最新国外数学竞赛分类题解

王连笑 编著

天津教育出版社

最新
国外数学竞赛分类题解

王连笑 编著

天津教育出版社

最新国外数学竞赛分类题解
王连笑
*
天津教育出版社出版
（天津市湖北路27号）
新华书店天津发行所发行
天津新华印刷一厂印刷
*
850×1168毫米32开　11.0印张　1插页　256千字
1990年2月第1版
1990年2月第1次印刷
印数1—6000
ISBN 7-5309-0679-8
G·546　定价：4.60元

写在前面

中学生数学竞赛是推动中学生数学课外活动的一个重要形式，通过数学竞赛对于发现一批有数学才能的人才，调动青少年学习数学的积极性，培养他们的进取精神有很重要的意义。

我国从1978年恢复数学竞赛以来，取得了突出的成绩，特别是近几年我国参加国际数学奥林匹克一鸣惊人，引起世界各国的重视。1990年第31届国际数学奥林匹克即将在我国首都北京举行。为了迎接这次在我国举行的国际数学大赛；为了开阔中学生的眼界，帮助他们训练自己的解题能力和提高自己的数学水平；作者精选了八十年代国外数学竞赛中的232个题目，分类加以整理，并对其中的一些题目的解题思路和解题方法进行了较为详细的叙述。对一些中学课本中没有涉及到的知识，例如数的整除性，抽屉原则和函数[x]等，做了一些简单的介绍。

本书可供高中学生特别是高中数学爱好者阅读，也可供中学数学教师开展课外活动时参考。对师范院校数学系的学生——未来的数学教师，无疑也是一个有用的参考资料。

尤其应该指出的是，在本书写成之后，凌星熵老师对书稿进行了十分认真的审阅，从题目的译法到解法都提出了很好的见解，作者对凌老师的工作表示感谢。

限于作者的水平和眼界，书中的错误和不妥之处在所难免，敬望读者给予指正。

作　者

1988年9月

目　　录

一、代数方程

在国外数学竞赛中，关于代数方程和方程组的题目是屡见不鲜的．这些题目大致分为解方程或方程组；根据已知条件构造方程或多项式；利用方程的性质证明解的唯一性或根的个数的奇偶性以及求方程的近似解等等．其中解方程和解方程组的题目出现的较多，这种题目要求解答者有高度的解题技巧和恒等变形能力，往往需要巧妙的换元，或者利用判别式和韦达定理，或者借助几何图形或函数图象才能解出．

1．证明：满足不等式

$$\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}\geqslant\frac{5}{4}$$

的实数 x 的集合是互不相交的区间的并集，并且这些区间的长度的总和等于1988．

〔第29届国际数学奥林匹克　1988年〕

〔证〕 构造辅助函数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}-\frac{5}{4}$$

显然，当$x<1$时，$f(x)<0$，因此在区间$(-\infty,1)$中不等式

$$\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}\geqslant\frac{5}{4}$$

无解.

又对$n=1, 2, 3, \cdots, 70$时,

$$\lim_{x\to n+0} f(x)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to n-0} f(x)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\frac{5}{4}.$$

于是方程$f(x)=0$在区间$(1, 2), (2, 3), \cdots, (69, 70), (70, +\infty)$中各有一根,我们依次记为$x_1, x_2, \cdots, x_{70}$.

下面讨论方程

$$\frac{4}{5}(x-1)(x-2)\cdots(x-70)f(x)=0 \qquad ①$$

显然,$x_1, x_2, \cdots, x_{70}$是方程①的根.

又由于①的左边为70次代数多项式, 所以①至多有70个根.

于是$x_1, x_2, \cdots, x_{70}$是$f(x)=0$在对应区间中的唯一根.

由此,不等式$f(x)\geqslant 0$的解集为

$$(1, x_1]\cup(2, x_2]\cup\cdots\cup(70, x_{70}]$$

所以不等式的解集是互不相交的区间的并集.

下面计算这些区间的长度之和S.

$$S=\sum_{i=1}^{70}(x_i-i)$$

$$=\sum_{i=1}^{70}x_i-\sum_{i=1}^{70}i \qquad ②$$

由于x_i是方程①的根, 于是由根与系数的关系, $\sum_{i=1}^{70}x_i$为

①之左边的多项式中x^{69}的系数.

