

高 职 高 专 教 材

高等数学

下册 第二版

盛祥耀 编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS



013
309-下
96

46

高职高专教材

高等数学

(第二版)

下 册

盛祥耀 编

书名 高等数学
书号 309-下
定价 9.60元
ISBN 7-04-010013-2
出版 人民教育出版社
地址 北京中关村大街22号
电话 010-64010013
邮编 100810

高等教育出版社

内 容 提 要

本书分上、下两册。上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用和空间解析几何。下册内容包括多元函数及其微分法、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程及附录“数学史料”。

为适应不同专业的需要，书中适量配置了一些标有*的内容，以供选学。

本书可作为大学专科和高等专科学校各专业的教材，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 下册/盛祥耀编. —2版. —北京:高等教育出版社,
1996(2001年重印)

ISBN 7-04-005171-0

I. 高… II. 盛… III. 高等数学 N. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 01226 号

出版发行	高等教育出版社		
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电 话	010—64054588	传 真	010—64014048
网 址	http://www.hep.edu.cn		
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	文字六〇三厂印装		
开 本	850×1168 1/32	版 次	1987 年 8 月第 1 版
印 张	8.75		1996 年 5 月第 2 版
字 数	220 000	印 次	2001 年 5 月第 8 次印刷
		定 价	8.70 元

凡购买高等教育出版社图书，如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

目 录

第八章 多元函数及其微分法	1
§ 1. 多元函数概念 二元函数的极限和连续	1
习题	7
§ 2. 偏导数 高阶偏导数	7
习题	14
§ 3. 全微分	15
习题	21
§ 4. 多元函数的微分法	21
习题	34
§ 5. 多元函数微分法在空间曲线、曲面上的应用	36
习题	43
§ 6. 极值	44
习题	56
总习题	57
第八章习题答案	58
第九章 重积分	61
§ 1. 二重积分概念及其性质	61
习题	65
§ 2. 二重积分在直角坐标系中的累次积分法	65
习题	73
§ 3. 二重积分在极坐标系中的累次积分法	73
习题	80
*§ 4. 三重积分概念及其在直角坐标系中的累次积分法	81
习题	87
*§ 5. 三重积分在柱坐标系、球坐标系中的累次积分法	88
习题	95

§ 6. 重积分的应用	95
习题	104
总习题	105
第九章习题答案	105
第十章 曲线积分与*曲面积分	107
§ 1. 第一类曲线积分	107
§ 2. 第二类曲线积分	112
习题	119
§ 3. 格林公式 曲线积分与路径无关的条件	121
习题	131
*§ 4. 曲面积分高斯公式	132
习题	142
总习题	143
第十章习题答案	144
第十一章 无穷级数	146
§ 1. 常数项级数的概念及其性质	146
习题	151
§ 2. 正项级数的收敛性	151
习题	161
§ 3. 任意项级数	162
习题	168
§ 4. 幂级数	169
习题	178
§ 5. 函数展开为幂级数	179
习题	191
*§ 6. 富氏级数	192
习题	203
总习题	203
第十一章习题答案	204
第十二章 常微分方程	207
§ 1. 微分方程的基本概念	207
习题	209

§ 2. 一阶微分方程	210
习题	228
§ 3. 可降阶的高阶微分方程	230
习题	234
§ 4. 高阶线性常系数微分方程	235
习题	253
总习题	253
第十二章习题答案	254
附录 数学史料	257

第八章 多元函数及其微分法

§ 1. 多元函数概念 二元函数的极限和连续

1. 多元函数概念

上册介绍了只有一个自变量的函数,称为一元函数。现在把一元函数的概念推广到具有多个自变量(多元)的情形,为此先介绍点集。

一个实数 x 对应于数轴上一个点;一组二元有序数组 (x, y) 对应于平面上一个点;一组三元有序数组 (x, y, z) 对应于空间内一个点。在此借用“点”这个几何术语,我们把一组 n 元有序数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 也称之为一个点,即有序数组与点不加区分。 n 元有序数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的集合称为点集。

所有 n 元有序数组的集合称为 n 维空间,用 R_n 表示。当 $n = 1$ 时, R_1 是一维空间,即数轴上所有点的集合;当 $n = 2$ 时, R_2 是二维空间,即平面上所有点的集合;当 $n = 3$ 时, R_3 是三维空间,即空间内所有点的集合。

