飞思考试中心
Fecit Examination Center

研究生入学考试考点解析与真题详解

——高等代数

飞思教育
FECIT-Education
www.fecit.net
研究生入学考试试题研究组 主编
飞思教育产品研发中心 监制

精编最新、最全的考研真题，知识更新

分类精析、精讲各个考点，收效更好

立体化辅导模式，效率更高

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

飞思考试中心
Fecit Examination Center

研究生入学考试考点解析与真题详解

——高等代数

研究生入学考试试题研究组 主编
飞思教育产品研发中心 监制

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内容简介

本书对全国 50 余所高校近几年研究生入学考试真题按主流高校指定考研教材的章节分类编排，并对真题进行详细分析，对相关知识点进行详尽的介绍。通过对真题的分类、分析和相关考点的理论链接，使考生能够熟悉考试的内容，抓住考试的重点与难点，掌握考试中经常出现的题型和每种题型的解法，同时也使考生熟悉专家们的出题思路、命题规律，从而提高应试复习的效率和命中率。本书最大特色是以“真题分析”为主线贯穿全书，以“考点点拨”、“理论链接”等特色段落为辅线，帮助读者巩固考试所涉及的重点与难点。

本书的特点：

- 以真题为纽带，带动考点。本书的结构不是传统的“考点→例题→习题”，而是采用“真题→分析→考点”的方式。实践证明，这种“将考点融入考题，以考题学习考点”的方式应试针对性极强，特别适合考生在短时间内突破过关。
- 真题分类编排，分析到位。本书将近几年真题按主流教材的章节分类编排，以方便读者分类复习，专项攻克。所有真题均给出详尽的分析，便于考生把握完整的解题思路，快速提升应试能力。

另外，本书还提供了 3 套全真样题，便于考生考前实战冲刺，体验真实训练。

本书具有真题丰富、考点全面、分析透彻、严谨实用等特点，非常适合广大应试考生，也可作为各类研究生入学考试培训班的辅助教材，以及高等院校师生的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

研究生入学考试考点解析与真题详解.高等代数 / 研究生入学考试试题研究组主编. —北京：电子工业出版社，2008.9
（飞思考试中心）
ISBN 978-7-121-07262-8

I. 研… II.研… III.高等代数－研究生－入学考试－自学参考资料 IV.G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 125441 号

责任编辑：侯丽平
印　　刷：北京市海淀区四季青印刷厂
装　　订：三河市万和装订厂
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：850×1168　1/16　印张：27.5　字数：1259.3 千字
印　　次：2008 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：5000 册　　定　价：48.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

编审委员会

丛书主编 何光明　吴　婷

本书主编 胡　邦

本书主审 汪志宏

编委名单（以姓氏笔画为序）

孔慧芳、王一非、王国全、王衍军、刘　伟、孙　坤、孙　虹、孙　涵、江　兵、祁　航、许　勇、许　娟、邢　肖、严云洋、何光明、何杨光、何　秀、何　涛、吴　金、吴　婷、吴　蕾、应艳杰、张　建、张建林、李千目、李　海、杨　明、杨帮华、杨　萍、汪志宏、陈玉旺、陈应松、陈　还、陈　智、单忆南、孟祥印、范荣钢、侯金龙、姚昌顺、姜萍萍、胡　邦、赵传申、骆　健、唐　萨、耿永才、钱阳勇、黄学海、温阳东、童爱红、葛武滇、董　图、廖春和、蔡　浩

出版说明

知己知彼　百战百胜

随着改革开放和现代化建设事业的需要，特别是“科教兴国”、“知识经济”等战略性措施日益广泛实施，国家机关、企事业单位及各行各业对高素质、高学历人才的需求量越来越大。同时，随着高等教育的大众化，本科人才越来越多，相当一部分大学毕业生不易找到理想工作，很多人希望取得更高的学历，以增强自己的竞争实力，因此，近年来“考研热”持续升温。研究生入学考试现已成为国内影响最大、参加人数最多的国家级选拔高层次人才的水平考试。

1. 编写目的

研究生入学考试与在校大学生的期中或期末考试相比，其深度、广度与难度大大增加，试题综合性强，着重知识的运用，竞争激烈，淘汰率高。同时，考研作为一种选拔性水平考试，试题规范，规律性很强，不少题型反复出现，把这些反复出现的试题整理归类，以节省考生宝贵的复习时间，对考生迎考大有帮助。飞思考试中心为了更好地服务于考生，引导考生在较短时间内掌握解题要领，并顺利通过研究生入学考试，我们组织了一批具有多年教学经验的一线教师，将他们多年的教学经验进行浓缩，并在深入剖析近几年全国 50 余所著名院校研究生入学考试专业课试题的基础上，特别编写了这套《研究生入学考试考点解析与真题详解》系列图书。

2. 本系列图书简介

《研究生入学考试考点解析与真题详解》系列图书首批推出以下 12 本：

（1）研究生入学考试考点解析与真题详解——操作系统
（2）研究生入学考试考点解析与真题详解——数据结构与算法设计
（3）研究生入学考试考点解析与真题详解——微机原理与接口技术
（4）研究生入学考试考点解析与真题详解——自动控制原理
（5）研究生入学考试考点解析与真题详解——信号与系统
（6）研究生入学考试考点解析与真题详解——高等代数
（7）研究生入学考试考点解析与真题详解——数学分析
（8）研究生入学考试考点解析与真题详解——数字电子技术
（9）研究生入学考试考点解析与真题详解——模拟电子技术
（10）研究生入学考试考点解析与真题详解——电路
（11）研究生入学考试考点解析与真题详解——机械原理与机械设计
（12）研究生入学考试考点解析与真题详解——硬件分册（数字逻辑、计算机组成原理、计算机系统结构）

