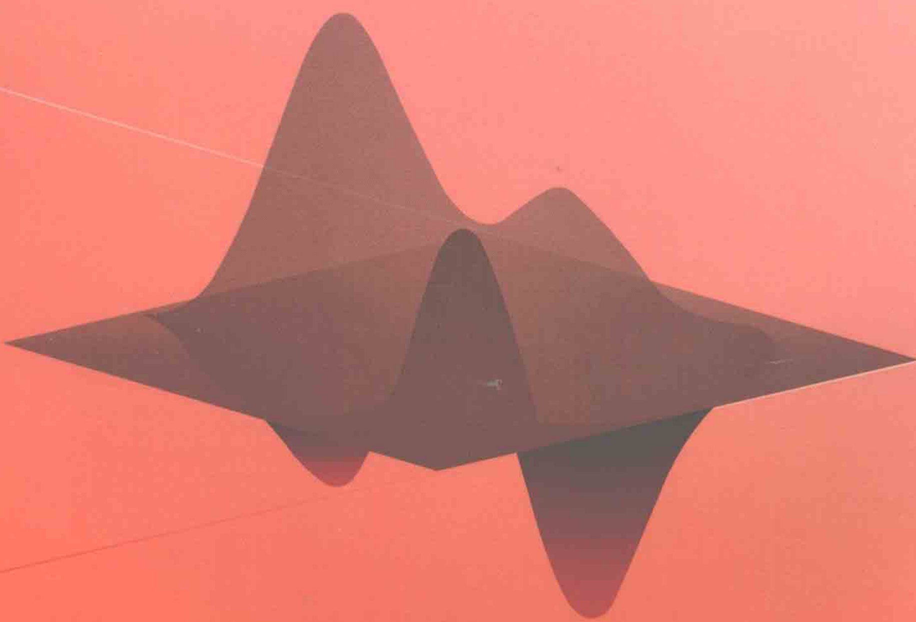
普通高等教育规划教材

工程优化

——原理、算法与实施

郭乙木　王双连　蔡　新　编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育规划教材

工程优化

——原理、算法与实施

郭乙木　王双连　蔡　新　编著

机械工业出版社

本书主要介绍工程优化的基本原理、技术思路、常用算法及在工程中的应用。主要内容包括线性规划、非线性规划、几何规划、动态规划、整数规划、随机规划以及准则算法、智能算法等多种优化方法的原理，算法实施及收敛性讨论。最后介绍如何应用商业软件中的优化模块实施工程优化设计。

本书内容广泛，算法介绍较全面，并有结合工程优化的算例。本书可作为机械工程、土木工程、水利工程、材料工程、动力工程和航空航天及化工等专业研究生和力学专业高年级本科生教材，也可作为从事相关领域工程优化设计的工程技术人员及科技工作者的阅读参考书。

图书在版编目（CIP）数据

工程优化：原理、算法与实施/郭乙木，王双连，蔡新编著．—北京：机械工业出版社，2008.9
普通高等教育规划教材
ISBN 978-7-111-25009-8

Ⅰ．工… Ⅱ．①郭…②王…③蔡… Ⅲ．工程-最优设计-高等学校-教材 Ⅳ．TB21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 132102 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
责任编辑：季顺利 版式设计：张世琴 责任校对：魏俊云
封面设计：姚 毅 责任印制：邓 博
北京京丰印刷厂印刷
2008 年 10 月第 1 版 · 第 1 次印刷
169mm×239mm · 24 印张 · 466 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-25009-8
定价：36.00 元

前 言

工程优化理论的发展与完善，并应用于工程设计，是工程设计从传统的设计方法向现代设计方法转变的一个主要标志。它极大地提高了产品设计水平，最大限度地缩短设计周期和降低费用，节省能耗。因此，它是一门涵盖几乎所有工程领域的应用技术和工程设计的优化方法。

工程优化的理论与方法，广义上说应该包含专用的和通用的两大领域。通用的是指对工程优化理论和方法进行较全面的阐述并给出相应的实施步骤和算法；专用的是针对某一具体工程设计要求，选择通用优化理论中适用该工程要求的算法并将传统设计中的经验和试验数据加以综合，形成具有工程针对性的一种工程优化理论与算法。

作者从20世纪80年代开始从事工程优化的教学和工程应用研究，积累了一些经验。深感有必要在研究应用的基础上，编著一本可以适用于力学专业高年级本科生和机械、土木、材料、航空及化工类研究生阅读的教材。本书编写将充分体现以学生为本，以教师为本，内容深度上力求兼顾学科发展和读者的实际水平及工程应用需求。

