

通往成功的捷径

丛书策划 易·杏

高中奥数 培优捷径 (上册)

马 兵 主编

GAOZHONG AOSHU PEIYOU JIEJING



浙江大學出版社

最新数学竞赛书目

- 高中奥数培优捷径（上册）
- 高中奥数培优捷径（下册）
- 高中竞赛数学教程
- 竞赛数学解题策略
- 高中奥赛协作体学校夏令营专题讲座与模拟训练
- 高中数学联赛一试知识与方法

ISBN 978-7-308-05957-2



9 787308 059572 >

定价：31.00元

圖并立版圖白(CIS)雙重

高中奧數培优捷徑 上冊 馬兵主編 杭州：浙江大學出版社，2008.2
ISBN 978-7-308-05925-2

1. 高中奧數 馬兵主編 杭州：浙江大學出版社，2008.2
I. 高 馬 0634.063

高中奧數培优捷徑

(上冊)

主編 馬 兵

高中奧數培优捷徑(上冊)

馬兵主編

杭州大學出版社 杭州大學出版社

(E-mail: xjzhu@zhu.edu.cn)

(網址: http://www.zhu.edu.cn)

http://www.zhu.edu.cn

馬兵主編 杭州大學出版社

杭州大學出版社

富陽市富陽市富陽市

787mm×1092mm

1/16

21

180千

2008年2月第1版 2008年2月第1次印刷

00001-10000

ISBN 978-7-308-05925-2

24.00元

浙江大學出版社

杭州大學出版社

杭州大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中奥数培优捷径. 上册/马兵主编. —杭州: 浙江大学出版社, 2008. 5

ISBN 978-7-308-05957-2

I. 高… II. 马… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 068379 号

高中奥数培优捷径(上册)

马 兵 主编

责任编辑 杨晓鸣

文字编辑 夏晓冬

封面设计 刘依群

出版发行 浙江大学出版社

(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)

(E-mail: zupress@mail.hz.zj.cn)

(网址: <http://www.zjupress.com>

<http://www.press.zju.edu.cn>)

电话: 0571-88925592, 88273066(传真)

排 版 杭州大漠照排印刷有限公司

印 刷 富阳市育才印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 21

字 数 486 千

版 次 2008 年 5 月第 1 版 2008 年 5 月第 1 次印刷

印 数 00001—10000

书 号 ISBN 978-7-308-05957-2

定 价 31.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

编写说明

从2008年起,全国大部分省份都开始实行新一轮的课程改革。然而,目前市场上能与新课程标准相匹配的,适合课堂教学模式的竞赛类辅导用书几乎没有。为了更好地帮助广大数学爱好者进一步学习高中数学奥林匹克竞赛的知识和方法,同时也为了给广大教师和参加高考的优秀学生提供优质的教学资源和学习资源,提高教师的教学水平和学生解决问题、分析问题的能力,我们组织了全国各地数学奥林匹克高级教练与特级教师,精心编写了这套丛书(共五种)。

本套丛书主要特色是:

一、同步辅导、循序渐进

从竞赛的实际需要出发,将传统的竞赛内容与新教材内容,讲解与训练等有机地结合起来。其中,基础知识部分与现行模块教材同步,是教材的补充和延伸;专题部分是高中竞赛必须掌握的重要思想和方法,选题难度控制在全国联赛二试水平,部分题目与CMO、IMO试题水平相当。

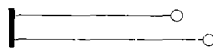
二、方法创新、培养能力

丛书注重解题方法创新,新颖题目多视角分析,经典题目新视角分析,新颖的解题思路对学生具有一定的启发性和思考性,也为教师教学提供了良好的素材。同时,丛书也吸收了新课标改革成果,编拟了许多创新的题目。

三、源于实践、重在实用

丛书大多数内容是作者在讲义的基础上逐步修改与完善的,因此它可以直接应用到课堂教学中,是一套经得起推敲的竞赛辅导丛书。

由于编写时间仓促,编者水平有限,书中纰漏在所难免,敬请专家与读者批评指正。



目 录

第一章 集合与函数	1
题型一：集合的概念与运算	1
题型二：函数的概念与表示	5
题型三：函数的解析式与定义域	12
题型四：函数的值域与最值	17
题型五：函数的奇偶性与周期性	23
题型六：函数的单调性与反函数	27
题型七：二次函数	34
题型八：指数函数与对数函数	40
题型九：函数的图象	46
题型十：函数模型及其应用	53
题型十一：数学竞赛中集合问题的求解思路	62
题型十二：数学竞赛中函数方程的求解	66
第二章 三角函数与平面向量	72
题型一：三角函数的基本概念	72
题型二：同角三角函数关系式及诱导公式	76
题型三：三角函数的图象与性质	82
题型四：三角恒等变形及应用	89
题型五：三角函数的最值问题	94
题型六：三角函数的综合应用	98
题型七：向量及向量的加减法	104
题型八：实数与向量的积	108

题型九:平面向量的坐标运算·····	113
题型十:平面向量的数量积·····	117
题型十一:线段的定比分点与平移·····	123
题型十二:正弦、余弦定理·····	128
题型十三:向量的综合应用·····	134
题型十四:数学竞赛中的三角不等式及最值问题·····	141
第三章 数列与不等式 ·····	148
题型一:数列的概念·····	148
题型二:等差数列·····	154
题型三:等比数列·····	159
题型四:数列求和·····	165
题型五:数列的综合应用·····	172
题型六:数学归纳法·····	178
题型七:不等关系与不等式·····	186
题型八:不等式的解法·····	190
题型九:简单线性规划·····	195
题型十:含有绝对值的不等式·····	202
题型十一:不等式的证明·····	207
题型十二:算术平均数与几何平均数·····	212
题型十三:不等式的综合应用·····	218
题型十四:数学竞赛中的递推方法和求解思路·····	224
题型十五:几个重要不等式及其在竞赛中的应用·····	229
参考答案 ·····	236

第一章 集合与函数

题型一：集合的概念与运算

赛点提炼

1. 集合有关概念

(1) 一组确定对象的全体形成一个集合. 它具有三大特性: 确定性、互异性、无顺序性.