3. 本系列图书特色

- **真题量大面广，最新、最全。**书中收集了近年来全国 50 余所著名院校研究生入学考试专业课试题，题量大、内容新，从而便于读者摸清考试新趋向，预测考点，紧跟考试动态。
- 以真题为纽带，带动考点。本系列图书的结构不是传统的“考点→例题→习题”，而是采用“真题→分析→考点”的方式。实践证明这种“**将考点融入考题，以考题学习考点**”的方式应试针

对性极强，特别适合考生在短时间内突破过关。

- **真题分类编排，方便复习。** 书中对将近几年 50 余所著名院校考研真题进行深入剖析，然后按主流高校指定考研教材的章节分类编排，从而有利于考生分类复习，专项攻克，同时也便于考生更好地理解和掌握考试的内容、范围及难度，便于考生把握命题规律，快速提升应试能力。
- **题型分析透彻，举一反三。** 本系列图书重点定位在介绍解题方法与技巧上，不仅授人以“鱼”，更在于授人以“渔”。书中对例题进行细致深入的分析、完整的解答和点评扩展，能让考生达到触类旁通、举一反三之功效。
- **立体化辅导模式，提高效率。** 以“真题分析”为主线贯穿全书，以“考点点拨”、“理论链接”等特色段落为辅线，帮助考生巩固考试所涉及的重点与难点。
- **名师精心锤炼，权威性强。** 本系列图书由名师主笔，亲授解题技巧。内容全面翔实，文字表达简洁明了，层次清晰，结构严谨，特别突出解题方法，强调知识的综合与提高，导向准确。
- **考点浓缩精解，便于记忆。** 将指定的考试内容进行浓缩，用言简意赅的语言精讲考试要点、重点和难点。
- **全真试题实战，自测提高。** 书末均给出 3 套全真考研预测试卷，并附上详细的解答，包括分析、解答和注解，便于考生考前演练，自测提高。

4．本书阅读指南

本书系统全面地分析了近几年高等代数考研题目的解题思路，并给出了翔实的参考答案，读者可以充分地了解各个学校考研题目的难度，查缺补漏，有针对性地提高自己的高等代数水平。本书共分 11 章。

第 1 章主要介绍数域、与多项式有关的性质与定理、多项式的根和 Eisenstein 判别法的应用。

第 2 章主要介绍行列式的性质与计算，Cramer 法则、Laplace 定理与 Vander Monde 行列式的应用。

第 3 章主要介绍向量空间及线性相关性，线性方程组解的判别与矩阵的秩，以及线性方程组解的结构。

第 4 章主要介绍矩阵的运算、乘积、行列式、伴随与逆，以及矩阵的秩、矩阵相抵标准形的应用与矩阵的分块。

第 5 章主要介绍二次型与其标准形及规范形，矩阵的合同，正定二次型，以及正定、半正定、负定矩阵。

第 6 章主要介绍线性空间的定义、维数与基，坐标变换，线性子空间的和、交、并、直和及之间的关系，以及同构的概念。

第 7 章主要介绍线性映射、线性变换与矩阵，特征值、特征向量，矩阵的对角化与矩阵的幂，线性变换的值域、核与逆，不变子空间、Jordan 标准形、最小多项式与特征多项式。

第 8 章主要介绍 λ 矩阵的标准形，矩阵相似的条件，行列式因子、不变因子、初等因子与矩阵的 Jordan 标准形，以及矩阵的有理标准形。

第 9 章主要介绍欧氏空间、内积、标准正交基与正交矩阵，Gram 矩阵，正交补，正交变换、正规变换、酉变换，以及正规变换在标准正交基下的矩阵表示。

第 10 章主要介绍线性函数与对偶空间，双线性函数，以及对称型和交错型。

第 11 章提供了三套模拟题，并给出详尽的分析解答，供读者考前实战演练、自测提高。

5. 读者对象

本系列图书特别适合于希望在较短时间内取得较大收获的广大应试考生，也可作为各类研究生入学考试培训班的辅助教材，以及高等院校师生的教学参考书。

6. 互动交流

读者的进步是我们的心愿。如果您发现书中有任何疑惑之处，请与我们交流。联系信箱：gmkeji@163.com。

7. 关于作者

本系列图书由从事专业课第一线教学的名师分工编写。他们长期从事这方面的教学和研究工作，积累了丰富的经验，对考研颇有研究（其中大多数编写者多年参加研究生入学试题命题及阅卷工作）。本书由胡邦任主编，汪志宏主审。另外参与这套丛书组织、编写、审校和资料收集等工作的还有（按姓氏笔画排名）：孔慧芳、王国全、江兵、许勇、许娟、严云洋、何光明、何杨光、吴金、吴婷、张建林、李千目、李海、杨明、杨萍、汪志宏、陈玉旺、陈智、范荣钢、姚昌顺、赵传申、骆健、钱阳勇、温阳东、童爱红、葛武滇等。