同时，考虑到目前商用软件的普及，绝大多数商业通用软件中都包含了优化程序模块，人们可以方便地加以调用。因此，现在已很少有人再花费大量时间、精力，独立地为某个项目去编制工程优化程序了。但鉴于工程优化应用范围的广泛性和优化算法本身具有很大的灵活性、选择性，因此不可能像一般有限元分析程序那样简单划一，而且需要读者掌握工程优化的基本理论与常用算法，以便依据各自的需求，有选择地应用商用软件中相应程序模块。鉴于上述想法，本书编写注重于工程优化的基本理论和算法的介绍，并结合工程应用的需求向读者展示如何使用商用软件解决工程问题。

全书共10章：

第1章综合阐述现代工程优化的形成、发展，以及它的数学描述和分类，向读者展示工程优化的轮廓及现状。

第2章简要讨论工程优化中最为简单，也是发展最为成熟的线性规划方法。

第3、4章介绍非线性规划中的无约束规划和有约束规划，这两章也是本书的重点，比较系统和全面地介绍了该方向目前常用算法和应用。

第5章介绍非线性规划中的一种特殊形式和特殊解法——几何规划，它较多地应用于工程设计中的成本优化。这也是非线性规划的重要组成部分。

第6、7章介绍较为特殊的工程优化问题——动态规划和整数规划。动态规划实质上是一个多阶段的决策问题，而不是普通意义上的动态问题，它较多地应用于管理和控制领域。整数规划是要求设计变量是离散型的整数，本书只作简要介绍。

第8章简要介绍目前还在使用但尚不完善的一些工程优化方法。准则法是发展最早的方法，尽管它理论上缺少严谨性，但有一定的工程应用价值，目前仍在一定范围内应用。随机规划、神经网络算法等算法尚在发展之中，本书只介绍已在工程中应用的部分算法；变分算法是一种由变分原理衍变而产生的一种优化算法，本书仅介绍其基本理论，读者可依据这些理论结合具体工程问题进行具体算法的推演；结构拓扑优化算法是结构工程优化的一种最新算法，其发展方兴未艾，有极大的应用前景。

第9章将目前广泛采用商用软件中的工程优化模块及使用方法结合工程应用实例加以简要介绍。

第10章介绍水工结构优化实例。以拦河大坝为对象，介绍了水工结构优化设计的方法。

本书在部分章后附有习题，可供读者阅读和练习。本书作为教材，教师可以依据学生现状和学时安排有所侧重。

本书第1~5章由浙江大学郭乙木教授编写，第6~9章由郭乙木、王双连博士编写，第10章由河海大学蔡新教授编写，全书由郭乙木教授统稿。

在编写过程中，浙江大学胡潇毅博士、马利博士、骆天舒博士等为本书的部分算例、习题的选择计算和书稿打印、绘图花费了大量精力和时间，作者向他们表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，本书还会存在诸多错误和不妥之处，敬请读者批评指正。

作　者

目　　录

第1章 绪　论

1.1 引言

工程优化，顾名思义是寻求最佳的工程效益，或最佳工程设计方案。也就是说，优化是在给定的约束条件下，从众多的可能产生的方案中获取最好结果的行为。在任何工程系统的规划、设计、施工和维护中，工程师和专家必须在各个阶段采用多种手段加以决策和审定，所有这些决策和审定的目标无非是使完成某一阶段任务时，希望花费最小的代价以期获得最大的效益，最终达到整个工程系统的最佳结果。这就是所谓工程优化。

事实上，优化自人类文明社会开始以来，一直是人们在生产和社会活动中追求的目标。诸如古代历史上战争武器的不断改进，战略、战术水平的不断提高，生产工具的不断创新，居住条件和生存环境的不断改善，等等，这都是人们追求优化的必然产物。但是，这种改善和提高都是建立在以往经验的基础上，并已为长期实践证明是可行的。虽然它们都是人类发展进程中的宝贵财富，但不一定是最好的。同时，它还受到当时历史条件下经验的局限性所制约。随着社会的进步，新技术的不断涌现，很多经验已不能适应生产力发展的需要，并且在现代工程的很多领域(例如航天领域和核工程领域)不可能积累很多经验，否则代价太大。因此，急需发展一种更为科学的、尽量少依赖于经验的方法，这就是产生现代优化学科的时代背景。现代优化作为一门学科，它在20世纪40年代开始发展，给出严格的定义，并建立了数学模型，经过科学的推论、运算，进而给出符合逻辑的优化结论。