(2) 元素与集合之间是属于关系, 用 $\in$ 或 $\notin$ 表示; 集合与集合之间是包含关系, 用 $\subseteq$ 表示.

(3) 若 $x \in A \Rightarrow x \in B$, 则 $A \subseteq B$, 且 $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq A$.

若 $A \subseteq B$, 且存在 $x_0 \in B$, 但 $x_0 \notin A$, 则 $A \subsetneq B$. 若 $A \neq \emptyset$, 则 $\emptyset \subsetneq A$. 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则 $A = B$.

2. 集合的表示法

(1) 列举法: 将集合中的元素一一列举出来.

(2) 描述法: 将集合中的元素的共同属性表示出来.

(3) 有的集合还可用韦恩图表示.

(4) 常见的数集表示符号如下:

$\mathbf{N}$ 表示自然数集, $\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$ 表示正整数集, $\mathbf{Z}$ 表示整数集, $\mathbf{Q}$ 表示有理数集, $\mathbf{R}$ 表示实数集, $\mathbf{C}$ 表示复数集, 有时用 $\mathbf{Q}_+$ 表示正有理数集, $\mathbf{R}_-$ 表示负实数集, $\emptyset$ 表示不含任何元素的集合, 叫做空集.

3. 集合之间的包含关系和交、并、补的运算

(1) 子集: 若 $x \in A$, 且 $x \in B$, 则 $A \subseteq B$. $A \subseteq B$ 包含 $A = \emptyset$, $A \subsetneq B$, $A = B$ 三种情形.

(2) 交集: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$, 即由 A 与 B 中的公共元素组成的集合. $A \cap B = B \cap A$, $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$. 若 $A \cap B = A$, 则 $A \subseteq B$.

(3) 并集: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$, 即由 A 与 B 中的所有元素组成的集合. $A \cup B = B \cup A$, $(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B)$, $(A \cap B) \subseteq B \subseteq (A \cup B)$. 若 $A \cup B = A$, 则 $B \subseteq A$.

(4) 补集: 设 I 为全集, $A \subseteq I$, 则 $\complement_I A = \{x | x \in I \text{ 且 } x \notin A\}$, 即全集中除 A 以外的所有元素组成的集合, $A \cup \complement_I A = I$, $A \cap \complement_I A = \emptyset$, $\complement_I (\complement_I A) = A$, $\complement_I I = \emptyset$.

4. 集合运算中常用结论

$$(1) \complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B), \\ \complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B).$$

$$(2) A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A, \\ A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B.$$

(3) 由 n 个元素所组成的集合, 其子集个数为 2^n 个, 即 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

(4) 空集是任何集合的子集, 即 $\emptyset \subseteq A$, 这个结论在解决集合问题时容易忽略.

结论(1)、(2)常常是作为“等价转化”的依据, 如已知 $A \cap B = A$, 则 $A \subseteq B$.

结论(3)是集合与组合数综合运用的结果, 用于计算集合子集的个数.

赛题探究

例 1 设 P, Q 为两个非空实数集合, 定义集合 $P+Q = \{a+b | a \in P, b \in Q\}$. 若 $P = \{0, 2, 5\}$, $Q = \{1, 2, 6\}$, 求 $P+Q$ 中元素的个数.

讲解 由题意可知 $P+Q = \{0+1, 0+2, 0+6, 2+1, 2+2, 2+6, 5+2, 5+6\} =$

$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11\}$.

所以 $P+Q$ 中共有 8 个元素.

例 2 设全集 $U=\{2, 3, a^2+2a-3\}$, $A=\{|2a-1|, 2\}$, $\complement_U A=\{5\}$, 求实数 a 的值.

讲解一 因为 $\complement_U A=\{5\}$, 所以 $5 \in U$ 且 $5 \notin A$.

所以 $a^2+2a-3=5$, 所以 $a=2$ 或 $a=-4$.

当 $a=2$ 时, $A=\{3, 2\}$, $U=\{2, 3, 5\}$.

所以满足题意.

当 $a=-4$ 时, $A=\{9, 5\}$,

$U=\{2, 3, 5\}$.

但 $9 \notin U$, 所以 $a \neq -4$.

所以 a 只能为 2.

讲解二 因为 $\complement_U A=5$, 则 $A \cup \complement_U A = \{2, |2a-1|, 5\} = U_1$.

因为 U_1 为全集, 所以 $U_1=U$.

所以 $\begin{cases} a^2+2a-3=5 \\ |2a-1|=3 \end{cases}$, 所以 $a=2$.

例 3 已知全集 $I=\mathbf{N}^*$, 集合 $A=\{x|x=2n, n \in \mathbf{N}^*\}$, $B=\{x|x=4n, n \in \mathbf{N}\}$, 则 ()

A. $I=A \cup B$

B. $I=\complement_I A \cup B$

C. $I=A \cup \complement_I B$

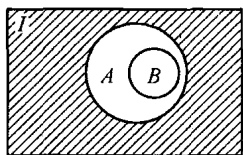
D. $I=\complement_I A \cup \complement_I B$

答案 C

讲解一 $\complement_I A$ 中元素是非 2 的倍数的自然数, $\complement_I B$ 中元素是非 4 的倍数的自然数, 显然, 只有 C 选项正确.

讲解二 因为 $A=\{2, 4, 6, 8, \dots\}$, $B=\{4, 8, 12, 16, \dots\}$, 所以 $\complement_I B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, \dots\}$, 所以 $I=A \cup (\complement_I B)$, 故答案为 C.

讲解三 因为 $B \subsetneq A$, 所以 $(\complement_I A) \subsetneq (\complement_I B)$, $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = (\complement_I A)$, 故 $I = A \cup (\complement_I A) = A \cup (\complement_I B)$.



讲解四 根据题意, 我们画出韦恩图来

解, 易知 $B \subsetneq A$, 如图所示, 可以清楚地看到 $I=A \cup (\complement_I B)$ 是成立的.