8. 特别致谢

本系列图书列图书在编写过程中参考了全国硕士研究生入学考试真题，在此对本系列图书所引用试题的出题老师和有关单位表示真诚的感谢。

感谢电子工业出版社对这套书的大力支持，感谢为这套书的出版做出贡献与支持的各界人士。由于时间仓促，学识有限，书中不妥之处，敬请广大读者指正。

编　委　会

飞思教育产品研发中心

联系方式

咨询电话：（010）88254160　　88254161-67

电子邮件：support@fecit.com.cn

服务网址：http://www.fecit.com.cn　　http://www.fecit.net

通用网址：计算机图书、飞思、飞思教育、飞思科技、FECIT

目录

CONTENTS

第 1 章 多项式

考点 1：数域、整除、最大公因式与互素多项式

考点点拨： 主要考查数域的定义、多项式之间整除与辗转相除法、最大公因式的定义和性质，以及互素多项式的性质.

【试题 1-1-1】（上海交通大学，2002 年）设 $f_1(x)=af(x)+bg(x), g_1(x)=cf(x)+dg(x)$，且 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

证明：$(f(x),g(x))=(f_1(x),g_1(x))$.

分析： 注意对最大公因式定义的理解.

证明： 令 $d(x)=(f(x),g(x))$，$d_1(x)=(f_1(x),g_1(x))$，显然有 $d(x)\mid f(x), d(x)\mid g(x)$. 由 $f_1(x),g_1(x)$ 可以由 $f(x),g(x)$ 线性表出，可知 $d(x)\mid f_1(x), d(x)\mid g_1(x)$，那么有 $d(x)\mid d_1(x)$.

由于 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$，则矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 可逆，那么可以求出它的逆阵，使得 $f(x),g(x)$ 可以被 $f_1(x),g_1(x)$ 线性表出，与上面同样的过程可以证得 $d_1(x)\mid d(x)$，又由 $d(x),d_1(x)$ 的首项系数都为 1，可知：

$$d(x)=d_1(x)$$

获证

【试题 1-1-2】（上海交通大学，2004 年）假设 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为次数不超过 3 的首项系数为 1 的互异多项式. 假设 x^4+x^2+1 整除 $f_1(x^3)+x^4f_2(x^3)$. 试求 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的最大公因式.

分析： 对余数定理及其推论的考查.

解答： 由 $(x^2-1)(x^4+x^2+1)=x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)$ 可知，x^4+x^2+1 的 4 个根是 1 和 -1 的非实数的立方根，取 1 的两个立方根 $e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}$ 分别代入方程 $f_1(x^3)+x^4f_2(x^3)=h(x)(x^4+x^2+1)$，可得方程组：

$$\begin{cases} f_1(1)+e^{\frac{2\pi i}{3}}f_2(1)=0 \\ f_1(1)+e^{\frac{4\pi i}{3}}f_2(1)=0 \end{cases}$$

解方程组易得 $\begin{cases} f_1(1)=0 \\ f_2(1)=0 \end{cases}$，即 $x-1$ 是多项式 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的一个公因式.

同理取 -1 的两个立方根分别代入方程 $f_1(x^3)+x^4f_2(x^3)=h(x)(x^4+x^2+1)$. 易解得 $\begin{cases} f_1(-1)=0 \\ f_2(-1)=0 \end{cases}$，即 $x+1$ 是多项式 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的一个公因式.

于是 $(x+1)(x-1)$ 是多项式 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的一个公因式，由于 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为次数不超过 3 的首项系数为 1 的互异多项式，可知 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的最大公因式只能是 $(x+1)(x-1)$.

理论链接

在解这类题的过程中经常用到以下两个结论.

（1）余数定理：在 $K[x]$ 中，用 $x-a$ 去除 $f(x)$ 所得的余式是 $f(a)$.

（2）余数定理的推论：在 $K[x]$ 中，$x-a$ 整除 $f(x)$ 当且仅当 $f(a)=0$.

【试题 1-1-3】（浙江大学，2003 年）设 $f(x)$ 是一个整系数多项式. 证明：若存在一个偶数 a 及一个奇数 b，使得 $f(a)$ 与 $f(b)$

都是奇数，则 $f(x)$ 没有整数根.

分析：将整数分为奇数和偶数两类分别证明.

证明：若 x 为偶数，由 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$（其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 均为整数），有

$$f(x)-f(a)=a_n(x^n-a^n)+\cdots+a_1(x-a)$$

由 a 是偶数显然可知 $f(x)-f(a)$ 是一个偶数．于是 $f(x)$ 与 $f(a)$ 同奇偶，也是一个奇数，于是 $f(x)\neq 0$，即偶数不可能是 $f(x)$ 的根.

若 x 为奇数，同理由 $f(x)$ 的表达式可得 $f(x)-f(b)=(x-b)k(x)$（其中 $k(x)$ 是整数），可知 $f(x)-f(b)$ 是一个偶数．于是 $f(x)$ 与 $f(b)$ 同奇偶，也是一个奇数，于是 $f(x)\neq 0$，即奇数不可能是 $f(x)$ 的根.

综合上面两个结论可得 $f(x)$ 没有整数根.

【试题 1-1-4】（浙江大学，2006 年）设 P 为数域，$f_i=f_i(x)\in P[x], g_i=g_i(x)\in P[x], i=1,2$.

