应用数学基础

YINGYONG SHUXUE JICHU

徐淳宁 编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

应用数学基础

徐淳宁　编著

北 京 邮 电 大 学 出 版 社
·北京·

内容简介

本书主要是针对在高等职业技术教育中，数学基础课在教材选取方面的具体需求编写的。全书共分7章，两大部分内容。线性代数部分：行列式、矩阵、n维向量、线性方程组；概率论部分：随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、中心极限定理。

本书力求浅显易懂，既注重知识的连贯性，又照顾到高等职业技术教育的特点，尽量做到简明扼要、涵盖知识点全面，适合学生自学。为了帮助读者抓住要点，提高学习质量与效率，在各章末均配有“小结”。小结中所包含的内容，有的是阐明一章内容的重点和基本要求，有的则指出学习时应注意之处，起到了提纲挈领的作用。

本书可作为高等职业技术教育工科类和大专院校工科专业（专科）的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础/徐淳宁编著．—北京：北京邮电大学出版社，2008
ISBN 978-7-5635-1862-3

Ⅰ．应…　Ⅱ．徐…　Ⅲ．应用数学—高等学校—教材　Ⅳ．O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 140546 号

书　　名：应用数学基础
作　　者：徐淳宁
责任编辑：孔　玥
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号（邮编：100876）
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京市梦宇印务有限公司
开　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　张：14.5
字　　数：312 千字
印　　数：1—3 000 册
版　　次：2008 年 8 月第 1 版　2008 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-1862-3　　定　价：24.00 元

前　　言

随着我国高等职业技术教育的蓬勃发展，各个专业对数学基础都提出了涵盖较广、内容深浅程度不同的需求。而现有的教材中，基本上是比较专门的、单一学科成书的教材，由于学时所限，目前很多高等职业技术教育在教材选择时，只能从几种教材中选取个别章节来使用，这给教学带来了许多不便的同时，也给学生在经济上增加了额外的负担。针对高等职业技术教育的这一特点，我们编写了此书。

本书编写的基本思路是：面对高等职业技术教育和专科教学，立足最基本的基础知识，把两门课程的内容放在一本书里，用较少的学时即可学完。为方便学生自学，从学生的视角出发，每节后都配有思考题、习题；每章后都有小结和复习题，书后有习题参考答案。

全书共分两个部分：线性代数、概率论，共 7 章。第 1 章讲述了行列式，要求学生理解行列式的定义、掌握行列式的性质、余子式和代数余子式、行列式展开、行列式的计算。第 2 章讲述了矩阵，主要介绍了矩阵的定义、矩阵的运算、矩阵的秩及其求法、矩阵可逆的充要条件及逆矩阵的求法，最后介绍了几种特殊矩阵。第 3 章介绍了 n 维向量的概念，讨论了向量组的线性相关性并给出了判断向量组线性相关性的方法；介绍了向量组的秩和极大无关组的求法；给出了向量组的秩与矩阵的秩的关系。第 4 章讲述了线性方程组，介绍了同解方程组的概念，方程组解的情况判别；讲述了齐次线性方程组解的结构、基础解系的求法，非齐次线性方程组解的结构、全部解的求法。第 5 章讲述了随机事件与古典概率，首先安排了排列组合、集合等预备知识，介绍了随机事件的概念、事件间的关系与运算、古典概型及概率、随机事件概率的性质、条件概率与乘法公式、时间的独立性与贝努利概型。第 6 章介绍了随机变量。讲述了离散型随机变量及其分布、连续型随机变量及其分布、常用的概率分布、随机变量函数的分布、随机变量的数字特征。第 7 章简单介绍了多维随机变量和极限定理。讲述了二维离散型随机变量与联合分布列、边缘分布列；二维连续型随机变量与联合分布密度、边缘分布密度；二维随机变量的数字特征；大数定律与中心极限定理。

本书由吉林大学徐淳宁教授编著。吉林化工学院郑志宏副教授参加了本书的编写工作。郑志宏副教授还演算了书后的全部习题并给出了参考答案。由于作者水平有限，书中若存在缺点和错误，恳请广大读者指正。

作　者

目　　录

第 1 章　行列式

第 2 章　矩阵

第 3 章 向量空间

第 4 章 线性方程组

第 5 章 随机事件与概率

第1章 行列式

本章主要内容:

n 阶行列式的定义及性质、行列式按行(列)展开、克莱姆法则.