任何一门学科的发展都是由需求和可能有机结合的产物，工程优化也不例外。尽管优化是人们一直追求的目标，但任何一项工程，给定条件往往比较复杂。例如，建造一座桥梁，除了考察水文、地震、通航能力及它对周边环境影响外，还需考虑以下问题：桥梁形式(诸如钢结构桥、拱桥、斜拉桥、悬索桥，等等)、结构设计及它们的物理、力学性能比较；工艺可行性，原料提供、零配件加工单位、施工单位选择；建造成本、维护成本以及使用寿命。有的还需预测十年、二十年、甚至更长时间以后社会发展所带来的适用性和环境协调性等。也就是说，从数学角度考察，约束条件数目及可变参数都很多，即使建立一个比较理想的数学模型，计算工作量也是十分庞大的。因此，在电子计算机没有产生以前，优化

问题是可望而不可及的，即使在数学领域已形成了优化的概念，也不可能得到很好的发展。随着20世纪40年代电子计算机的诞生和发展，以及二次大战以后社会生产力的迅速增长，人们对优化目标的追求也日趋强烈。在需求和可能的强力推动下，使工程优化学科开始了前所未有的突飞猛进，并且出现了诸多成功应用的典型范例，发挥了极大的经济效益，为工程优化的普及推广奠定了基础。同时，这些成就也促进了工程优化学科本身的发展。直到今日，国际上几乎所有的大型科学计算软件以及大型软件库中都有比较完善的各种工程优化计算方法的程序模块。随着工程优化理论的不断完善和提高，它将与有限元软件一起成为虚拟科学与工程的一个重要组成部分，成为21世纪科学发展中强有力的分析、决策手段，也是21世纪工程师所必须掌握的一门技能。

优化从数学角度考察是将人们所追求的目标放在一个包含一些决策变量的函数中，进而寻找这个函数的极大值或极小值的过程。如果设函数$f(\boldsymbol{x})$是目标函数，$\boldsymbol{x}$是可变的决策变量向量，则$\boldsymbol{x}^*$为函数$f(\boldsymbol{x})$的极小值点，反之，$\boldsymbol{x}^*$亦是相应的$-f(\boldsymbol{x})$函数的极大值点，图1-1表示单变量函数的极值示意图。

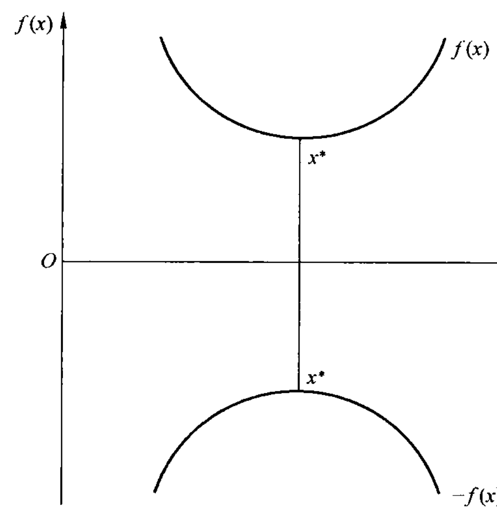


图1-1 单变量函数的极大和极小值

为不失一般性，习惯上将优化规定为求极小值。这种寻优法在数学上称之谓数学规划法，最初它是运筹学的一部分。运筹学是涉及用科学的方法和手段进行决策和确定最优解的数学方法，它主要包括三个部分：数学规划法、随机过程法和统计学方法。而数学规划法，又可以按其函数性质分为线性规划、非线性规划、几何规划、动态规划、二次规划、整数规划、多目标规划等。随着优化技术的发展，不仅原来各类规划的算法得以发展，而且已逐步将随机过程方法、统计学方法和仿真离散算法引入优化方法，形成比传统数学规划法更为广阔，且实用、有效的现代优化科学体系。

优化方法的最早出现可追溯到Newton，Lagrange和Cauchy时代。由于Newton和Leibnitz对微积分的贡献，才使优化的微分学方法发展成为可能。Bernoulli，Euler，Lagrange和Weirstrass等奠定了变分学基础，包含待定乘子的约束问题优化方法是由Lagrange创立，故命名为拉格朗日乘子法，Cauchy最早应用最速下降法求解无约束极小化问题。尽管早期就有了这些贡献，但在20世纪40年