例如点集

$$A = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\} \subset R_2,$$

它表示以原点为圆心,半径为 1 的圆的内部所有点的集合(不包括圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点)。点集

$$B = \{(x, y) | x > 0, y > 0\} \subset R_2,$$

它表示平面上第一象限内所有点的集合(不包括 x 轴、 y 轴上的点)。点集

$$C = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} \subset R_3,$$

它表示以原点为球心, R 为半径的球 (包括球面) 上所有点的集合。

定义一 设有 n 个点 $P_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 点 $P_2(y_1, y_2, \dots, y_n)$, 则

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

称为 两点 P_1 与 P_2 之间的距离。当 $n = 2$ 时, 就是平面内两点之间的距离, 当 $n = 3$ 时, 就是空间内两点之间的距离。

下面我们把一元函数概念推广到二元的情形。

定义二 设有一个非空点集 $D \subset R_2$ 。如果有一个对应规则 f , 使每一个点 $(x, y) \in D$ 都对应一个实数 z , 则称 f 是 D 上的 二元函数。

D 称为函数的定义域, 点 $P(x, y)$ 所对应的函数值记作 $z = f(x, y)$ 或 $z = f(P)$, x, y 称为 自变量, z 称为 因变量。在 (x_0, y_0) 处的函数值记为 $f(x_0, y_0)$ 或 $f(x, y)|_{(x_0, y_0)}$ 。

为了今后研究时方便, 习惯上把 $z = f(x, y)$ 或 $f(P)$ 也叫做函数。

一般地讲二元函数的几何意义表示一个曲面 (图 8.1)。

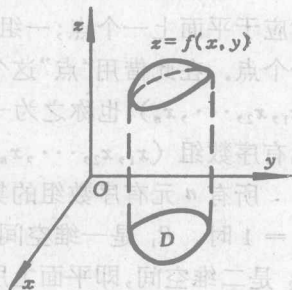


图 8.1

依此可以定义 三元函数, 四元函数 ..., n 元函数。它们分别记作 $w = f(x, y, z)$, $w = f(x, y, z, t)$, $\dots$, 或统一记为 $w = f(P)$ 。

例 1 求函数 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的定义域。

解 显然定义域为

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

在平面直角坐标系中, 它表示原点为圆心, 半径为 R 的圆内及边界

圆周上所有点的平面区域(图 8.2).

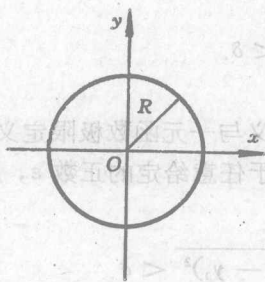


图 8.2

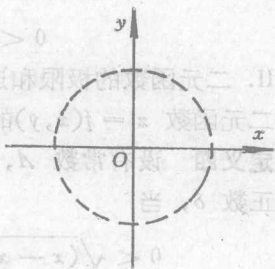


图 8.3

例 2 求函数 $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$ 的定义域.

解 显然定义域

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$$

在平面直角坐标系中,它表示原点为圆心,半径为 1 的圆内(不包括圆周上的点)的所有点的平面区域(图 8.3)。这里再介绍以后常用的两个名词:包括全部边界的平面区域叫做闭域;不包括边界上任何一点的平面区域叫做开域。例如

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

是闭域,而 $x^2 + y^2 < 1$ 则是开域。

定义三 以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为圆心, $\delta > 0$ 为半径的开域叫做点 P_0 的 δ 邻域(图 8.4)。如用不等式表示,即

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

或

$$|PP_0| < \delta,$$

其中 $|PP_0|$ 是点 P 与点 P_0 之间的距离。

除去点 P_0 的 P_0 的 δ 邻域,可表示为



图 8.4

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

或

$$0 < |PP_0| < \delta.$$

II. 二元函数的极限和连续

二元函数 $z = f(x, y)$ 的极限定义与一元函数极限定义类似.