例 4 已知全集 $I=\mathbf{R}$, 集合 $M=\{x||x|<2, x \in \mathbf{R}\}$, $P=\{x|x>a\}$, 并且 $M \subsetneq \complement_I P$, 那么 a 的取值集合是 ()

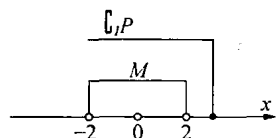
A. $\{2\}$

B. $\{a|a \leq 2\}$

C. $\{a|a \geq 2\}$

D. $\{a|a > 2\}$

分析 本题重在考查集合的补集求法、真子集关系的应用以及不等式的解法.



答案 C

讲解 因为 $M=\{x||x|<2\}=\{x|-2<x<2\}$, $\complement_I P=\{x|x \leq a\}$.

所以 $M \subsetneq (\complement_I P) \Leftrightarrow M \subsetneq (-\infty, a] \Leftrightarrow a \geq 2$, 如上图数轴所示. 故选 C.

小结 首先化简集合 M , 然后利用数轴求出 a 的范围. 选项 A 只找到一个值 $a=2$, 并不是 a 的取值范围; 选项 B 未能准确理解真子集的关系; 选项 D 未弄明白 $a=2$ 是否可以, 误认为 $a>2$.

例 5 若集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0, a \in \mathbf{R}\}$.

(1) 若 A 中只有一个元素, 求实数 a 的值;

(2) 若 A 中至多有一个元素, 求实数 a 的取值范围.

讲解 (1) 当 $a=0$ 时, 原方程为 $2x+1=0$, 所以 $x=-\frac{1}{2}$, 符合题意.

当 $a \neq 0$ 时, 方程 $ax^2+2x+1=0$ 为一元二次方程, $\Delta=4-4a=0$, 即 $a=1$ 时, 原方程的解为 $x=-1$, 符合题意.

因为 $a=0$ 或 $a=1$ 时, 原方程只有一个解, 此时 A 中只有一个元素.

(2) A 中至多含有一个元素时, 即 A 中有一个元素或 A 中没有元素.

当 $\Delta=4-4a<0$ 即 $a>1$ 时, 原方程无实数解.

结合(1)可知, 当 $a=0$ 或 $a \geq 1$ 时, A 中至多有一个元素.

小结 集合中元素的个数具有确定性、互异性,集合中元素的个数可以为零,解题过程中往往易忽略空集的情况.

例 6 已知 $A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$, $B = \{x | mx + 1 = 0\}$, 且 $A \cup B = A$, 求实数 m 的取值范围.

讲解 $A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\} = \{-3, 2\}$, $B = \{x | mx + 1 = 0\}$ 至多有一个元素.

因为 $A \cup B = A$, 所以 $B \subseteq A$.

因此 $B = \{-3\}$ 或 $B = \{2\}$ 或 $B = \emptyset$,

即 $-3m + 1 = 0$ 或 $2m + 1 = 0$ 或 $m = 0$,

解得 $m = \frac{1}{3}$ 或 $m = -\frac{1}{2}$ 或 $m = 0$.

故实数 $m \in \{\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0\}$.

小结 关键是如何理解和运用 $A \cup B = A$ 这个条件. 注意到 $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$, 用列举法表示 A , 即可写出 B 的各种情形, 但不要忘了 $B = \emptyset$ 的情况.

例 7 设 S 为满足下列两个条件的实数所构成的集合:

① S 内不含 1; ② 若 $a \in S$, 则 $\frac{1}{1-a} \in S$.

解答下列问题:

(1) 若 $2 \in S$, 则 S 中必有其他两个数, 求出这两个数;

(2) 求证: 若 $a \in S$, 则 $1 - \frac{1}{a} \in S$.

讲解 (1) 因为 $2 \in S$, 所以 $\frac{1}{1-2} \in S$, 即 $-1 \in S$, 所以 $\frac{1}{1-(-1)} \in S$, 即 $\frac{1}{2} \in S$, 故这两个数为 $-1, \frac{1}{2}$.

(2) 因为 $a \in S$, 所以 $\frac{1}{1-a} \in S$, 所以 $\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} \in S$, 即 $1 - \frac{1}{a} \in S$.

小结 判断某元素是否在集合内, 应看它是否满足集合的特征性质, 是否满足题目中的已知条件.

例 8 已知 $A = \{x | x^2 + px + q = 0\}$,

$B = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, 且 $A \subseteq B$, 求 p, q 满足的条件.

讲解 因为 $B = \{1, 2\}$, 又因为 $A \subseteq B$,

所以① 若 $A = \emptyset$, 则方程 $x^2 + px + q = 0$ 无实根, 则 $\Delta = p^2 - 4q < 0$, 即 $p^2 < 4q$.

② 若 $A = \{1\}$, 则方程 $x^2 + px + q = 0$ 有两个相等的实根 1, 由韦达定理得

$$p = -2, q = 1.$$

③ 若 $A = \{2\}$, 则方程 $x^2 + px + q = 0$ 有两个相等的实根 2, 由韦达定理得

$$\begin{cases} p = -(2+2) = -4 \\ q = 2 \times 2 = 4 \end{cases},$$

所以 $p = -4, q = 4$.

④ 若 $A = \{1, 2\}$, 则方程 $x^2 + px + q = 0$ 有两个不相等的实根 1, 2, 由韦达定理得

$$\begin{cases} p = -(1+2) = -3 \\ q = 1 \times 2 = 2 \end{cases},$$

所以 $p = -3, q = 2$.

综上所述, p, q 满足的条件为

$$p^2 < 4q \text{ 或 } \begin{cases} p = -2 \\ q = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} p = -4 \\ q = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} p = -3 \\ q = 2 \end{cases}.$$

小结 n 个元素的集合有 2^n 个子集, 本题中的集合 A 有 4 种情况, 每种情况又都对应方程 $x^2 + px + q = 0$ 的根, 常用判别式与韦达定理来处理.