代以前，优化方法进展甚微，只有当电子计算机的迅速发展和普及，才使优化的实施出现转机，并应用于工程领域，发展成为一门工程优化的独立学科。

现代优化发展中，下列一些学者的工作是应该予以关注的。1947 年，Dantzig 提出了求解线性规划问题的单纯形法；1957 年，Bellman 对动态规划问题提出了最优化原理，这两方面的研究为约束优化方法打下了基础。1951 年，Kuhn 和 Tucker 为规划问题最优解的必要条件和充分条件进行了探索。20 世纪 60 年代初，Zoutendijk 和 Rosen 对非线性规划的贡献有很重要的价值。几何规划是 20 世纪 60 年代由 Richard Duffin、Clarence Zener 和 Elmor Peterson 提出和发展起来的。Gomory 是整数规划的开拓者。目标规划是 1961 年由 Charnes 和 Cooper 为解决线性问题而提出的。网络分析法主要是一种管理控制方法，在 20 世纪 50 年代后期已开始发展。对策论的基础是 Neumann 在 1928 年奠定的，直至20 世纪末才被用于解决工程问题。

随着科学技术的迅速普及与发展，优化技术在工程领域中得到了越来越多的应用，产生了巨大的经济和社会效益，同时也促进诸多学科的发展。这也就势必要求现代工程师能熟练掌握这一门技能，以适应社会生产力发展和科学研究的需求，这也是作者编著本书的目的。

1.2 数学描述与分类

从广义上说，优化是可以解决任何工程问题的。优化的步骤是首先将工程问题转化为寻找优化目标的数学表达式，即数学建模。然后按照这个数学模型求解最优解，从而达到工程优化的目标。数学建模是最为关键的一步，它要求我们所建立的数学模型是表述某工程问题客观特征的一个数学表达式。由于工程问题的千姿百态，所涉及的因素也十分复杂，这导致数学模型的千变万化。以简单的一个高层民用建筑为例，如仅考察其结构安全性，它所承受的外荷载中的风载、地震荷载的数学模型就有很多种，如果考虑动力响应问题就更为复杂了，因此任何一个工程问题的数学模型不可能包罗万象，只能包含所要解决的工程问题的主要影响因素，而忽略其次要因素。也就是说，同一个工程对象只要求解的目标不同，就应该建立不同的数学模型。这一过程实质上是由建模者对工程问题理解的深度和对求解优化问题的数学过程的掌握程度所决定。鉴于工程问题的种类很多，又几乎涉及所有技术领域，本书不可能详细叙述数学模型建立的方法与过程，我们只能在读者已经建立了数学模型的基础上讨论优化问题。作者希望读者通过对本书的阅读，能加深对数学模型建立的了解和如何对已经建立的模型选择恰当的方法加以求解。

一个优化问题或数学规划问题可以作如下描述：

求 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$，使 $f(\boldsymbol{x})$ 极小，且满足约束条件

$$\left.\begin{aligned} g_j(\boldsymbol{x}) &\leqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,m) \\ h_k(\boldsymbol{x}) &= 0 \quad (k=1,2,\cdots,p) \end{aligned}\right\} \tag{1-1}$$

这里 $\boldsymbol{x}$ 是一组由可变参数组成的 n 维向量，称为设计变量；$f(\boldsymbol{x})$ 称为目标函数；$g_j(\boldsymbol{x})$ 和 $h_k(\boldsymbol{x})$ 分别称为不等式约束和等式约束函数。变量数 n、约束个数 m 和 p 之间是相互独立的，无任何关联。

数学表达的习惯将式(1-1)记为

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{E}_n \\ \text{s. t} \quad & \left.\begin{aligned} g_j(\boldsymbol{x}) &\leqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,m) \\ h_k(\boldsymbol{x}) &= 0 \quad (k=1,2,\cdots,p) \end{aligned}\right\} \end{aligned} \tag{1-2}$$

这里用 s. t(Subject to)表示“受制于”。为了阐述上的方便，将优化问题中的几个常用数学术语简要介绍如下：

1. 设计变量

任何工程系统或零部件都可以用一组量来加以描述。例如一根矩形截面梁可以用长、宽、高加以表达。在设计过程中某些设计量是可以改变的，而另一些量是确定的。所有在设计过程中可以变化的量，我们称为设计变量 $\boldsymbol{x}$。如上述矩形梁，按某工程要求，长度是确定的，则宽与高就是设计变量。如果给出的问题是一个控制或决策的优化过程，则 $\boldsymbol{x}$ 亦可称为控制变量或决策变量，而设计变量 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$ 的维数 n 给定了式(1-2)是 n 维的优化问题。直观地可以推测，对于同一类型的优化问题，n 的数值越大，对应的优化分析难度也越大。