即为

$$\frac{4}{5}(1+2+\cdots+70)-(-1-2-\cdots-70)$$

代入②式得

$$S=\frac{4}{5}\sum_{i=1}^{70} i=1988.$$

2.求方程

$$x^2+18x+30=2\sqrt{x^2+18x+45}$$

的实根的乘积.

〔第1届美国数学邀请赛 1983年〕

由于已知方程的两边都出现x^2+18x，可以启发我们利用换元法.

〔解〕设辅助未知数 $t=\sqrt{x^2+18x+45}$

于是原方程可化为

$$t^2-2t-15=0$$

解得 $t_1=5$，$t_2=-3$ （$\because t>0$，t_2舍去）

$\therefore$ $\sqrt{x^2+18x+45}=5$

$$x^2+18x+20=0$$

$\because$ $\Delta=18^2-4\times20>0$

$\therefore$ 方程有二实根，设为x_1，x_2

由韦达定理可得

$$x_1\cdot x_2=20.$$

3.确定所有这样的实数组（x，y，z），满足方程组

$$\begin{cases}2x+x^2y=y\\2y+y^2z=z\\2z+z^2x=x\end{cases}$$

〔民主德国数学竞赛 1982年〕

此题初看起来不知如何下手，但是，我们仔细观察每一个方程可以看出，每一个方程只有两个未知数，而且其中一个是一次的，例如第一个方程中y是一次的，可求出

$$y=\frac{2x}{1-x^2}$$

这个等式使我们联想起二倍角的正切公式，于是我们可以利用三角函数进行换元，为此得到下面的解法.

〔解〕由已知的方程组可以看出，x，y，z均不等于1，否则将出现

$$2+y=y$$

$$2+z=z$$

$$2+x=x$$

这是不可能的.

于是方程组可变形为

$$\begin{cases} y=\dfrac{2x}{1-x^2} \\ z=\dfrac{2y}{1-y^2} \\ x=\dfrac{2z}{1-z^2} \end{cases}$$

我们设$x=\mathrm{tg}\theta$，则有

$$y=\mathrm{tg}2\theta$$

$$z=\frac{2\mathrm{tg}2\theta}{1-\mathrm{tg}^2 2\theta}=\mathrm{tg}4\theta$$

$$x=\frac{2\mathrm{tg}4\theta}{1-\mathrm{tg}^2 4\theta}=\mathrm{tg}8\theta=\mathrm{tg}\theta$$

解三角方程

$$\operatorname{tg}8\theta=\operatorname{tg}\theta$$

得 $$8\theta=k\pi+\theta \qquad (k\in Z)$$

$$\theta=\frac{k\pi}{7} \qquad (k\in Z)$$

于是
$$\begin{cases} x=\operatorname{tg}\dfrac{k\pi}{7} \\ y=\operatorname{tg}\dfrac{2k\pi}{7} \\ z=\operatorname{tg}\dfrac{4k\pi}{7} \end{cases} \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7)$$

4.证明：满足方程组

$$x(x-1)+2yz=y(y-1)+2zx=z(z-1)+2xy$$

的三元数组

$$T=(x-y,\ y-z,\ z-x)$$

仅有有限多个，求出所有这种三元数组.

〔美国普特南数学竞赛 1986年〕

显然，需要把已知方程组进行变形，使之出现$x-y$，$y-z$，$z-x$的形式，然后进行换元.

〔证〕由 $x(x-1)+2yz=y(y-1)+2zx$

可得
$$x^2-x-y^2+y+2yz-2zx=0$$
$$(x-y)(x+y-2z-1)=0$$
$$(x-y)[(y-z)-(z-x)-1]=0$$

同样可得
$$(y-z)[(z-x)-(x-y)-1]=0$$
$$(z-x)[(x-y)-(y-z)-1]=0$$

我们设$x-y=a$，$y-z=b$，$z-x=c$.

则原方程组可化为

$$\begin{cases} a(b-c-1)=0 & ① \\ b(c-a-1)=0 & ② \\ c(a-b-1)=0 & ③ \end{cases}$$

首先，我们可以证明，a，b，c不能都不等于0，否则若$a\neq 0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$，则由方程组得

$$\begin{cases} b-c=1 \\ c-a=1 \\ a-b=1 \end{cases}$$

三式相加得　$0=3$

这是不可能的.

因此，a，b，c中至少有一个为0，下面分两种情况进行讨论.