例 9 设 A 是两个整数平方差的集合, 即 $A = \{x | x = m^2 - n^2, m, n \in \mathbb{Z}\}$. 求证:

(1) 若 $s, t \in A$, 则 $st \in A$.

(2) 若 $s, t \in A, t \neq 0$, 则 $\frac{s}{t} = p^2 - q^2$, 其中 p, q 是有理数.

分析 想办法将 st 表示为两个整数的平方差.

讲解 (1) 由 $s, t \in A$ 可设

$$s = m_1^2 - n_1^2, t = m_2^2 - n_2^2,$$

其中 m_1, n_1, m_2, n_2 均为整数. 于是

$$\begin{aligned} st &= (m_1^2 - n_1^2)(m_2^2 - n_2^2) \\ &= m_1^2 m_2^2 + 2m_1 m_2 n_1 n_2 + n_1^2 n_2^2 - m_1^2 n_2^2 - \\ &\quad 2m_1 m_2 n_1 n_2 - m_2^2 n_1^2 \\ &= (m_1 m_2 + n_1 n_2)^2 - (m_1 n_2 + m_2 n_1)^2, \end{aligned}$$

即 st 是两个整数的平方差,故 $st \in A$.

(2) 由于 $s, t \in A$, 由(1)可知 $st \in A$. 令 $st = m^2 - n^2$, m, n 是整数. 又 $t \neq 0$, 因此 $\frac{s}{t} = \frac{st}{t^2}$.

$$= \left(\frac{m}{t}\right)^2 - \left(\frac{n}{t}\right)^2.$$

而 $\frac{m}{t}, \frac{n}{t}$ 均为有理数, 故命题得证.

例 10 若集合 $A = \{x^2 + px + q = 0\}$, $B = \{x | qx^2 + px + 1 = 0\}$ (p, q 不为零) 同时满足条件:

(1) $A \cap B \neq \emptyset$; (2) $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \{-2\}$. 求 p 和 q 的值.

讲解 设 $x_0 \in A$, 则有 $x_0^2 + px_0 + q = 0$, 所以有 $1 + \frac{p}{x_0} + \frac{q}{x_0^2} = 0$,

即有 $q \cdot \frac{1}{x_0^2} + p \cdot \frac{1}{x_0} + 1 = 0$.

所以 $\frac{1}{x_0} \in B$.

所以集合 A, B 中元素互为倒数关系.

由 $A \cap B \neq \emptyset$, 即一定有 $x_0 \in A$ 使得 $\frac{1}{x_0} \in$

B , 且 $x_0 = \frac{1}{x_0}$,

所以 $x_0 = \pm 1$.

又 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \{-2\}$, 所以 $-2 \in A$.

所以 $A = \{1, -2\}$ 或 $A = \{-1, -2\}$.

所以 $B = \{1, -\frac{1}{2}\}$ 或 $B = \{-1, -\frac{1}{2}\}$.

所以 $\begin{cases} 1 + (-2) = -p \\ 1 \times (-2) = q \end{cases}$

或 $\begin{cases} -1 + (-2) = -p \\ -1 \times (-2) = q \end{cases}$,

所以 $\begin{cases} p = 1 \\ q = -2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} p = 3 \\ q = 2 \end{cases}$.

小结 含参数的集合运算, 常在相应的关系不明显时假设某一集合的元素 x_0 , 然后在已知的条件下进行相关的运算.

方法归纳

在解决有关集合问题时, 一般应注意:

1. 对于集合问题, 要先确定属于哪一类

集合(数集、点集或某类图形), 然后再确定处理此类问题的方法.

2. 关于集合的运算, 一般应把各参与运算的集合化到最简形式, 再进行运算.

3. 含参数的集合问题, 多根据集合的互异性处理, 有时需要用到分类讨论、数形结合的思想.

4. 集合问题多与函数、方程、不等式有关, 要注意各类知识的融会贯通.

同步演练

1. 若 $P = \{2, 3, 4\}$, $Q = \{1, 3, 5\}$, $M = \{3, 5, 6\}$, 则 $\complement_P(P \cap M) \cup \complement_M(M \cap Q)$ 的值为 ()

- A. $\{2, 4\}$
B. $\{2, 4, 6\}$
C. $\{1, 2, 4, 6\}$
D. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

2. 设集合 $M = \{y | y = 2^x, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $P = \{y | y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$, 则下列结论中正确的是 ()

- A. $M \cap P = \{2, 4\}$
B. $M \cap P = \{4, 16\}$
C. $M = P$
D. $M \subsetneq P$

3. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, $M = \{x | x < 0 \text{ 或 } x > 1\}$, $N = \{x | \frac{x-1}{x} < 0\}$, 则 ()

- A. $M \cup N = \mathbf{R}$ B. $M \cap N = \emptyset$
C. $(\complement_U N) = M$ D. $(\complement_U N) \subsetneq M$

4. 集合 $A = \{x | |x-3| < 5\}$, $B = \{x | x < a\}$, 且 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $a \geq -5$ B. $a > -5$
C. $a > 8$ D. $a \geq 8$

5. 若集合 $M = \{y | y = x^2, x \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x | \frac{3x-1}{x-9} \leq 1, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $M \cap N$ 的真子集的个数是 ()

- A. 15 B. 7 C. 16 D. 8

6. 已知 $M = \{y | y = x^2\}$, $N = \{y | x^2 + y^2 = 2\}$, 则 $M \cap N$ 的值为 ()