2. 约束与约束曲面

在很多工程问题中，设计变量是不能任意选择的。它们必须满足某种规定或限制，以达到设计的功能要求和其他特性的要求。为给出一个可以接受的设计而必须满足的限制均称为设计约束。数学上表示为函数 $g_j(\boldsymbol{x})$ 和 $h_k(\boldsymbol{x})$。这些约束又可以分为性态约束和几何约束。前者表示工程系统的性态或特性限制，而后者表示设计变量的物理限制、几何尺寸限制。

从数学角度考察，函数 $g_j(\boldsymbol{x})$ 和 $h_k(\boldsymbol{x})$ 可描述为几何图形，即可表示为曲线 $(n=1)$，曲面 $(n=2)$ 和超曲面 $(n>2)$，所谓超曲面是指不能用三维几何图形表示的数学曲面。这些曲线、曲面、超曲面统称为约束曲面。约束曲面把设计空间分为两个区域：$g_j(\boldsymbol{x})\leqslant 0$ 的区域和 $g_j(\boldsymbol{x})>0$ 的区域(或 $h_k(\boldsymbol{x})=0$ 和 $h_k(\boldsymbol{x})\neq 0$)。即满足约束条件可行域和不满足约束条件的不可行域。所有约束曲面 $g_j(\boldsymbol{x})=0$　$j=1,2,\cdots,m$ 的集合，构成组合可行域边界。图 1-2 表示某个二维设计空间，当 $f(\boldsymbol{x})$ 等于某个定值时，$g_j(\boldsymbol{x})$ 约束曲面在 (x_1,x_2) 平面上的投影。画阴影线的区域为不可行域。位于一个或多个约束曲面上的点称为边界点。相应于边界点的约束称为起作用的约束或现行约束，不在任何约束曲面上的点称为自由

点。由此可见，约束曲面上所有的点均为可行域上的点。

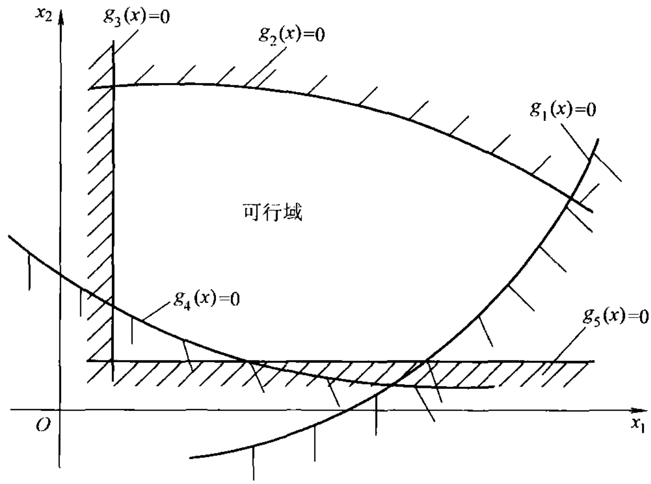


图 1-2 二维设计空间中的约束曲面

3. 目标函数

传统设计过程的目的在于找到一个可行的、合适的设计方案，这种设计仅仅是满足功能要求和其他要求。一般而言，满足上述要求的可行设计有很多个，优化设计的目的就是从众多的可行设计中找出其中最好的一个。这样就必须选择一个准则来对这些可行设计加以比较。将这个准则用以设计变量 $\boldsymbol{x}$ 和函数 $f(\boldsymbol{x})$ 来表达时，这一函数 $f(\boldsymbol{x})$ 就被称为准则函数，或价值函数，或目标函数。目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的选择由问题的性质所决定。要求极小化的目标函数，在飞行器、空间运输工具及某些土木结构中通常取为重量；精密机械和压力加工中，通常取成本作为目标；而动力机械中，很明显应选择机械效率最高为目标。因此，目标函数的选择在很多设计中是明确的。然而，就某些问题而言，对某一特定准则得到的优化结果，对另一准则来说却可能是不满意的。例如，在机构设计中，具有最优传动角的设计可能会导致相当于作用力最小的设计。类似地，满应力设计（即所有部件的最大应力均同时达到最大设计允许应力要求）中也不一定得到结构重量为最轻的结果。因此，目标函数的选择是工程优化的重要一环，而它主要依赖于工程师对优化对象的工程理解和对优化方法的认识。