定义四 设有常数 A , 如果对于任意给定的正数 ε , 总存在一个正数 δ , 当

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

或

$$0 < |PP_0| < \delta$$

时, 不等式

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称当点 $P(x, y)$ 趋向点 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 函数 $f(x, y)$ 以 A 为极限. 记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \quad \text{或} \quad \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$$

注意 从形式上看, 二元函数的极限定义与一元函数的极限定义没有什么区别, 但从实质上看, 二元函数的极限要比一元函数的极限复杂得多. 对于一元函数, 如果 x 从左侧趋向 x_0 与从右侧趋向 x_0 的极限存在且相等, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在. 其逆亦真. 对二元函数, 若点 P 沿平行 x 轴趋向 P_0 与沿平行 y 轴趋向 P_0 的极限存在且相等, 还不能保证 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$ 存在. 例如函数

$$z = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

当点 P 沿 x 轴趋向于原点时, 即当 $y = 0$ 而 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0,$$

当点 P 沿 y 轴而趋向于原点时, 即当 $x = 0$ 而 $y \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x=0}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

它们的极限存在且相等(均为 0)。但当 $P(x, y) \rightarrow O(0, 0)$ 时, 函数 $f(x, y)$ 的极限却不存在。事实上, 当 $x = y \neq 0$ 时, $z = \frac{1}{2}$ 。当 $x = 0, y \neq 0$ 时, $z = 0$ 。这就是说, 在原点的任何一个邻域内(不管这邻域取多么小), 总存在使函数 z 的值为 $\frac{1}{2}$ 与为

0 的点, 而 $\frac{1}{2}$ 与 0 是不能同时与任何一个常数 A 相差任意小的, 所以

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$$

不存在。

二元函数的极限

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$$

存在, 具体地讲就是: 点 P 以各种可能的方式趋向于 P_0 时, 函数 $f(x, y)$ 的极限不仅都要存在, 而且都要相等。

下面介绍二元函数 $z = f(x, y)$ 连续的定义。

定义五 如果(1)函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的一个邻域内有定义;

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \text{ 存在};$$

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续。

连续定义也可以用增量形式表示, 令

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的全增量。记 $x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y$, 则定义中

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

相当于

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0,$$

即

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0.$$

所以与上面连续定义等价的另一个定义是:

定义六 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的一个邻域内有定义, 如果

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$$

则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续。

若函数 $f(x, y)$ 在域 D 上点点连续, 则函数 $z = f(x, y)$ 在域 D 上连续

下面我们叙述一下有关连续函数的一些性质(不证)。

定理 (最大值和最小值定理) 如果函数 $f(x, y)$ 在有界闭域 D 上连续, 则

(1) 在 D 上至少存在一点 (ξ_1, η_1) , 恒有

$$f(x, y) \leq f(\xi_1, \eta_1) \quad ((x, y) \in D).$$

(2) 在 D 上至少存在一点 (ξ_2, η_2) , 恒有

$$f(x, y) \geq f(\xi_2, \eta_2) \quad ((x, y) \in D).$$

$f(\xi_1, \eta_1), f(\xi_2, \eta_2)$ 分别叫做函数 $z = f(x, y)$ 在域 D 上的最大值和最小值。

所谓有界域 D 是指: 总存在一个圆, 使 D 在圆内。

习 题

1. 试把三角形的面积 S 表示为其三边 x, y, z 的函数.
2. 将圆弧所对弦长 l 表示为 (i) 半径 r 与圆心角 φ 的函数; (ii) 半径 r 与圆心到弦的距离 d 的函数(圆弧所对的圆心角不超过 π 弧度).
3. 质量为 M 的质点在空间的位置是 (a, b, c) , 质量为 m 的质点在空间的位置是 (x, y, z) , 将质点 M 所受的引力在三个坐标上的投影 P_x, P_y, P_z 表示为 x, y, z 的函数.

4. 试证: 函数 $z = F(x, y) = \ln x \ln y$ 满足函数方程

$$F(xy, uv) = F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v).$$

5. 若 $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4} - 2xy$, 求证 $f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$.

6. 设函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

试求 $f(x, 0), f(0, y)$.

7. 求函数 $z = \sqrt{4x^2 + y^2 - 1}$ 的定义域.

8. 求函数 $u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$ 的定义域.

9. 求函数 $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$ 的定义域.

§ 2. 偏导数 高阶偏导数

I. 偏导数

多元函数的偏导数是指对一个自变量求导数, 而其它自变量都保持不变. 所以偏导数也是一元函数的导数. 所谓“偏”是指对其中一个自变量而言. 下面我们来定义偏导数.

