

资料汇编十一

质量与可靠性

精度、精度鉴定及精度验收

(有关标准的使用说明)

何国伟 编著

航空航天工业部《质量与可靠性》编辑部

1991.3

序 言

本书是应航空航天部质量司张增茂副司长及高顺林总工程师的委托编写的。目的在对有关的技术、管理人员介绍必要的精度、精度鉴定及精度验收的基本知识。并指出在实际工作中有关的若干典型错误。其中较普遍的是：把样本方差即作为总体方差；鉴定试验只考虑第Ⅰ类风险（生产方承担）愈小愈好，而不考虑使用方是否愿意承担相应的大的第Ⅱ类风险（使用方承担）；验收试验对极限质量（在不合格品率情况即批容许不合格品率 P_1 (LTPD)）作了错误理解，对可接收质量水平 (AQL) 理解得也有偏面，从而验收试验不能保证使用方利益；对统计检验未予拒绝的情况就认为是予以接收，从而有较大可能作出错误判决，亦即对检验的功效缺乏理解，…等等。本书也正确解释了 CEP 的定义，澄清了这方面的混乱，相信对这方面不正确理解的拨乱反正，将起到一定参考作用。

本书全部内容，都引自国际标准、国家标准及国军标。（除了相关性检验未列入标准外）因此所有的叙述论述，具有标准的编制及使用说明性质。

本书的分位数记法如 u_α , $\chi_\alpha^2(v)$, $t_\alpha(v)$, …等执行 GB3358-82《统计学名词及符号》的规定。但由于国内已出的概率统计书绝大多数未执行国标（等效采用 ISO 国际标准）规定，所以引用其它著作及资料时请注意这一点差别！

本书附的 10 页 P 表是航空航天部质量司于 1988 年下达给一院十四所可靠性组的一项课题的成果。

本书推荐理论上是正确的 § 3.4 CEP 鉴定法，它的前提是 $\mu_X = \mu_Y = 0$, $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$, $\rho = 0$ ，故使用前应先通过第二章的五种检验（正态性、异常值， $\sigma_X = \sigma_Y$, $\mu_X = \mu_Y = 0$, $\rho = 0$ ）。它可以用较少的发数达到鉴定目的。这些前提不满足对使用方不利，不影响使用方利益。

本书亦推荐理论上是正确的 § 4.2 多圆 CEP 验收方案。它也可以用较少的发数达到验收目的，圆半径可根据生产方及使用方协商意见调整。

由于需求匆促，编写这本小教材，疏漏不当之处，欢迎指正。

何国伟

1991年2月20日

本书符号表

A、B、... 事件

$E[X]$ 随机变量 X 的期望(均值), 即 μ_X

$f(x)$ 随机变量 X 的概率密度函数

$F(x)$ 随机变量 X 的分布函数

$F(v_1, v_2)$ 自由度为 v_1 、 v_2 的 F 分布

$F_\alpha(v_1, v_2)$ $F(v_1, v_2)$ 的 α 分位数点, $P(F(v_1, v_2) < F_\alpha(v_1, v_2)) = \alpha$

$N(\mu_X, \sigma_X)$ 均值为 μ_X , 标准偏差为 σ_X 的正态分布

$P(A)$ 事件 A 发生的概率

$Q(u)$ 即 $1 - \Phi(u)$, $Q(u) = \int_u^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

s^2 样本方差

$t(v)$ 自由度为 v 的 t 分布

$t_\alpha(v)$ $t(v)$ 的 α 分位数点, 即 $P(t(v) < t_\alpha(v)) = \alpha$

$V[X]$ 随机变量 X 的方差, 即 σ_X^2

$X, Y, \dots$ 随机变量

$\bar{x}$ 样本均值

$x_1, x_2, \dots, x_n$ 样本观测值

$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ 把样本观测值按大小, 从小到大排列后的第 i 个值记为 $x_{(i)}$, 顺序统计量.

α 第 I 类错误

β 第 II 类错误

γ 置信水平

σ_X^2 随机变量 X 的方差

μ_X 随机变量 X 的均值

$\Phi(u)$ $N(0,1)$ 的分布函数, $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{u^2}{2}} du$

v 自由度

$\chi^2(v)$ 自由度为 v 的 χ^2 分布

$\chi_\alpha^2(v)$ $\chi^2(v)$ 的 α 分位数点, $P(\chi^2(v) < \chi_\alpha^2(v)) = \alpha$

$\in$ 属于

$\notin$ 不属于

$\subset$ $A \subset B$ 表示“ B 包括 A ”, 亦即 $B \supset A$

目 录

第一章 精度、CEP 及正态分布的基本知识

§ 1.1 连续随机变量, 正态分布	(1)
1.1.1 正态分布	
1.1.2 正态分布的计算	
表 1 正态分布函数表	
1.1.3 正态分布的分位数	
表 2 正态分布分位数表	
§ 1.2 正态分布的参数估计	(8)
1.2.1 参数估计, 总体与样本	
1.2.2 正态分布均值及方差的参数估计	
§ 1.3 精度及 CEP, 两维正态分布	(13)
1.3.1 精度及 CEP	
1.3.2 两维随机变量, 相关系数	
1.3.3 $\rho=0$ 情况, 两维正态分布落入任意圆 C 内的概率	
表 3、P 表 (共 10 页)	
1.3.4 $\rho=0, \sigma_x=\sigma_y=\sigma$ 情况, 两维正态分布落入任意圆 C 外的概率	
表 4 $P(r'-D', D')$ 表 (共 8 页)	
1.3.5 CEP	
1.3.6 σ_x, σ_y 及 CEP 的点估计	