本章要求:

(1) 正确理解 n 阶行列式的定义;

(2) 熟悉行列式的性质,会利用行列式的性质化简行列式;

(3) 熟悉行列式按行(列)展开的方法;

(4) 熟练掌握行列式的计算方法;

(5) 掌握克莱姆法则.

1.1 n 阶行列式的定义

在初等数学中,我们曾学习过二阶与三阶行列式.它们分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1.2}$$

学习了二阶与三阶行列式后,人们很自然会想到,能否把行列式推广到四阶、五阶以至更一般的 n 阶呢?为了定义 n 阶行列式,我们来观察一下三阶行列式(1.2)中每一项构成的规律.

首先注意其中每一项为三个元素的乘积 $a_{1j}a_{2k}a_{3l}$,并带有一定的符号.这三个元素的第一个下标分别为1,2,3,这说明了在行列式的每一行中各取一个元素相乘.由于数的乘法满足交换律,所以这里元素按行的自然顺序(从小到大的顺序)排列是人为的.这样,我们只须考虑第二个下标 j,k,l 的变化.下面我们写出(1.2)式中各项第二个下标的排列

$$(123),\quad (312),\quad (231)$$
$$(321),\quad (132),\quad (213)$$

它们恰好是1,2,3的全排列.这说明从三个行中所取的元素是取自各个不同的列,也就是

说，各项的乘积是由每一行、每一列各取一个且仅取一个元素相乘得到的，对于 1,2,3 的每一个全排列 j,k,l，就对应一个乘积 $a_{1j}a_{2k}a_{3l}$. 1,2,3 共有 6 个全排列，所以三阶行列式共有 6 项.

下面分析各项所带的符号. 由于各项第一个下标都按自然顺序排列，所以各项所带符号只与第二个下标的排列有关，为了说明其中的关系，我们引入逆序数的概念.

我们称由数 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的一个有序数组为 n 元排列. 且称 $1,2,3,\cdots,n$ 为标准序排列，即其是按自然数递增顺序排列起来的. 其他的 n 元排列或多或少地破坏了自然顺序.

在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即左边的数比右边的数大，那么就称它构成一个逆序，一个排列中逆序的总数就称为此排列的逆序数. 一个 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

例如，在排列 2 4 3 1 中，21、41、31、43 是逆序，故

$$\tau(2\ 4\ 3\ 1)=4$$

易知，排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=(i_1\text{ 右面比 }i_1\text{ 小的数字的个数})+(i_2\text{ 右面比 }i_2\text{ 小的数字的个数})+\cdots+(i_{n-1}\text{ 右面比 }i_{n-1}\text{ 小的数字的个数})$$

如果一个排列的逆序数是偶数，就称该排列为偶排列，否则称为奇排列. 例如在排列 3 4 1 5 2 中，3 右面有两个数比 3 小，4 右面也有两个数比 4 小，5 右面有一个数比 5 小，故

$$\tau(3\ 4\ 1\ 5\ 2)=2+2+1=5$$

即该排列是奇排列.

现在我们再来观察三阶行列式(1.2)，不难发现(1.2)式中各项所带的符号是由第二个下标排列 $j\ k\ l$ 的奇偶性决定的. 当 $j\ k\ l$ 是偶排列时该项带正号，当 $j\ k\ l$ 是奇排列时该项带负号，如果令 $\tau=\tau(j\ k\ l)$，则各项所带的符号为 $(-1)^\tau$.

于是三阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^\tau a_{1j}a_{2k}a_{3l} \tag{1.3}$$

其中 τ 为排列 $j\ k\ l$ 的逆序数，$\sum$ 是对所有三元排列 $j\ k\ l$ 求和.

至此，我们不难把行列式的概念推广到 n 阶.