- A. $\{(1, 1), (-1, 1)\}$

- B. $\{1\}$
 C. $[0, 1]$
 D. $[0, \sqrt{2}]$

7. 设全集是实数集, 若 $M = \{x | \sqrt{x+1} \leq 0\}$, $N = \{x | 2^x = 2^{x+2}\}$, 则 $M \cap N =$ _____.
8. 已知集合 $A = \{-1, 3, 2m-1\}$, 集合 $B = (3, m^2)$. 若 $B \subseteq A$, 则实数 $m =$ _____.
9. 集合 $P = \{1, 2, 3\}$, $Q = \{2, 3, 4, 5\}$, 定义 $P * Q = \{(a, b) | a \in P, b \in Q\}$, 则集合 $P * Q$ 中元素的个数为 _____.
10. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $M = \{3, 4, 5\}$, $N = \{1, 3, 6\}$, 则集合 $\{2, 7\} =$ _____.
11. 已知集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{y | x^2 + y^2 = 1, x \in A\}$, 则 A 与 B 的关系为 _____.
12. 设 A, B 是非空集合, 定义 $A \times B = \{x | x \in A \cup B, \text{且 } x \notin A \cap B\}$, 已知 $A = \{x | y = \sqrt{2x-x^2}\}$, $B = \{y | y = \frac{2^x}{2^x-1}\} (x > 0)$, 则 $A \times B =$ _____.
13. 设集合 $A = \{x | |x-a| < 2\}$, $B = \{x | \frac{2x-1}{x+2} < 1\}$, 若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.
14. 已知集合 $A \subseteq \{2, 3, 7\}$, 且 A 中至多有一个奇数, 这样的集合 A 共有多少个?
15. 设集合 $A = \{a^2, a+1, -3\}$, $B = \{a-3, 2a-1, a^2+1\}$, 且 $A \cap B = \{-3\}$, 求实数 a 的值.
16. 设集合 $A = \{x | x^2 + 4x = 0\}$, $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, 如果 $A \cap B = B$, 求实数 a 的取值范围.
17. 已知集合 $A = \{x | x^2 + 3x + 2 \geq 0\}$, $B = \{x | mx^2 - 4x + m - 1 > 0, m \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 且 $A \cup B = A$, 求 m 的取值范围.
18. 设 n 是大于 1 的正整数, 求证: 存在一个集合 $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, 使得
- (1) $|A| \leq 2[\sqrt{n}] + 1$;
 - (2) $\{|x-y| | x, y \in A, x \neq y\} = \{1, 2, \dots, n-1\}$.

题型二: 函数的概念与表示

赛点提炼

1. 函数

(1) 函数的定义

① 原始定义: 设在某变化过程中有两个变量 x, y , 如果对于 x 在某一范围内的每一个确定的值 y , 都有唯一确定的值与它对应, 那么就称 y 是 x 的函数, x 叫做自变量.

② 近代定义: 设 A, B 都是非空的数的集合, $f: x \rightarrow y$ 是从 A 到 B 的一个对应法则, 那么从 A 到 B 的映射 $f: A \rightarrow B$ 就叫做函数, 记作 $y = f(x)$, 其中 $x \in A, y \in B$, 原象的集合 A 叫做函数的定义域, 象的集合 C 叫做函数的值域.

上述两个定义实质上是一致的, 只不过原始定义是从运动的观点出发, 而近代定义是从集合、映射的观点出发, 侧重点不同. 函数实质上是从 A 到 B 的一个特殊的映射, 其特殊性在于 A, B 都是非空的数集, 自变量的取值集合 A 叫做函数的定义域, 函数值的集合 C 叫做函数的值域. 应注意, 值域 C 不一定等于 B , 而只能说 $C \subseteq B$.

要想理解好函数的概念还必须注意以下几点:

① 函数是一种特殊的映射, 集合 A, B 都是非空的数的集合.

② 确定函数的映射是从定义域 A 到值域 C 上的映射, 允许 A 中的不同元素在 C 中有相同的象, 但不允许 C 中的元素在 A 中没有原象.

③ 两个函数只有当定义域、值域、对应法则都分别相同时, 这两个函数才相同.

④ 函数的定义域、值域、对应法则 f 统称为函数的三要素, 其中对应法则 f 是核心, f 是使对应得以实现的方法和途径, 是联系 x 与 y 的纽带. 定义域是自变量 x 的取值范围, 是函数的一个重要组成部分. 同一个函数的

对应法则,由于定义域不相同,函数的图象与性质一般也不相同.例如:函数 $y=x^2, x \in \mathbf{R}$ 与函数 $y=x^2, x \in \{\text{正实数}\}$, 它们的图象和性质都不相同.

⑤ 函数的图象可以是一条或几条平滑的曲线,如 $y=x^2 (x \in \mathbf{R})$ 及 $y=\frac{1}{x}$; 函数的图象也可以是一些离散的点,一些线段等,如 $y=2x (x \in \mathbf{N})$ 及函数 $y=2 (x \in [0, 1])$.

⑥ $f(a)$ 的含义与 $f(x)$ 的含义不同. $f(a)$ 表示自变量 $x=a$ 时所得的函数值,它是一个常量; $f(x)$ 是 x 的函数,通常它是一个变量.

(2) 构成函数概念的三要素

① 三要素是指定义域、对应法则、值域.

② 三要素中只要有一个不同,两个函数就是不同的函数.

③ 三要素中都相同的两个函数是同一个函数.

(3) 函数的表示方法

常用表示函数的方法有解析法、列表法、图象法三种.

① 解析法:就是把两个变量的函数关系用一个等式来表示,这个等式叫做函数的解析表达式,简称解析式,中学研究的函数主要是用解析式表示的函数.

② 列表法:就是列出表格来表示两个变量的函数关系.

③ 图象法:就是用函数图象来表示两个变量之间的关系.

(4) 复合函数

如果 y 是 u 的函数,记为 $y=f(u)$, u 又是 x 的函数,记为 $u=g(x)$, 且 $g(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域的交集不空,则确定了一个 y 关于 x 的函数 $y=f[g(x)]$, 这时 y 叫做 x 的复合函数,其中 u 叫做中间变量, $y=f(u)$ 叫做外层函数, $u=g(x)$ 叫做内层函数.

2. 映射

(1) 对应关系. 设有两个集合 A 与 B , 如果有对应关系 f , 把集合 A 和集合 B 的一个子集中的元素联系起来,那么就形成了一个从集合 A 到集合 B 的一个对应.

