 矩阵的初等变换

定义 1-7 对矩阵 A 进行下列变换:

- 1) 互换矩阵 A 任意两行的对应元素(对调 i, j 两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$)。
- 2) 用一个非零常数乘掩矩阵 A 的某一行中的所有元素(第 i 行乘 k , 记作 $r_i \times k$)。
- 3) 用一个数乘矩阵 A 中的某一行的所有元素后, 再加到 A 的另一行对应的元素上去(第 j 行的 k 倍加到第 i 行上, 记作 $r_i + kr_j$)。

这三种变换称为矩阵 A 的初等行变换。

把定义 1-7 中的“行”换成“列”(所用记号“ r ”换成“ c ”),即得矩阵 A 的初等列变换的定义。矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换。

定义 1-8 如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B , 则称矩阵 A 与矩阵 B 是等价的, 记为 $A \sim B$ 。

等价是矩阵间的一种关系,它具有以下的性质:

- 1)反身性:每一个矩阵与它自己等价,即 $A \sim A$ 。
- 2)对称性:如果矩阵 A 与 B 等价,则矩阵 B 与 A 等价,即,若 $A \sim B$,则 $B \sim A$ 。
- 3)传递性:若 $A \sim B$,且 $B \sim C$,则 $A \sim C$ 。

例 1-6 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, 对矩阵 A 施行初等变换。

解 $A \sim \begin{pmatrix} r_2 + 2r_1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ r_3 - 2r_1 & 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ r_4 - 3r_1 & 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ & 0 & 9 & 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c} r_2 \leftrightarrow r_3 \\ r_3 \leftrightarrow r_4 \\ \sim \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & - \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & - \end{pmatrix}$$