证明：$(f_1,g_1)(f_2,g_2)=(f_1f_2,f_1g_2,g_1f_2,g_1g_2)$

分析：考查多个多项式的最大公因式的概念及互素多项式的性质.

证明：设 $d_1=(f_1,g_1), d_2=(f_2,g_2)$，有

$$\begin{aligned}(f_1f_2,f_1g_2,g_1f_2,g_1g_2)&=((f_1f_2,f_1g_2),(g_1f_2,g_1g_2))\\&=(f_1d_2,g_1d_2)\\&=(f_1,g_1)d_2\\&=(f_1,g_1)(f_2,g_2)\end{aligned}$$

获证

理论链接

互素多项式的性质主要有以下几个.

（1）若 $f_1(x)\mid g(x), f_2(x)\mid g(x)$，且 $(f_1(x),f_2(x))=1$，则

$$f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$$

（2）若 $(f(x),g(x))=1$，且 $f(x)\mid g(x)h(x)$，则

$$f(x)\mid h(x)$$

（3）设 $(f(x),g(x))=d(x)$，$f(x)=f_1(x)d(x)$，$g(x)=g_1(x)d(x)$，则

$$(f_1(x),g_1(x))=1$$

（4）设 $(f(x),g(x))=d(x)$，则

$$(t(x)f(x),t(x)g(x))=t(x)d(x)$$

（5）若 $(f_1(x),g(x))=1$，$(f_2(x),g(x))=1$，则

$$(f_1(x)f_2(x),g(x))=1$$

另外，关于多个多项式的最大公因式的概念，可以理解为：

$$(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))=((f_1(x),\cdots,f_{n-1}(x)),f_n(x))$$

【试题 1-1-5】（哈尔滨工业大学，2005 年）设 $f(x),g(x)$ 都是实数域 $\mathbf{R}$ 上的多项式，$a\in\mathbf{R}$.

（1）证明：$g(x)-g(a)\mid f(g(x))-f(g(a))$.

（2）问 $x^3-a\mid f(x^3)-f(a)$ 是否成立，为什么？

分析：对余数定理及其推论的灵活考查.

解答：（1）令 $y=g(x)$，考虑多项式

$$h(y)=f(y)-f(g(a))$$

由

$$h(g(a))=f(g(a))-f(g(a))=0$$

可知

$$(y-g(a))\mid h(y)$$

即

$$g(x)-g(a)\mid f\left(g(x)\right)-f\left(g(a)\right)$$

获证

（2）令 $b=\sqrt[3]{a}\in\mathbf{R}$，注意用到上一问的结论，将上一问中的 a 换成这里的 b，将上一问的 $g(x)$ 换成这里的 x^3，可得

$$x^3-a\mid f\left(x^3\right)-f\left(a\right)$$

【试题 1-1-6】（哈尔滨工业大学，2006 年）已知 $f(x),g(x)$ 是数域 P 上两个次数大于零的多项式，且存在 $u_1(x),v_1(x)\in P[x]$，使得 $u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=1$，问是否存在 $u(x),v(x)\in P[x]$，使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$，$\partial(u(x))<\partial(g(x))$，$\partial(v(x))<\partial(f(x))$.

如果存在，这样的 $u(x),v(x)$ 是唯一的吗？说明理由.

分析：对带余除法的考查.

解答：由 $u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=1$，若有 $u_1(x)$ 的次数大于 $g(x)$ 的次数，由带余除法有

$$u_1(x)=g(x)q(x)+u(x),\partial(u(x))<\partial(g(x))$$

代入上一式有

$$f(x)(g(x)q(x)+u(x))+g(x)v_1(x)=1$$

即

$$f(x)u(x)+g(x)(f(x)q(x)+v_1(x))=1$$

令 $v(x)=f(x)q(x)+v_1(x)$，则有

$$\partial(v(x))>\partial(f(x))$$

否则由比较次数可知上式将不可能成立.

关于唯一性的证明，可以假设 $u_2(x)$，$v_2(x)$ 也满足条件，那么有

$$f(x)u_1(x)+g(x)v_1(x)=f(x)u_2(x)+g(x)v_2(x)=1$$

易得

$$f(x)(u_1(x)-u_2(x))=g(x)(v_2(x)-v_1(x))$$

由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素，可知 $g(x)\mid(u_1(x)-u_2(x))$.

又由 $\partial(u_1(x)-u_2(x))<\partial(g(x))$，可得 $u_1(x)-u_2(x)=0$，即 $u_1(x)=u_2(x)$，这时有

$$v_1(x)=v_2(x)$$

证毕

【试题 1-1-7】（天津大学，2002 年）（1）如果 $d(x)|f(x)$，$d(x)|g(x)$，且 $d(x)$ 为 $f(x),g(x)$ 的一个组合. 证明：$d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

（2）设 $f(x)=x^3+(1+k)x^2+2x+2l$ 与 $g(x)=x^3+kx^2+l$ 的最大公因式是一个二次多项式，求 k、l 的值.

分析：对最大公因式概念的考查.

解答：（1）显然 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式，现在要证明它是最大公因式.

任取 $h(x)\mid f(x)$，且 $h(x)\mid g(x)$，由于 $d(x)$ 可以表示为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合，那么有 $h(x)\mid d(x)$，即 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

获证

（2）由于 $f(x),g(x)$ 与 $f(x),f(x)-g(x)$ 有相同的最大公因式，设

$$h(x)=f(x)-g(x)=x^2+2x+l$$

由 $h(x)\mid g(x)$ 利用多项式之间的除法可得到关于 k、l 的两组解分别为 $\begin{cases}k=3\\l=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=2\\l=0\end{cases}$，将这两组解分别代入 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的表达式，可以证明都是满足条件的解.