对应与集合一样,也是数学中的原始概念. 我们只能对它进行描述,它是两个集合中元素之间的一种联系形式.

对于 A 中每一个元素来说,有以下三种情况:

① B 中有唯一元素与之对应;

② B 中有不止一个元素与之对应;

③ B 中没有元素与之对应.

同样,对于 B 中的每一个元素,也具有上面三点类似的情况.

(2) 映射的概念. 设 A, B 是两个集合,如果按照某种对应关系 f , 对于集合 A 中的任何一个元素,在集合 B 中都有唯一的元素与之对应,这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射,记作 $f: A \rightarrow B$.

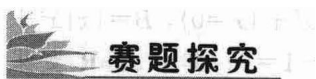
映射是一个特殊的对应,从以下三个方面理解这一定义:

① 映射是由集合 A 和集合 B 以及从 A 到 B 的对应法则确定的;

② 在映射中,集合 A 的“任一元素”在集合 B 中都有“唯一”的象,即集合 A 中的某一元素 a 在集合 B 中不会没有象,或者不止一个象;

③ 在映射中,集合 A 与集合 B 的地位是不对等的,一般地,我们并不要求 B 中的每一个元素都与 A 中的唯一元素相对应.

(3) 象和原象,给定一个从集合 A 到集合 B 的映射,且 $a \in A, b \in B$, 如果元素 a 和元素 b 对应,那么把元素 b 叫做元素 a 的象, a 叫做 b 的原象.



赛题探究

例 1 试判断以下各组函数是否表示同一函数?

(1) $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=\sqrt[3]{x^3}$;

(2) $f(x)=\frac{|x|}{x}, g(x)=\begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$;

(3) $f(x)=\sqrt[2n+1]{x^{2n+1}}, g(x)=(\sqrt[2n-1]{x})^{2n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$;

(4) $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x+1}, g(x)=\sqrt{x^2+x}$;

$$(5) f(x) = x^2 - 2x - 1, g(t) = t^2 - 2t - 1.$$

讲解 (1) 由于 $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, $g(x) = \sqrt[3]{x^3} = x$, 故它们的值域及对应法则都不相同, 所以它们不是同一函数.

(2) 由于函数 $f(x) = \frac{|x|}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而 $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 故它们不是同一函数.

(3) 由于当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $2n \pm 1$ 为奇数, 所以 $f(x) = \sqrt[2n+1]{x^{2n+1}} = x$, $g(x) = (\sqrt[2n-1]{x})^{2n-1} = x$, 它们的定义域、值域及对应法则都相同, 所以它们是同一函数.

(4) 由于函数 $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x+1}$ 的定义域为 $\{x|x \geq 0\}$, 而 $g(x) = \sqrt{x^2+x}$ 的定义域为 $\{x|x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 0\}$, 它们的定义域不同, 所以它们不是同一函数.

(5) 函数的定义域、值域和对应法则都相同, 所以它们是同一函数.

说明 对于两个函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$, 当且仅当它们的定义域、值域、对应法则都相同时, $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 才表示同一函数. 若两个函数表示同一函数, 则它们的图象完全相同; 反之亦然.

小结 (1) 第(5)小题易错判断成它们是不同的函数, 原因是对函数的概念理解不透. 要知道在函数的定义域及对应法则 f 不变的条件下, 自变量变换字母, 以至变换成其他字母的表达式, 这对于函数本身并无影响. 比如: $f(x) = x^2 + 1$ 、 $f(t) = t^2 + 1$ 、 $f(u+1) = (u+1)^2 + 1$ 都可视为同一函数.

(2) 对于两个函数来讲, 只要函数的三要素中有一要素不相同, 则这两个函数就不可能是同一函数.

(3) 要判断两个函数是否相同, 应考虑定义域、值域与对应法则是否都相同, 满足这两个条件, 函数必相同. 此外, 这类问题提问的角度可作改变, 若问“两个函数的图象是否相同”, 其判断方法完全一样.

例 2 下列对应是否为从 A 到 B 的映射?

$$(1) A = \mathbf{R}, B = \mathbf{R}, f: x \rightarrow y = \frac{1}{x+1};$$

$$(2) A = \{a | a = 2n, n \in \mathbf{N}^*\}, \\ B = \left\{b \left| b = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}^* \right.\right\}, f: a \rightarrow b, \\ b = \frac{1}{a};$$

$$(3) A = \{x | x \geq 0\}, B = \mathbf{R}, f: x \rightarrow y, \\ y^2 = x;$$

$$(4) A = \{\text{平面 } \alpha \text{ 内的矩形}\}, B = \{\text{平面 } \alpha \text{ 内的圆}\}, f: \text{作矩形的外接圆}.$$

讲解 (1) 当 $x = -1$ 时, y 值不存在, 所以不是映射.

(2) A, B 两集合分别用列举法表述为 $A = \{2, 4, 6, \dots\}$, $B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$, 由对应法则 $f: a \rightarrow b = \frac{1}{a}$ 可知, 是映射.

(3) 不是映射, 如 A 中元素 1 有两个象 ± 1 .

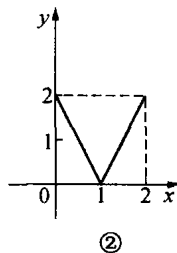
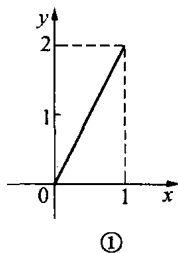
(4) 是映射.

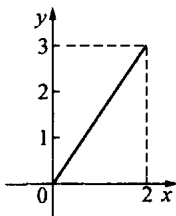
说明 解此题需要明确以下两点:

- ① 集合 A 的元素是什么;
- ② 什么是 A 到 B 的映射.

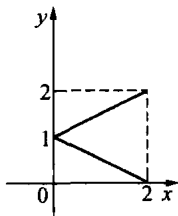
小结 欲判断对应 $f: A \rightarrow B$ 是否是从 A 到 B 的映射, 必须做两点工作: ① 明确集合 A, B 中的元素. ② 根据对应判断 A 中的每个元素是否在 B 中找到唯一确定的对应元素.