4. 目标函数曲面和等值曲面

满足 $f(\boldsymbol{x}) = C$（常数）的所有点的轨迹，在设计空间中形成一个超曲面，这个超曲面称为目标函数等值曲面。当 $n=2$ 时，这个曲面是一条曲线；当 $n=3$ 时为等值曲面，当 $n>3$ 时为等值超曲面。每一个 C 值对应于曲面族中的一个不同曲面。例如 $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$，其目标函数曲面和等值线如图 1-3 所示，目标函数等

值线在(x_1,x_2)平面中的投影是一组同心圆，其圆心为原点。同一圆上的所有点，其目标函数值都是相等的，它与地图上表示海拔的等高线完全类似，因此不少书的作者将其称为等高线。

显然，如果一个优化问题能够画出目标函数曲面和约束曲面，那么其目标函数的最优点就形象地显示出来了。但问题往往是当设计变量超过两个或三个时，图1-2和图1-3所给出的约束曲面和目标函数曲面变得很复杂而难以用几何图形加以描述。这样的问题就必须作为一个数学问题去求解。

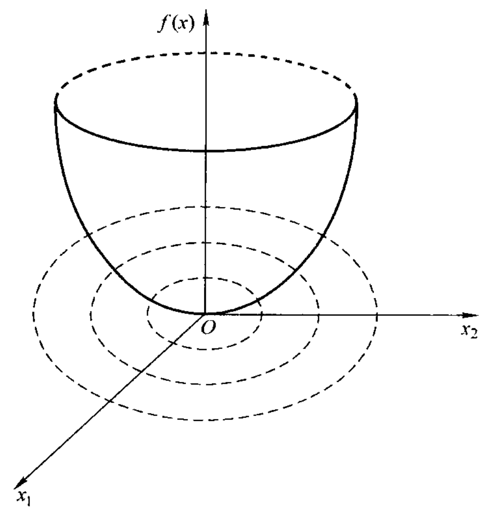


图1-3 目标函数曲面与等值线

为了数学方法求解的需要，我们将式(1-2)表述的优化问题按数学上函数的性质进行分类：

(1) 线性规划 若式(1-2)中的函数$f(\boldsymbol{x})$、$g(\boldsymbol{x})$、$h(\boldsymbol{x})$均为设计变量$\boldsymbol{x}$的线性函数，则式(1-2)表示的规划问题称为线性规划。线性规划的目标函数曲面和约束曲面均退化为多边形、多面体、超多面体。线性规划是发展最完善的，也是最为简单的规划方法之一。

(2) 非线性规划 若式(1-2)中的函数$f(\boldsymbol{x})$、$g(\boldsymbol{x})$、$h(\boldsymbol{x})$中至少有一个是设计变量$\boldsymbol{x}$的非线性函数，则式(1-2)表示的规划问题是非线性规划。习惯上把非线性规划的计算方法分成四类：

1) 对非线性规划不作转换的分析方法。即直接求解非线性规划的分析方法，目前较为常见的求解方法有综合梯度法、梯度投影法、可行方向法、简约梯度法，等等。

2) 对非线性规划不作转换的直接搜索方法，这类方法的特点是直接搜索目标函数值且须满足约束条件，然后比较其函数值的大小，并寻求使其目标函数值趋向小的方向，从而求得最优点。这类方法常见的有格点法、复合形法、随机试验法，等等。

3) 用线性函数或二次函数逐步逼近非线性规划的原函数，这就是所谓的序列线性化方法和序列二次规划方法。

4) 把含有约束的非线性规划问题转换成无约束极值问题，通过解一系列无约束极值求解非线性规划的方法，即序列无约束方法。

(3) 几何规划 它是求解一类特定的非线性规划的方法，即主要用来求解目标函数和约束函数都是正多项式型函数时的极小化问题。它与其他优化方法的

不同点在于它强调目标函数中各项的相对大小，而并不强调其设计变量；它不是先求设计变量的最优值点，而是先求目标函数的最优值。

（4）动态规划　动态规划(Dynamic programming)是解决多阶段决策过程最优化的一种方法。大多数实际决策问题中，决策常常是在不同的时间、空间及不同的水平上序贯地作出。这种序贯地作出决策的问题常被称为序贯决策问题。另外，因为这种决策是在不同级上作出的，所以也称为多级决策问题。动态规划就是一种非常适用于多级决策问题的数学工具。

（5）整数规划　上述提及的各种规划问题的极小化过程，对所有设计变量的唯一限制是允许它们是任意实数，这在许多工程实际问题中存在小数解是完全适当的和可能的，但也有许多场合，小数解既无现实可能，也无物理意义。例如：工厂设备配置优化中，安排1.5台某型号数控机床，安排工人2.8人，这显然是不现实的，必须要求优化结果是整数。这就提出了整数规划的概念和算法。