定义 1.1 设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列如下

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \tag{1.4}$$

其中 a_{ij} 是第 i 行第 j 列的数(称为元素). 今在每一行中取出一个数,并且要求取出的 n 个数都在不同的列上,把所取元素的行数按自然顺序排列,相应的列数设为 $j_1, j_2, \cdots, j_n$. 作出这 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,然后按第二个下标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的奇偶性,将乘积乘以 $+1$ 或 -1,如果 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列则乘以 $+1$,否则乘以 -1. 若记 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数为 $\tau=\tau(j_1j_2\cdots j_n)$,则各项乘积所带的符号为 $(-1)^\tau$,然后对所有 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和,此和数就称为与(1.4)式中数表相应的 n 阶行列式,记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^\tau a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.5}$$

其中 $\sum$ 是对所有 n 元排列求和.

由定义 1.1 可以看出,n 阶行列式具有如下特点:

(1) 有 n 行 n 列,由 $n\times n=n^2$ 个元素组成;

(2) 每一项都是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积;

(3) 是 $n!$ 项的代数和;

(4) 每项前的正、负号选取如下:把第一个下标排成自然顺序,当第二个下标的排列是偶排列时取正号,否则取负号. 并且可以证明,正、负项各占一半,都是 $\frac{1}{2}n!$ 个.

例 1.1 设

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

问:$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$, $a_{11}a_{24}a_{33}a_{44}$ 是不是该行列式的项,若是,其符号为正还是为负?

解 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 中第一个下标为 1 2 3 4,表示它取自不同行,第二个下标为 4 3 1 2,表示它取自不同列,所以是行列式的项,又 $\tau(4\ 3\ 1\ 2)=5$,所以该项前为负号.

$a_{11}a_{24}a_{33}a_{44}$ 的第二个下标为 1 4 3 4,表明在第四列中取了两个元素,所以它不是该行列式的项.

例 1.2 计算下列 n 阶对角行列式

$$(1)\ D_1=\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix},\quad (2)\ D_2=\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & ⋰ & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$$

其中对角线上的元素是 λ_i,未写出的都是零.

解 (1) 由定义 1.1 知：D_1 应等于 $n!$ 项的代数和.但由于 D_1 除主对角线(左上角至右下角的对角线)上的元素外，其余元素都是零，故只须找出 $n!$ 项中不为零的项求代数和即可. D_1 中不为零的元素恰为 n 个，且它们分别位于不同的行、不同的列.故 D_1 中不为零的项仅有一项，即

$$D_1=(-1)^{\tau}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

而此时排列

$$j_1j_2\cdots j_n=1\ 2\ \cdots\ n, \tau(j_1j_2\cdots j_n)=\tau(1\ 2\ \cdots\ n)=0$$

故

$$D_1=(-1)^0\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

(2) D_2 与 D_1 类似，仅有一项不为零，若记 $\lambda_i=a_{i(n-i+1)}$，则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\tau}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}=(-1)^{\tau}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

其中 τ 为 $n(n-1)\cdots 2\ 1$ 的逆序数，

$$\tau=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

故

$$D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

例 1.3 计算行列式

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中未写出的元素全是零.

解 由行列式定义知

$$D_3=\sum(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\tau=\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

在 D_3 中，当第二个下标 j 小于第一个下标 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 时，有 $a_{ij}=0$. 所以，D_3 中不为零的项均是满足 $j\geqslant i(i=1,2,\cdots,n)$ 的元素的乘积.而满足上述要求的排列只有 $j_1j_2\cdots j_n=1\ 2\ \cdots\ n$，所以 $D_3=(-1)^0a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，即主对角线上元素的乘积.同理可得 $D_4=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，分别称 D_3、D_4 为上、下三角行列式.

思考题

1. 什么叫一个排列的逆序数?

2. n 阶行列式表示一个什么样的代数和?其中每一项的符号是如何确定的?

习题 1.1

1. 求下列排列的逆序数

(1) 5 3 1 4 2;　　　　　(2) 1 3 5 7 2 4 6 8;

(3) 设 1 2 7 4 i 5 6 j 9 是 9 个数码的排列,试确定 i,j,使该排列是偶排列.