例 3 设 $M = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $N = \{y | 0 \leq y \leq 2\}$, 给出的 4 个图形, 其中能表示集合 M 到集合 N 的函数关系的有 ()





③



④

- A. 0 个 B. 1 个
C. 2 个 D. 3 个

答案 B

讲解 图①中定义域为 $[0, 1]$ 与 M 不同,不是函数;图③中 $x=2$ 时, $y=3 \notin N$,不是函数;图④中 $x=2$ 时, $y=2$ 或 $y=0$,不是函数,只有图②能表示函数图象. 故选 B.

例 4 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (x \leq -1) \\ 2x & (-1 < x < 2) \\ \frac{x^2}{2} & (x \geq 2) \end{cases}$$

(1) 求 $f\left\{f\left[f\left(-\frac{7}{4}\right)\right]\right\}$;

(2) 若 $f(a)=3$, 求 a 的值.

讲解 (1) $f\left\{f\left[f\left(-\frac{7}{4}\right)\right]\right\} = f\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right] = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

(2) 令 $2a=3 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$; 令 $\frac{a^2}{2}=3 \Rightarrow a=\sqrt{6}$ ($a=-\sqrt{6}$, 舍去); 令 $a+2=3 \Rightarrow a=1$ (舍去).

所以 $a=\frac{3}{2}$ 或 $a=\sqrt{6}$.

例 5 已知 $f(x)=\frac{1}{x+1}$ ($x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq -1$), $g(x)=x^2+2$ ($x \in \mathbf{R}$).

- (1) 求 $f(2)$, $g(2)$ 的值;
(2) 求 $f[g(2)]$ 的值;
(3) 求 $f[g(x)]$ 的解析式.

讲解

(1) $f(2)=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$, $g(2)=2^2+2=6$.

(2) $f[g(2)]=f(6)=\frac{1}{1+6}=\frac{1}{7}$.

$$(3) f[g(x)]=f(x^2+2)=\frac{1}{1+(x^2+2)}=\frac{1}{x^2+3}.$$

小结 解本题时要理解对应法则 f 和 g 的含义, 在求 $f[g(x)]$ 时, 应先遵循先内后外的原则.

例 6 设集合 A 和 B 都是自然数集合 $\mathbf{N}$, 映射 $f: A \rightarrow B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n , 则在映射 f 下, 象 20 的原象是 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

答案 C

讲解 本小题考查集合和映射的基本知识. 依题意, 所求原象 n 满足方程 $2^n+n=20$, 由 C 的 $n=4$ 代入方程, 满足方程, 故选 C.

小结 本题还可以用图象法, 画出函数 $y=2^x$ 与 $y=20-x$ 的图象, 两曲线交点横坐标为 $x=4$. 这种解法在考试中不适合, 应采用上面的解法, 将各选项 n 的值代入方程检验.

例 7 已知函数 $f(x)=\frac{x}{ax+b}$ (a, b 为常数, 且 $a \neq 0$) 满足 $f(2)=1$, $f(x)=x$ 有唯一的解, 求函数 $y=f(x)$ 的解析式和 $f[f(-3)]$ 的值.

讲解 因为 $f(2)=1$, 所以 $1=\frac{2}{2a+b}$,

即 $2a+b=2$.

因为 $f(x)=x$ 有唯一解, 即 $\frac{x}{ax+b}=x$ 有唯一解,

所以 $x \frac{(1-ax-b)}{ax+b}=0$.

所以 $x_1=0$ 或 $x_2=\frac{1-b}{a}$.

所以 $\frac{1-b}{a}=0$, $b=1$.

所以 $f(x)=\frac{x}{\frac{1}{2}x+1}=\frac{2x}{x+2}$.

所以 $f[f(3)]=f\left(\frac{-6}{1}\right)=f(6)=\frac{3}{2}$.

小结 求解析式需先求 a, b , 由 $f(2)=1$ 及 $f(x)=x$ 可列出方程组, 从而解出 a, b , 利

用方程思想解决问题是常常用到的方法.

例 8 在给定的映射 $f: (x, y) \rightarrow (2x+y, xy) (x, y \in \mathbf{R})$ 下, 点 $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$ 的原象是 ()

- A. $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{36})$
 B. $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$ 或 $(-\frac{1}{4}, \frac{2}{3})$
 C. $(\frac{1}{36}, -\frac{1}{6})$
 D. $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ 或 $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{4})$

答案 B

讲解 根据映射的定义及原象和象的对应关系可知在 f 的作用下原象 (x, y) 的象是 $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$.

由已知得 $\begin{cases} 2x+y=\frac{1}{6} \\ xy=-\frac{1}{6} \end{cases}$, 解方程组得

$$\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-\frac{1}{4} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}, \text{ 故选 B.}$$

说明 原象集合、象集合及对应法则均为映射的组成部分, 而对应关系在解题中起着关键作用.

小结 此题考查映射的概念, 求象即代入求解, 求原象则需构造方程组.

例 9 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in P \\ -x, & x \in M \end{cases}$, 其中 P, M 为实数集 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集, 又规定 $f(P) = \{y | y = f(x), x \in P\}$, $f(M) = \{y | y = f(x), x \in M\}$. 给出下列四个判断, 其中正确判断有 ()

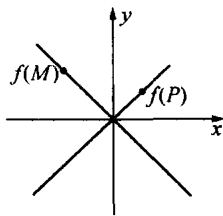
- ① 若 $P \cap M = \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) = \emptyset$
 ② 若 $P \cap M \neq \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) \neq \emptyset$
 ③ 若 $P \cup M = \mathbf{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) = \mathbf{R}$
 ④ 若 $P \cup M \neq \mathbf{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) \neq \mathbf{R}$

- A. 1 个 B. 2 个
 C. 3 个 D. 4 个

分析 主要考查集合的交、并集的概念与函数知识.