（6）其他规划算法　在规划算法上还有其他规划算法，诸如二次规划(目标函数是二次多项式,约束函数是线性的非线性规划问题)、随机规划、多目标规划等。

随着优化技术的发展，除了上述所表述的应用数学规划方法求目标函数极小化外，还有一些其他形式表述的优化方法：准则法、变分法、智能算法、拓扑优化，等等。

以上提出的优化分类仅是按计算方法不同而给出的一种分类方法。此外，还有按约束条件分类，按设计变量性质分类，按问题的物理结构分类，按函数特性分类，等等。为本书叙述和教学的需要，按计算方法分类既简单明了，又易于接受，故本书将按计算方法分类加以阐述。

1.3 工程优化的简要数学基础

工程优化从数学角度考察，其主要内容可以归纳为数学规划方法，隶属于运筹学的一部分，运筹学包括数学规划方法、随机过程方法、统计学方法。规划问题的方法很多，特别是求解非线性规划问题，更是复杂多变，且所求得的极小点一般都是局部极小点，而我们进行工程优化的目标是要求给出全局极小点。这就产生了矛盾。为了解决这个矛盾，一般有两种途径：一是寻求全局极小值的计算方法；另一种是从理论上找出哪些情况下局部极小值就是全局极小。遗憾的是，到目前为止，前者的研究成果虽然很多，从数学上考察取得了很大的进展，但还远未达到在工程应用中可以普遍适用的程度，为此我们重点介绍后者。

另一方面，工程优化可以归结为一个数学问题，对数学问题求解，往往会涉及一些数学定义、定理、术语以及解的充分必要条件等数学理论问题。为了读者

以后阅读和理解上的方便，将工程优化中所涉及到的基本数学定义及主要相关理论在这里作一简单说明，考虑到工程应用的需求和工程类专业学生的实际情况与要求，对这些数学上的专用定义、定理仅作必要的阐述，尽可能避免繁杂的严格数学证明。

现将工程优化中涉及的基本而又重要的数学概念择要介绍如下：

1. 凸集与凸规划

凸集与凸规划是优化理论中的一个重要概念，是判断给出的最优解是否是全局最优解的重要依据。

首先我们定义局部最优解和全局最优解：设 $\boldsymbol{D}$ 是式(1-2)的可行区域。$\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{D}$，若存在 $\boldsymbol{x}^*$ 的一个邻域 $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}^*,\delta)$，当 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D} \cap \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}^*,\delta)$ 时，就有

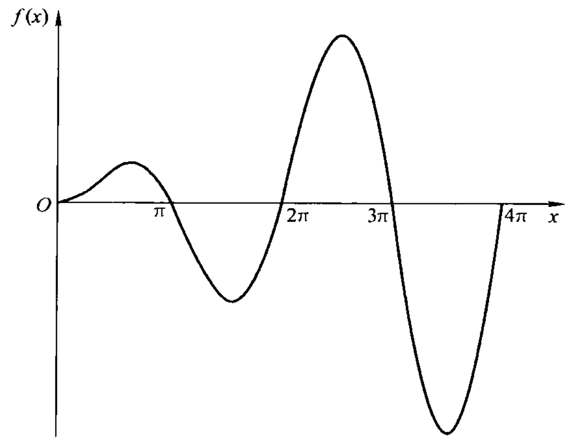


图 1-4　$f(x)=x\sin(x)$ 曲线图

$$f(\boldsymbol{x}^*) \leqslant f(\boldsymbol{x}) \tag{1-3}$$

则称 $\boldsymbol{x}^*$ 是式(1-2)所表示的规划问题的一个局部最优解。当式(1-3)中严格不等号“<”成立，则称 $\boldsymbol{x}^*$ 是一个严格局部极小解。

同样设 $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{D}$，若对 $\boldsymbol{D}$ 中任一点 $\boldsymbol{x}$，都有

$$f(\boldsymbol{x}^*) \leqslant f(\boldsymbol{x})$$

则称 $\boldsymbol{x}^*$ 是式(1-2)的全局最优解。

为说明上述定义，我们举一简例：

$$\begin{aligned} &\min \quad f(x)=x\sin(x) \\ &\text{s. t} \quad 0 \leqslant x \leqslant 4\pi \end{aligned}$$

它的图形如图 1-4 所示。由图 1-4 可以看出，$x=0, x=\frac{3}{2}\pi, x=\frac{7}{2}\pi$ 均为 $f(x)$ 的局部极小点，但只有 $x=\frac{7}{2}\pi$ 时，才是函数 $f(x)$ 的全局极小点。