(i) 若a，b，c中至少有两个为0，例如$a=0$，$b=0$，则由③得

$$c(0-0-1)=0$$

于是$c=0$.

这样可得到一组解：　$T_1=(0, 0, 0)$.

(ii) 若a，b，c中恰好有一个为0.

当$a=0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$时，由②，③得

$$\begin{cases} c-1=0 \\ -b-1=0 \end{cases}$$

于是$c=1$，$b=-1$.

这样可得到第二组解：　$T_2=(0, -1, 1)$

同样可得：　$T_3=(1, 0-1)$

$T_4=(-1, 1, 0)$

于是只有上面的四组解.

5. 解方程组

$$\begin{cases}\sqrt{x}-\dfrac{1}{y}-2w+3z=1\\ x+\dfrac{1}{y^2}-4w^2-9z^2=3\\ x\sqrt{x}-\dfrac{1}{y^3}-8w^3+27z^3=-5\\ x^2+\dfrac{1}{y^4}-16w^4-81z^4=15\end{cases}$$

〔第26届国际数学奥林匹克候选题　1985年〕

容易看出，如果把$\sqrt{x}$，$-\dfrac{1}{y}$，$2w$，$-3z$作为变元，这四个方程中的相应变量依次是它们的一次，二次，三次和四次幂．因此可用下面的换元法来解．

〔解〕设$a=\sqrt{x}$，$b=-\dfrac{1}{y}$，$c=2w$，$d=-3z$，则有

$$\begin{cases}a+b=c+d+1 & ①\\ a^2+b^2=c^2+d^2+3 & ②\\ a^3+b^3=c^3+d^3-5 & ③\\ a^4+b^4=c^4+d^4+15 & ④\end{cases}$$

我们看到方程组的左边是关于a和b的对称式，右边含有关于c和d的对称式，于是可设法求出$a+b$，ab或$c+d$，cd来．

①^2－②得　　$ab=-1+c+d+cd$　　⑤

②^2－④得　　$a^2b^2=-3+3c^2+3d^2+c^2d^2$　　⑥

①×②－③并利用⑤和①得

$cd=3+c+d$　　⑦

⑤^2－⑥^{2}并利用⑦可解得

$cd=1$　　⑧

再由⑦得　$c+d=-2$ ⑨

由⑧和⑨解得　$c=d=-1$

再由①和⑤解得$a=-2$，$b=1$（因为$a=\sqrt{x}\geqslant 0$，舍去）和$a=1$，$b=-2$，从而有

$$a=1,\ b=-2,\ c=-1,\ d=-1.$$

即　$x=1$，$y=\frac{1}{2}$，$w=-\frac{1}{2}$，$z=\frac{1}{3}$.

6.解方程组：
$$\begin{cases} y^2=x^3-3x^2+2x & ① \\ x^2=y^3-3y^2+2y & ② \end{cases}$$

〔第17届全苏数学竞赛　1983年〕

我们注意到这个方程组没有常数项，因此可以设$y=kx$，通过对参数k的讨论来解方程组，我们再注意到这个方程组的对称性，显然$k=1$和$k=0$时方程组有解.

〔解〕设$y=kx$.

(i) 当$k=1$时，由$y=x$代入方程①得

$$x^3-4x^2+2x=0$$

解得　$x_1=0$，$x_2=2+\sqrt{2}$，$x_3=2-\sqrt{2}$.

于是原方程组有解

$$\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=2+\sqrt{2} \\ y_2=2+\sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3=2-\sqrt{2} \\ y_3=2-\sqrt{2} \end{cases}$$

(ii) 当$k\neq 1$，$k\neq 0$时，把$y=kx$代入①②得

$$\begin{cases} k^2x^2=x^3-3x^2+2x & ③ \\ x^2=k^3x^3-3k^2x^2+2kx & ④ \end{cases}$$

③－④得　$(1-k^3)x^3+2(k^2-1)x^2-2(k-1)x=0$

$\because k\neq 1$，$x\neq 0$，方程两边同除以$(k-1)x$得，

$$(k^2+k+1)x^2-2(k+1)x+2=0 \qquad ⑤$$

考察判别式

$$\Delta = 4(k+1)^2 - 8(k^2+k+1) = -4k^2 - 4 < 0$$

于是方程⑤无实根，从而$k\neq 1$时，原方程组无解。

因此，原方程组只有$k=1$时的三组解。

7. 求出下面方程组的所有实数解x，y：

$$\begin{cases} x^4 + y^2 - xy^3 - \dfrac{9}{8}x = 0 \\ y^4 + x^2 - yx^3 - \dfrac{9}{8}y = 0 \end{cases}$$