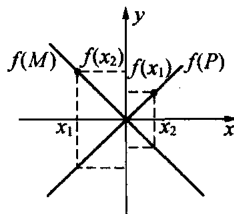
答案 B

讲解 由题意可得函数 $f(P), f(M)$ 的图象如下图所示. 设 $P = [x_2, +\infty)$, $M = (-\infty, x_1]$, $|x_2| < |x_1|$. $f(P) = [f(x_2), +\infty)$, $f(M) = [f(x_1), +\infty)$, $P \cap M = \emptyset$.



而 $f(P) \cap f(M) = [f(x_1), +\infty) \neq \emptyset$, 故①错误, 同理可知②正确.

设 $P = [x_1, +\infty)$, $M = (-\infty, x_2]$, $|x_2| < |x_1|$, 则 $P \cup M = \mathbf{R}$.



$f(P) = [f(x_1), +\infty)$, $f(M) = [f(x_2), +\infty)$, $f(P) \cup f(M) = [f(x_1), +\infty) \neq \mathbf{R}$, 故③错误, 同理可知④正确.

所以只有②、④正确.

故选 B.

例 10 设 $f(x) = x^2 + px + q$, $A = \{x | x = f(x)\}$, $B = \{x | f[f(x)] = x\}$.

(1) 求证: $A \subseteq B$;

(2) 如果 $A = \{-1, 3\}$, 求集合 B.

讲解 (1) 设 x_0 是集合 A 中的任一元素, 即有 $x_0 \in A$.

因为 $A = \{x | x = f(x)\}$, 所以 $x_0 = f(x_0)$, 即 $f[f(x_0)] = f(x_0) = x_0$, 所以 $x_0 \in B$, 故 $A \subseteq B$.

(2) 因为 $A = \{-1, 3\} = \{x | x^2 + px + q = x\}$, 所以方程 $x^2 + (p-1)x + q = 0$ 有两根 -1 和 3, 应用韦达定理得

$$\begin{cases} -1+3=-(p-1) \\ (-1)\times 3=q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-1 \\ q=-3 \end{cases}$$

所以 $f(x)=x^2-x-3$.

于是集合 B 的元素是方程 $f[f(x)]=x$, 也即 $(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$ (*) 的根.

将方程(*)变形得 $(x^2-x-3)^2-x^2=0$,

即 $(x^2-2x-3)(x^2-3)=0$,

解得 $x=-1, 3, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.

故 $B=\{-\sqrt{3}, -1, \sqrt{3}, 3\}$.

说明 本例是涉及集合、函数和方程的综合题. 依据子集的概念, 要证 $A\subseteq B$, 只要证对任意 $x_0\in A$, 均有 $x_0\in B$ 成立; 由 $A=\{-1, 3\}$ 可知, 方程 $x=f(x)$ 有两个实根 -1 和 3 , 从而应用韦达定理可求出 p, q 的值, 也就确定出 $f(x)$ 的解析式, 再解方程 $x=f[f(x)]$, 就可求出 B 中的所有元素.

小结 本解法说明在思维过程中, 应当自觉脱去集合符号和抽象函数符号的“外衣”, 显出最本质的数量关系, 不断实施解题语言的转换, 语言是思维的载体, 丝毫马虎不得.

方法归纳

1. 可用如下两法求映射的个数.

(1) 用排列组合知识.

例如: 已知 $A=\{1, 2, 3, 4\}, B=\{a, b\}$, 则求从 A 到 B 的映射时, 根据分步计数原理, $1, 2, 3, 4$ 在 B 中的象都有 2 种, 故总的映射个数为 $2^4=16$ 种.

(2) 用穷举或列表的方法.

2. 判断两个函数为同一函数的方法.

构成函数的三要素中, 定义域和对应法则相同, 则值域一定相同, 所以两个函数当且仅当定义域和对应法则相同时, 是相同的函数.

判断两个函数是否为同一函数, 不仅要看函数的表达式化简后是否相同, 还要注意定义域是否相同. 例如: 函数 $y=\frac{x^2}{x}$ 与 $y=x$

不是同一函数, 原因是定义域不同. 再如: $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$ 也不是同一函数, 原因是对应法则不同.

3. 分段函数的问题, 要根据函数的定义域分段处理.

4. 抽象函数常考虑用特殊值法处理, 或模拟函数处理.

例如: 如函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, 它的性质可模拟指数函数 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$) 来讨论.

5. 复合函数中, 内函数的值域是外函数的定义域.

同步演练

1. 设 $f: x \rightarrow x^2$ 是集合 A 到集合 B 的映射, 如果 $B=\{1, 2\}$, 则 $A\cap B$ 的值为 ()
A. $\emptyset$ B. $\{1\}$
C. $\emptyset$ 或 $\{2\}$ D. $\emptyset$ 或 $\{1\}$
2. 已知函数 $y=f(x)$ ($a\leq x\leq b$), 则集合 $\{(x, y)|y=f(x), a\leq x\leq b\}\cap\{(x, y)|x=0\}$ 中含有元素的个数为 ()
A. 0 B. 1 或 0
C. 1 D. 1 或 2
3. 已知 $A=\{-1, 1\}$, 映射 $f: A\rightarrow A$, 则对 $x\in A$, 下列关系式中肯定错误的是 ()
A. $f(x)=x$ B. $f(x)=-1$
C. $f(x)=x^2$ D. $f(x)=x+2$
4. 已知集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}, B=\{5, 6\}$, 设映射 $f: A\rightarrow B$, 使集合 B 中的元素在 A 中都有原象, 这样的映射的个数共有 ()
A. 16 B. 14
C. 15 D. 12
5. 下列函数中, 是同一函数的是 ()
① $f(x)=\lg x, g(x)=\frac{1}{2}\lg x^2$
② $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\in(-1, 0) \\ x-1, & x\in(0, 1) \end{cases}$,
 $g(x)=f^{-1}(x)$
③ $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}, g(x)=x+1$
④ $f(x)=x^2+3x, g(t)=t^2+3t$