2. 设 $a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{22}a_{3i}a_{4j}$ 是四阶行列式的项

(1) 确定 $a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$ 的符号;

(2) 确定 i,j,使 $a_{11}a_{22}a_{3i}a_{4j}$ 取负号.

3. 用行列式定义计算

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-2} & a_{n\,n-1} & a_{n\,n} \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{vmatrix}$.

4. 用行列式定义证明:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

1.2 行列式的性质

本节将介绍行列式的性质,它不仅可以简化行列式的计算,而且对深入研究行列也有重要作用.

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D' 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D'$.

由于 D' 是将 D 的行、列依次互换得来的. 所以这个性质表明在行列式中行与列具有同等的地位. 由此可知：行列式中有关行的性质对列也同样成立，反之亦然.

性质 2　互换行列式的任意两行(列)，行列式改变符号，即

$$\begin{array}{c} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (j\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (j\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

用 r_i 表示行列式的第 i 行，c_i 表示行列式的第 i 列，交换 i,j 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$；交换 i,j 两列，记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 1　如果行列式有两行(列)对应元素完全相同，则此行列式为零.

因为若行列式 D 中第 i 行与第 j 行的对应元素相等，则交换这两行后，由性质 2 有 $D=-D$，所以 $D=0$.

性质 3　如果行列式某一行(列)中的所有元素都乘以数 k，等于用数 k 乘此行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第 i 行乘以数 k，记作 $r_i \times k$；第 j 列乘以数 k，记作 $c_j \times k$.

推论 2　如果行列式中某一行(列)的所有元素全为零，则此行列式值为零.

推论 3　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

第 i 行提出公因子 k，记作 $r_i \div k$，第 j 列提出公因子 k，记作 $c_j \div k$.

性质 4　如果行列式中有两行(列)对应元素成比例，则行列式等于零.

性质 5　如果行列式 D 的某一行(列)的元素都是两数之和，则行列式可表为两个行列式之和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 把行列式的某一行(列)的各元素乘以数 k,然后加到另一行(列)的对应元素上去,则行列式不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (j\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (i \neq j)$$

以数 k 乘第 i 行(列)加到第 j 行(列)上,记作 $r_j+kr_i(c_j+kc_i)$.

这些性质证明从略.利用这些性质可以简化行列式的计算.

例 1.4 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

解 利用行列式的性质将其化成上(下)三角行列式,然后求出主对角线上元素的

乘积.

$$\begin{vmatrix}5&4&2&1\\2&3&1&-2\\-5&-7&-3&9\\1&-2&-1&4\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix}1&-2&-1&4\\2&3&1&-2\\-5&-7&-3&9\\5&4&2&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-5r_1]{\substack{r_3+5r_1\\r_2-2r_1}}$$

$$\begin{vmatrix}1&-2&-1&4\\0&7&3&-10\\0&-17&-8&29\\0&14&7&-19\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{r_4-2r_2\\r_3+2r_2}}\begin{vmatrix}1&-2&-1&4\\0&7&3&-10\\0&-3&-2&9\\0&0&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+2r_3}$$

$$\begin{vmatrix}1&-2&-1&4\\0&1&-1&8\\0&-3&-2&9\\0&0&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+3r_2}\begin{vmatrix}1&-2&-1&4\\0&1&-1&8\\0&0&-5&33\\0&0&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_3-c_4}$$

$$\begin{vmatrix}1&-2&-5&4\\0&1&-9&8\\0&0&-38&33\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-38$$

例 1.5 计算

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

解 这个行列式的特点是各行(列)的四个元素之和都是 6. 将第二、第三、第四行同时加到第一行上去,有

$$D=\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\div 6}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_3-r_1\\r_2-r_1}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=6\times1\times2\times2\times2=48$$

此例的方法可以推广到一般的情形,如例 1.6.

例 1.6 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解 用例 1.5 同样的方法,将第 2 行,第 3 行,…,第 n 行同时加到第一行上去,有

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1\div[a+(n-1)b]}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_2-br_1}]{\substack{r_n-br_1\\ \vdots \\ r_3-br_1}}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

此例也可通过对列用同样的方法来计算,留给读者自己去做.

例 1.7 求证

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

证明 对左边的行列式利用性质 5,可得

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$