〔奥地利—波兰数学竞赛　1985年〕

由于这个方程组没有常数项，又是关于x，y对称的，所以可以采用第6题的方法。

〔解〕设$y=kx$。

(i) $k=1$时，$y=x$，容易求得方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{9}{8} \\ y_2 = \dfrac{9}{8} \end{cases}.$$

(ii) 当$k\neq 1$时，由(i)显然$k\neq 0$，$x\neq 0$。于是有

$$\begin{cases} x^4 + k^2x^2 - k^3x^4 - \dfrac{9}{8}x = 0 & ① \\ k^4x^4 + x^2 - kx^4 - \dfrac{9}{8}kx = 0 & ② \end{cases}$$

①$\times k-$②消去x的一次项得

$$2(k-k^4)x^4 + (k^3-1)x^2 = 0$$

因为$x\neq 0$，约去x^2得

$$2k(1-k^3)x^2 + (k^3-1) = 0$$

因为$k\neq 1$，且k为实数，约去k^3-1，显然有$k>0$，从而x

和y同号，于是可得

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2k}}$$

由方程①可得，$x>0$，于是负根舍掉，即$x=\frac{1}{\sqrt{2k}}$

从而　　$y=kx=\sqrt{\frac{k}{2}}$

把$x=\frac{1}{\sqrt{2k}}$代入①式得

$$\frac{1}{4k^2}+\frac{k^2}{2k}-\frac{k^3}{4k^2}-\frac{9}{8\sqrt{2k}}=0$$

因为$k\neq 0$，两边同乘以$8\sqrt{2}k^2$得

$$2\sqrt{2}+2\sqrt{2}k^3-9k\sqrt{k}=0$$

再设$k\sqrt{k}=t$，于是

$$2\sqrt{2}t^2-9t+2\sqrt{2}=0$$

解得　$t_1=2\sqrt{2}$，　$t_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$

从而　$k_1=t_1^{\frac{2}{3}}=2$，$k_2=t_2^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$

所以有解

$$\begin{cases}x_3=\frac{1}{2}\\ y_3=1\end{cases};\qquad \begin{cases}x_4=1\\ y_4=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

于是方程组有四组解

$$\begin{cases}x_1=0\\ y_1=0\end{cases};\quad \begin{cases}x_2=\frac{9}{8}\\ y_2=\frac{9}{8}\end{cases};\quad \begin{cases}x_3=\frac{1}{2}\\ y_3=1\end{cases};\quad \begin{cases}x_4=1\\ y_4=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

8．设x_1,x_2,x_3是方程

$$x^3-6x^2+ax+a=0$$

的三个根，求出使得

$$(x_1-1)^3+(x_2-2)^3+(x_3-3)^3=0$$

成立的所有实数a，并对每一个这样的a，求出相应的x_1,x_2,x_3。

〔澳大利亚数学竞赛　1983年〕

我们注意到题设条件中给出了$x-1,x-2,x-3$，其中$x-2$恰为$x-1,x-3$的算术平均值，我们可以把方程中的x换成$u=x-2$。

〔解〕设$u=x-2$，则$u_i=x_i-2$ $(i=1,2,3)$ 是方程

$$(u+2)^3-6(u+2)^2+a(u+2)+a=0$$

的三个根，化简此方程得

$$u^3+(a-12)u+(3a-16)=0$$

由韦达定理得

$$u_1+u_2+u_3=0 \quad ①$$

如果 $(x_1-1)^3+(x_2-2)^3+(x_3-3)^3=0$

则有 $(u_1+1)^3+u_2^3+(u_3-1)^3=0$

然而由①式可得

$$(u_1+1)+u_2+(u_3-1)=0$$

由熟知的恒等式

$$m^3+n^3+p^3-3mnp=(m+n+p)(m^2+n^2+p^2-mn-np-pm).$$

可得 $(u_1+1)^3+u_2^3+(u_3-1)^3=3(u_1+1)u_2(u_3-1)=0$

从而解得

$$u_1=-1,\ u_2=0,\ u_3=1$$

中至少有一个成立。

(i)当$u_1=-1$时，这时$x_1=u_1+2=1$，代入原方程得$a=$