理论链接

解这类题的过程中要注意以下结论：

在 $K[x]$ 中，如果有等式

$$f(x)=h(x)g(x)+r(x)$$

成立，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式的集合等于 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的最大公因式的集合.

【试题 1-1-8】（天津大学，2002 年）设 $f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$.

证明：若 $(f(x),g(x))=d(x)$ 且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不全为零，则 $(f_1(x),g_1(x))=1$；反之若 $(f_1(x),g_1(x))=1$，则 $d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的一个最大公因式.

分析：最大公因式性质的推理.

证明：若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中有一个为 0，例如 $f(x)=0$，那么 $d(x)=g(x)$，可取 $f_1(x)=g_1(x)=1$，显然结论成立.

若都不为零，由 $(f(x),g(x))=d(x)$，那么存在 $u(x),v(x)$ 使得

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

成立，等式两边同时除以 $d(x)$，可得

$$u(x)f_1(x)+v(x)g_1(x)=1$$

即 $(f_1(x),g_1(x))=1$ 成立.

反之，若有 $(f_1(x),g_1(x))=1$，则有 $u(x)f_1(x)+v(x)g_1(x)=1$，等式两边同时乘以 $d(x)$，有

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

即 $d(x)$ 可以表示为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的线性组合，显然结论 $d(x)$ 是 $f(x)$, $g(x)$ 的一个最大公因式成立.

【试题 1-1-9】（西安交通大学，2004 年）证明：数域 P 上的一元多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互质（即互素）的充要条件是存在 P 上的多项式 $u(x),v(x)$ ，使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$.

分析：在一般的高等代数书上都可以找到此题答案，此处略.

【试题 1-1-10】（北京航空航天大学，2003 年）设 $h(x),f(x),g(x)$ 均为数域 F 上的一元多项式，若 $h(x)\mid f(x)$ ，而 $h(x)$ 不整除 $g(x)$. 证明： $h(x)$ 不整除 $f(x)+g(x)$.

分析：可以采用反证法.

证明：若 $h(x)\mid(f(x)+g(x))$ ，由题知 $h(x)\mid f(x)$ ，由

$$g(x)=(f(x)+g(x))-f(x)$$

易得 $h(x)\mid g(x)$ ，与题设相矛盾.

获证

【试题 1-1-11】（华南理工大学，2005 年）证明：如果 $(f(x),g(x))=1$ ，那么

$$(f(x)g(x)(f(x)+g(x)),f(x)+f(x)g(x)+g(x))=1$$

分析：对互素多项式性质的灵活运用的考查.

解答：由已知条件有 $(f(x),f(x)+g(x))=1$ ， $(g(x),f(x)+g(x))=1$ ，由多项式互素的性质有

$$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$$

于是有

$$(f(x)g(x),f(x)g(x)+f(x)+g(x))=1$$
$$(f(x)+g(x),f(x)g(x)+f(x)+g(x))=1$$

综合上述两个等式又由多项式互素的性质有

$$(f(x)g(x)(f(x)+g(x)),f(x)g(x)+f(x)+g(x))=1$$

获证

【试题 1-1-12】（华南理工大学，2006 年）设 $f(x),g(x)$ 是数域 F 上的多项式.

证明： $f(x)\mid g(x)$ 当且仅当对于任意的大于 1 的自然数， $f^n(x)\mid g^n(x)$.

分析：对不可约分解的考查.

证明：必要性显然成立，下证充分性.

设 $g(x)$ 在数域 F 上的不可约分解为

$$g(x)=cp_1(x)^{e_1}p_2(x)^{e_2}\cdots p_k(x)^{e_k}$$

其中 $p_i(x)$ 为互不相同的不可约多项式，则

$$g^n(x)=c^np_1(x)^{ne_1}p_2(x)^{ne_2}\cdots p_k(x)^{ne_k}$$

若有 $f(x)^n\mid g(x)^n$ ，则

$$f^n(x)=dp_1(x)^{nf_1}p_2(x)^{nf_2}\cdots p_k(x)^{nf_k}\text{，}\quad 0\leqslant f_i\leqslant e_i\text{，}$$

其中 d 是某个常数，因此有

$$f(x)\mid g(x)$$

证毕

【试题 1-1-13】（大连理工大学，2004 年）设 $f(x),g(x)$ 是有理系数多项式，且 $f(x),g(x)$ 在复数域内无公共根，则 $f(x),g(x)$ 在有理数域上的最大公因式是________.

解答：答案是 1 .

因为 $f(x)$, $g(x)$ 在复数域内无公共根，那么它们在复数域上的最大公因式为 1，又由有理数域属于复数域，那么由多项式的性质可知它们在复数域上的最大公因式与在有理数域上的最大公因式相同，都为 1 .

【试题 1-1-14】（大连理工大学，2004 年）设 $\mathbf{R},\mathbf{Q}$ 分别表示实数域和有理数域， $f(x),g(x)$ 属于 $\mathbf{Q}[x]$. 证明：

（1）若在 $\mathbf{R}[x]$ 中有 $g(x)\mid f(x)$ ，则在 $\mathbf{Q}[x]$ 中也有 $g(x)\mid f(x)$.