当自变量 y 保持为 y_0 时, 函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的增量

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

称为对 x 的偏增量。如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

存在,则称此极限值为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 对 x 的偏导数,记作

$$z'_x(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}$$

同样,可以定义对 y 的偏导数。

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

同样,可以把偏导数概念推广到 n 元函数 $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。如

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x_1} \right|_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_1}$$

其余类推。

注意 不能把偏导数的记号 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 理解为 ∂z 与 ∂x , 或 ∂z 与 ∂y 之商。只能看成是一种记号,它与一元函数的导数记号 $\frac{dy}{dx}$ 可以看成两个微分 dy 与 dx 之商不同。

显然,根据偏导数的定义,求偏导数用不着建立新的运算法则,只需注意求偏导数时是对哪一个变量,而其余变量则视作常量。

例 1 求函数 $z = x \sin y$ 在点 $(1, \frac{\pi}{4})$ 处的两个偏导数。

解

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y, \quad \text{则} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1, \frac{\pi}{4})} = \sin y \Big|_{(1, \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cos y, \text{ 则 } \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1, \frac{\pi}{4})} = x \cos y \Big|_{(1, \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例2 求函数 $z = x^y$ 的 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 对 x 求偏导数时, y 视作常数, 则 z 是幂函数; 对 y 求偏导数时, x 视作常数, 则 z 是指数函数. 所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

例3 设关系式 $PV = RT$ (R 为常量), 试证

$$\frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} = -1.$$

证 对于 $P = R \cdot \frac{T}{V}$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial V} = RT \cdot \frac{-1}{V^2}.$$

对于 $V = R \cdot \frac{T}{P}$, 则

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{P}.$$

对于 $T = \frac{1}{R} PV$, 则

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{1}{R} V.$$

三式相乘, 得

$$\frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{-RT}{V^2} \cdot \frac{R}{P} \cdot \frac{V}{R} = -\frac{RT}{PV} = -1.$$

这个例子进一步说明了不能把偏导数记号 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 看成 ∂z 与 ∂x 或 ∂z 与 ∂y 之商.

例4 求 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 的各偏导数.

解

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{r}.$$

例 4 中的函数当 x 与 y 对换时, 函数形式不变, 同样 y 与 z 对换, x 与 z 对换函数形式也不变. 函数的这种特点称为函数具有对称性. 对这种函数, 在求出 $\frac{\partial r}{\partial x}$ 后, 把其中 x 与 y 对换即得 $\frac{\partial r}{\partial y}$, 把 y 与 z 对换即得 $\frac{\partial r}{\partial z}$.

II. 二元函数的偏导数的几何意义

偏导数实质上就是一元函数 $z = f(x, y_0)$ 或 $z = f(x_0, y)$ 的导数 (x_0 或 y_0 是常数), 而导数的几何意义是曲线的切线的斜率, 所以偏导数的几何意义也是切线的斜率, 如 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}$ 是曲线

$$\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = y_0 \end{cases}$$

在 (x_0, y_0) 所对应的点处的切线斜率, 如图 8.5.

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \operatorname{tg} \alpha.$$

如图 8.6

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = \operatorname{tg} \beta.$$

III. 高阶偏导数

若二元函数 $z = f(x, y)$ 在域 D 内偏导数存在, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

在域 D 内仍是 x, y 的函数, 对这两个函数再求偏导数(如果存在的话), 则称它们是 $f(x, y)$ 的二阶偏导数。这样的二阶偏导数共有四个:

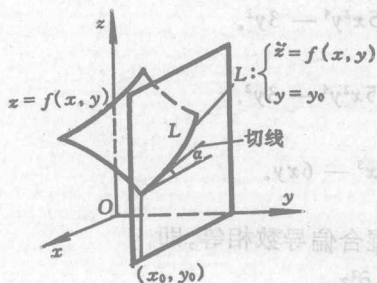


图 8.5

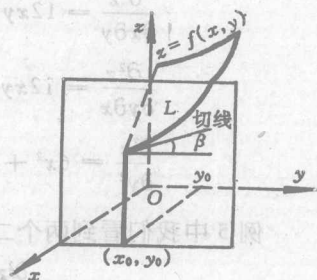


图 8.6

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_x &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y) \\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y) \\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_x &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y) \\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_y &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y) \end{aligned}$$

第二、三式的二阶偏导数称为混合偏导数。类似地, 可以定义三阶, 四阶, $\dots, n$ 阶偏导数, 二阶及二阶以上的偏导数称为高阶偏导数。

例 5 设 $z = x^4 + 3x^2y^2 + y^2x^3 - xy^3$, 求所有的二阶偏导数。

解

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 6xy^2 + 3x^2y - y^3.$$