但应当指出，对所谓凸规划来说，局部极小点一定是全局极小点，为此我们下面介绍凸集、凸函数和凸规划的定义。

如果称集合 $\boldsymbol{D}$ 是凸集合，系指对任何两点 $x_1 \in \boldsymbol{D}$、$x_2 \in \boldsymbol{D}$ 均有

$$\boldsymbol{x}=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2 \in \boldsymbol{D}, \forall \lambda_1+\lambda_2=1, \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0 (\lambda_1, \lambda_2 \text{ 为一对实数})$$

或记为

$$\boldsymbol{x}=\lambda x_1+(1-\lambda_1)x_2\in\boldsymbol{D}\quad(\forall 0\leqslant\lambda\leqslant1)\tag{1-4}$$

也就是说，若 x_1、x_2 在集合内，则 x_1 与 x_2 之间的线段上所有的点整个属于集合 $\boldsymbol{D}$。

显然 $\boldsymbol{E}^n$ 是凸集。图1-5所示的图形是凸集，而图1-6所示的图形就不是凸集。

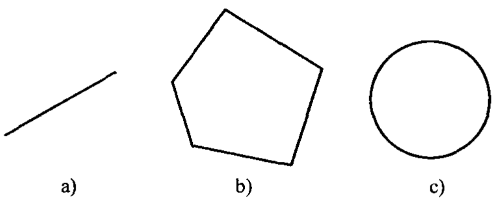


图1-5　凸集

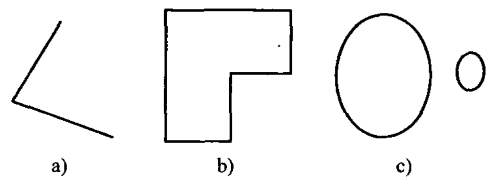


图1-6　非凸集

定义在凸集 $\boldsymbol{D}$ 上的函数 $f(\boldsymbol{x})$ 为凸函数，则 $f(\boldsymbol{x})$ 应满足

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\quad(\forall x_1,x_2\in\boldsymbol{D}\text{ 及 }\forall 0\leqslant\lambda\leqslant1)\tag{1-5}$$

若将式(1-5)中"≤"改为"<"，则称 $f(\boldsymbol{x})$ 为定义在凸集 $\boldsymbol{D}$ 上的严格凸函数。反之，若将式(1-5)改写为

$$g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant\lambda g(x_1)+(1-\lambda)g(x_2)\quad(\forall x_1,x_2\in\boldsymbol{D}\text{ 及 }\forall 0\leqslant\lambda\leqslant1)\tag{1-6}$$

则称函数 $g(\boldsymbol{x})$ 为定义在凸集 $\boldsymbol{D}$ 上的凹函数。同理将式(1-6)中"≥"改为">"，便得到严格的凹函数定义。

显然，若 $f(\boldsymbol{x})$ 为凸函数，则 $-f(\boldsymbol{x})$ 为凹函数，我们也可以用这种关系来定义凹函数。

二次函数 $f(x)=x^2+4$ 就是一个凸函数，其图形如图1-7所示。而 $g(x_1,x_2,x_3)=4-x_1^2-x_2^2-x_3^2$ 是一个凹函数。$\varphi(x_1,x_2)=4+x_1^2-x_2^3$ 既不是凸函数，也不是凹函数，称为非凸函数。

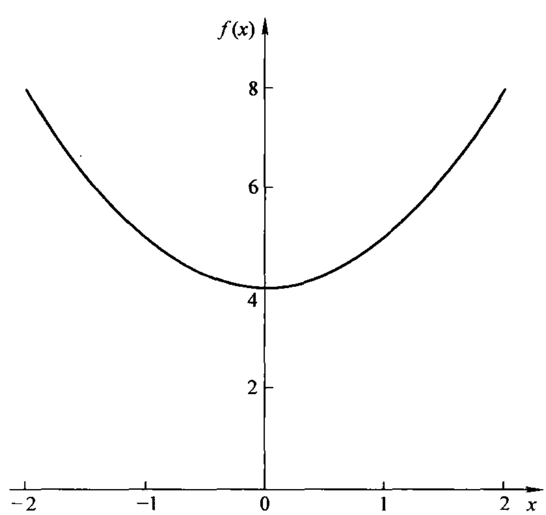


图1-7　凸函数 $f(x)=x^2+4$

所谓凸规划是指