（2） $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\mathbf{Q}[x]$ 中互素，当且仅当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}[x]$ 中互素.

（3）设 $f(x)$ 是 $\mathbf{Q}[x]$ 中的不可约多项式，则 $f(x)$ 的根都是单根.

分析：对多项式基本性质的考查.

证明：（1）若在 $\mathbf{R}[x]$ 上 $g(x)\mid f(x)$ ，那么存在 $h(x)\in\mathbf{R}[x]$ ，使得

$$f(x)=g(x)h(x)$$

由 $f(x),g(x)\in\mathbf{Q}[x]$ ，不妨设

$$g(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$$
$$h(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0$$
$$f(x)=c_{m+n}x^{m+n}+\cdots+c_1x+c_0$$

不妨设 $b_i(i=0,1,\cdots,m)$ 中，从 $i=0$ 开始第一个不为有理数的为 b_k.

那么由 $c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_kb_0$，可知 c_k 必不为有理数，这与 $f(x)\in\mathbf{Q}[x]$ 相矛盾．于是有 $h(x)\in\mathbf{Q}[x]$，即在 $\mathbf{Q}[x]$ 上 $g(x)\mid f(x)$.

（2）必要性显然，下证充分性.

若 $f(x),g(x)$ 在有理数域上不互素，不妨设 $d(x)=(f(x),g(x))$，那么存在有理数域上的两个多项式 $u(x),v(x)$，使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$，且在有理数域上有

$$d(x)\mid f(x),d(x)\mid g(x)$$

将 $d(x),f(x),g(x)$ 看做实数域上的多项式，那么在实数域上有 $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的一个最大公因式，显然在实数域上 $f(x),g(x)$ 不互素，由其逆否命题知充分性成立.

（3）由 $f(x)$ 是有理数域上的不可约多项式，那么在有理数域上有 $(f(x),f'(x))=1$（否则与 $f(x)$ 是不可约多项式相矛盾)，由（2）中的结论知在复数域上有 $(f(x),f'(x))=1$ 成立，这意味着在复数域上 $f(x)$ 没有重根，获证.

理论链接

> 需要注意到的一个结论是：
> 在 $K[x]$ 中次数大于零的多项式 $f(x)$ 没有重因式的充分必要条件是 $(f(x),f'(x))=1$.

【试题 1-1-15】（大连理工大学，2005 年） 设 $f(x),g(x)$ 是数域 P 上的多项式，证明：在数域 P 上，若 $f^3(x)\mid g^3(x)$，则 $f(x)\mid g(x)$.

分析：前面有类似题目，此处略.

【试题 1-1-16】（大连理工大学，2007 年） $f(x),g(x),h(x)$ 是实系数多项式，如果 $f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$，则 $f(x)=g(x)=h(x)=0$.

分析：对多项式性质的灵活运用的考查.

证明：由 $f^2(x)=x(g^2(x)+h^2(x))$，可知 $x\mid f^2(x)$，易推得 $x\mid f(x)$.

于是有 $f^2(x)=x^2f_1^2(x)$，代入方程并在两边约去 x 有

$$xf_1^2(x)=g^2(x)+h^2(x)$$

于是有 $x\mid(g^2(x)+h^2(x))$，若多项式 $g(x)$ 或 $h(x)$ 中的常数项不为零的话，都可以推出

$$x\ \ (g^2(x)+h^2(x))$$

于是有

$$g^2(x)+h^2(x)=x^2(g_1^2(x)+h_1^2(x))$$

代入上式并约去 x 有

$$f_1^2(x)=x(g_1^2(x)+h_1^2(x))$$

这样又回到原来的方程，所不同的是 $f_1(x),g_1(x),h_1(x)$ 比 $f(x),g(x),h(x)$ 的次数要小 1.

于是经过有限次后必可以使得方程的左边为零次多项式，即为某个常数 c，使得

$$c=x(g_k^2(x)+h_k^2(x))$$

比较两边的次数易得 $c=0$，并代入方程有

$$g_k^2(x)+h_k^2(x)=0$$

于是

$$g_k(x)=h_k(x)=0$$

那么 $f(x),g(x),h(x)$ 都是某个多项式乘以数 0.

由此可推得

$$f(x)=g(x)=h(x)=0$$

证毕

【试题 1-1-17】（大连理工大学，2007 年） 证明多项式 $x^d-1\mid x^n-1$ 的充分必要条件是 $d\mid n$.

分析：对多项式整除的考查.

证明：充分性显然，下证必要性.

若 $n=dq+r,0<r<d$，则

$$x^n-1=x^n-x^r+x^r-1=x^r(x^{dq}-1)+(x^r-1)$$

注意，$x^{dq}-1$ 可被 x^d-1 整除，而 x^r-1 不能被 x^d-1 整除，于是 x^n-1 不能被 x^d-1 整除.

由其逆否命题可知必要性成立.

证毕

【试题 1-1-18】（东南大学，2002 年） 证明：若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素，并且 $f(x),g(x)$ 次数都大于零，那么可以选取 $u(x),v(x)$，使 $\partial(u(x))<\partial(g(x)),\partial(v(x))<\partial(f(x))$，且有

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

并且这样的 $u(x),v(x)$ 是唯一的，这里 $\partial(f(x))$ 表示 $f(x)$ 的次数.

分析：前面有类似题目，此处略.

【试题 1-1-19】（东南大学，2003 年）$f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1, g(x)=x^3+x^2-x-1$ 的最大公因式 $(f(x),g(x))=$________.

分析：对辗转相除法的考查.

解答：答案是 $x+1$.

【试题 1-1-20】（东南大学，2005 年）设 F 是一数域，多项式 $f(x),g(x)\in F[x]$ 具有性质：当 $h(x)\in F[x]$，且 $f(x)\mid h(x), g(x)\mid h(x)$ 时，必有 $f(x)g(x)\mid h(x)$.

证明：$(f(x),g(x))=1$.

证明：若取 $l(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小公倍式，那么显然有 $f(x)\mid l(x), g(x)\mid l(x)$，由题设可知 $f(x)g(x)\mid l(x)$. 因为 $l(x)$ 是最小公倍式，显然有 $l(x)\mid f(x)g(x)$.

于是

$$\partial(l(x))=\partial(f(x)g(x))$$

又有 $f(x)g(x)=cl(x)(f(x),g(x))$，其中 c 为某个常数.

比较方程两边的次数有

$$\partial((f(x),g(x)))=0$$

即

$$(f(x),g(x))=1$$

获证

理论链接

注意，可以由多项式的不可约分解得到以下结论：

对于 $K[x]$ 上的两个多项式 $f(x),g(x)$，若它们的最小公倍式和最大公因式分别记做 $[f(x),g(x)]$ 和 $(f(x),g(x))$，那么结论 $f(x)g(x)=c\,[f(x),g(x)]\,(f(x),g(x))$ 成立.

【试题 1-1-21】（北京理工大学，2003 年）设多项式 $f(x),g(x),h(x)$ 有

$$f(x^5)+xg(x^5)+x^2h(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)k(x)$$

证明：$x-1$ 是 $f(x),g(x),h(x)$ 的一个公因式.

分析：对余数定理及方程组理论的综合考查.

证明：若取 $\varepsilon=e^{i\frac{2\pi}{5}}$，那么 $\varepsilon,\varepsilon^2,\varepsilon^3,\varepsilon^4$ 是 1 的四个不同的 5 次单位根，将它们分别代入方程可使得方程的右边为零，于是有方程组

$$\begin{pmatrix}1&\varepsilon&\varepsilon^2\\1&\varepsilon^2&\varepsilon^4\\1&\varepsilon^3&\varepsilon^6\\1&\varepsilon^4&\varepsilon^8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(1)\\g(1)\\h(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

系数矩阵的秩

$$r\left(\begin{pmatrix}1&\varepsilon&\varepsilon^2\\1&\varepsilon^2&\varepsilon^4\\1&\varepsilon^3&\varepsilon^6\\1&\varepsilon^4&\varepsilon^8\end{pmatrix}\right)=3$$

（实际上，其中的一个 3 阶子式 $\begin{vmatrix}1&\varepsilon&\varepsilon^2\\1&\varepsilon^2&\varepsilon^4\\1&\varepsilon^3&\varepsilon^6\end{vmatrix}$ 是一个 Vander Monde 行列式，显然由 $\varepsilon,\varepsilon^2,\varepsilon^3$ 互不相等可知它的值不为零，即知系数矩阵的秩为 3），于是方程组仅有零解，可得

$$\begin{pmatrix}f(1)\\g(1)\\h(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

由余数定理可知 $x-1$ 是 $f(x),g(x),h(x)$ 的一个公因式.

证毕

【试题 1-1-22】（北京理工大学，2004 年）给定不全为零的多项式 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$，证明：存在六个多项式 $g_1(x),g_2(x),g_3(x)$，$h_1(x),h_2(x),h_3(x)$ 使

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$$

这里 $(f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ 表示 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式.

分析：*此题在许以超《线性代数与矩阵论》一书中的第 1 章中出现过，注意辗转相除法的应用.*

证明：不妨设 $d(x)=(f_1(x), f_2(x), f_3(x))$，将要证的等式两边同时除以 $d(x)$ 有

$$\begin{vmatrix} \frac{f_1(x)}{d(x)} & \frac{f_2(x)}{d(x)} & \frac{f_3(x)}{d(x)} \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} = 1$$

显然有

$$\left(\frac{f_1(x)}{d(x)}, \frac{f_2(x)}{d(x)}, \frac{f_3(x)}{d(x)}\right) = 1$$

于是只需证明 $(f_1(x), f_2(x), f_3(x))=1$ 的情况即可.

不妨设 $l(x)=(f_1(x), f_2(x))$，那么有

$$(l(x), f_3(x)) = 1$$

注意到对矩阵做第三类 x -矩阵的初等变换不改变矩阵的行列式的值.

考虑以下向量

$$(f_1(x), f_2(x), f_3(x))$$

对这个向量的第一、二列做第三类 x -矩阵的初等列变换，利用 $f_1(x), f_2(x)$ 之间的辗转相除法必可将其中的一个化为 $c_1 l(x)$（其中 c_1 为某个常数）；然后将 $c_1 l(x)$ 和第三列 $f_3(x)$ 做第三类 x -矩阵的初等列变换，可使得这个三维向量中的一个化为某个常数 $c\neq 0$；将这个 c 与其他的两列做第三类 x -矩阵的初等列变换，显然可以将其他两列化为零（记这时的三维行向量为 α）；然后将这个 c 置换到第一列，然后除以 c 即可得向量 $(1\quad 0\quad 0)$.

做矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注意到它的行列式为1，将它的第一行做初等列变换化为 α，显然得到的矩阵的行列式值是这个矩阵的行列式值乘以某个倍数 $c_0\neq 0$，然后对这个第一行为 α 的矩阵做与上面过程相反的第三类 x -矩阵的初等列变换，可得矩阵

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) & g_3'(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{pmatrix}$$

注意到第三类 x -矩阵的初等列变换的逆变换仍是第三类 x -矩阵的初等列变换，它也不改变矩阵的行列式的值，那么有

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) & g_3'(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} = c_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = c_0$$

将 c_0 除到行列式里面，令

$$g_1(x)=\frac{g_1'(x)}{c_0}, g_2(x)=\frac{g_2'(x)}{c_0}, g_3(x)=\frac{g_3'(x)}{c_0}$$

显然有

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} = 1$$

获证

【试题 1-1-23】（北京大学，2002 年）对于任意非负整数 n，令 $f_n(x)=x^{n+2}-(x+1)^{2n+1}$，证明：$(x^2+x+1, f_n(x))=1$.

分析：*注意数学归纳法的使用.*

解答：显然在 n=0 的时候有 $(x^2+x+1, x^2-x-1)=1$ 成立.

假定在 $n-1$ 的时候有 $(x^2+x+1,f_{n-1}(x))=1$ 成立.

由

$$\begin{aligned}f_n(x)&=x^{n+2}-(x+1)^{2n+1}=x^{n+2}+x^{n+1}+x^n-(x+1)^{2n-1}(x^2+2x+1)-x^{n+1}-x^n\\&=(x^n-(x+1)^{2n-1})(x^2+x+1)+x(x^{n+1}-(x+1)^{2n-1})-x^{n+2}-x^{n+1}-x^n\\&=-(x+1)^{2n-1}(x^2+x+1)+xf_{n-1}(x)\end{aligned}$$

由 $(x^2+x+1,f_{n-1}(x))=1$，且 $(x^2+x+1,x)=1$，由多项式互素的性质知

$$(x^2+x+1,xf_{n-1}(x))=1$$

于是有

$$(x^2+x+1,f_n(x))=1$$

证毕

【试题 1-1-24】（重庆大学，2003 年） 设 $f(x),g(x),d(x)$ 是三个多项式，证明：

$$(f(x),g(x))=d(x)\Leftrightarrow(\frac{f(x)}{d(x)},\frac{g(x)}{d(x)})=1$$

分析：对多项式最大公因式的理解.

解答：由 $(f(x),g(x))=d(x)\Leftrightarrow\exists\ u(x),v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$

$$\Leftrightarrow u(x)\frac{f(x)}{d(x)}+v(x)\frac{f(x)}{d(x)}=1$$

$$\Leftrightarrow(\frac{f(x)}{d(x)},\frac{g(x)}{d(x)})=1$$

获证

【试题 1-1-25】（重庆大学，2004 年） 证明：如果 $d(x)\mid f(x),d(x)\mid g(x)$，且 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合，那么 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

分析：前面有类似题目，此处略.

【试题 1-1-26】（北京科技大学，2004 年） 求一个三次多项式 $f(x)$，使得 $f(x)+1$ 能被 $(x-1)^2$ 整除，而 $f(x)-1$ 能被 $(x+1)^2$ 整除.

分析：对多项式及其导数的运用.

解答：由题知 $f'(x)$ 能被 $(x-1)$ 和 $(x+1)$ 整除，又由 $f(x)$ 是一个三次多项式，那么 $f'(x)$ 是一个二次多项式，于是可设

$$f'(x)=a(x+1)(x-1)=ax^2-a$$

积分易得

$$f(x)=\frac{a}{3}x^3-ax+b\qquad（其中\ a,b\ 为常数）$$

由题可知 $f(1)=-1,f(-1)=1$，将这两个条件代入方程中易解得

$$\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\b=0\end{cases}$$

那么显然有

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x$$

即为答案

【试题 1-1-27】（南京航空航天大学，2004 年）（1）设 $f(x)=x^7+2x^6-6x^5-8x^4+19x^3+9x^2-22x+8,g(x)=x^2+x-2$，将 $f(x)$ 表示成 $g(x)$ 的幂次和，即将 $f(x)$ 表示成

$$f(x)=c_k(x)g(x)^k+c_{k-1}(x)g(x)^{k-1}+\cdots+c_1(x)g(x)+c_0(x)$$

其中次$(c_i(x))<$次$(g(x))$ 或 $c_i(x)=0,i=0,1,\cdots,k$.

（2）设 $d(x)=(f(x),g(x))$，$f(x)\mid h(x)$ 和 $g(x)\mid h(x)$. 证明：$f(x)g(x)\mid d(x)h(x)$.

解答：（1）利用 $f(x)$ 对 $g(x)$ 的多项式除法易得

$$f(x)=(x-1)g(x)^3+(2x+1)g(x)+(x+2)$$

即为满足题目条件的表示式.

（2）由 $d(x)=(f(x),g(x))$ 可知 $\exists\ u(x),v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$.

方程两边同时乘以 $h(x)$，可得

$$u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)=d(x)h(x)$$

由已知条件可知