第二章 纵向、横向偏差的正态性质的统计检验

§ 2.1 统计检验	(41)
2.1.1 统计检验, 拒绝域, 显著性水平	
2.1.2 一种典型的错误的精度检验, 检验的功效	
2.1.3 对统计检验结论不予拒绝的正确理解	
§ 2.2 正态分布的拟合优度检验	(42)
2.2.1 图解法正态性检验	
表 5 中位秩表	
2.2.2 shapiro-wilk 的正态性定量检验法	
表 6 shapiro-wilk 表	
§ 2.3 正态分布异常值的剔除	(48)
2.3.1 Grubbs 方法	
表 7 Grubbs 检验法的临界值 $T(n, \alpha)$ 表	
2.3.2 Dixon 方法	
表 8 Dixon 检验法的临界值表	
§ 2.4 σ_x 与 σ_y 无显著差异的检验	(57)
表 9 F 分布的分位数表	
§ 2.5 均值为零的显著性检验	(60)

表 10 t 分布的分位数表	
§ 2.6 相关系数为零的显著性检验	(63)
2.6.1 样本相关系数	
2.6.2 相关系数 $\rho=0$ 的显著性检验	
表 11 检验相关系数 $\rho=0$ 的临界值 γ_α 表	
第三章 精度鉴定	
§ 3.1 区间估计及鉴定试验	(66)
§ 3.2 均值的鉴定	(66)
§ 3.3 方差的鉴定	(68)
§ 3.4 推荐的 CEP 鉴定法($\mu_X = \mu_Y = 0, \sigma_X = \sigma_Y = \sigma, \rho = 0$).....	(73)
表 12 χ^2 分布分位数表	
第四章 精度验收	
§ 4.1 抽样验收及对极限质量及 AQL 的错误理解	(76)
§ 4.2 CEP 的多圆验收方案	(77)
4.2.1 多圆方案	
4.2.2 双圆方案	
4.2.3 三圆方案	
引用标准	(83)

第一章 正态分布的基本知识

§ 1.1 连续随机变量, 正态分布

1.1.1 正态分布

按一定概率可以在一个特定数集中取值的变量称为“随机变量”, 其中可以取一个有限(或无限)区间所有值的称为“连续随机变量”(continuous random variable).

对任意值 x , 随机变量 X 小于或等于 x 的概率是 x 的函数, 记为

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$F(x)$ 称为 X 的“分布函数”(distribution function). 如果分布函数的微商存在

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

此中 $f(x)dx$ 是概率元, $f(x)dx = P(x < X < x+dx)$, 则 $f(x)$ 为连续随机变量 X 的“概率密度函数”(probability density function for a continuous random variable X).

设 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

则 X 叫具有“正态分布”(normal distribution) 的随机变量. 它的典型图形如下图所示. 正态分布的概率密度函数的曲线图形完全为两个参数 μ , σ 所决定, 曲线 $y=f(x)$ 对于直线 $x=\mu$ 对称, σ 表示曲线的胖瘦程度. 如 σ 的值大, 曲线显得胖; 如 σ 的值小, 曲线显得瘦. 具有上述概率密度函数的正态分布记为 $N(\mu, \sigma)$ (注: 日本著作中记为 $N(\mu, \sigma^2)$). 如 $\mu=0$, $\sigma=1$, 则称为“标准正态分布”(standard normal distribution), 记为 $N(0, 1)$.

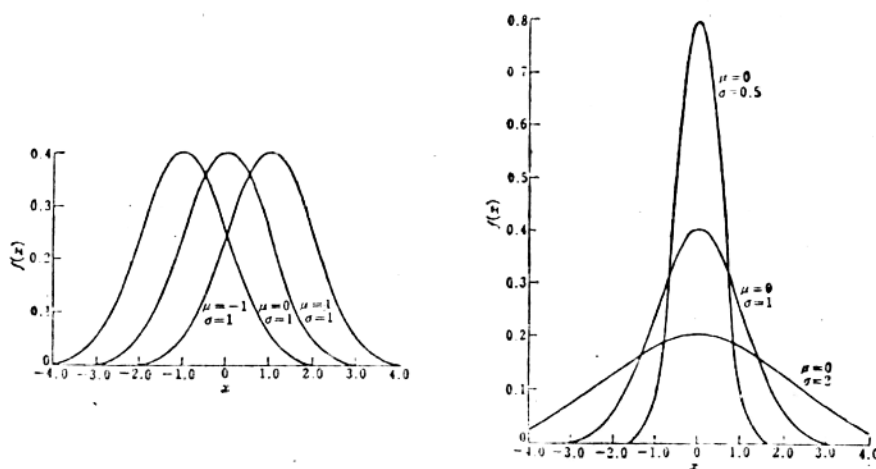


图1 正态分布图

正态分布是一种最常见的分布.

设连续随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$, 则其分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

X 落在 (a, b) 之间的概率为

$$\begin{aligned} P(X \in (a, b)) &= P(X \leq b) - P(X \leq a) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

亦即是概率密度曲线 $y=f(x)$ 以下, (a, b) 区间以上的面积. 由于 $P(X \in (-\infty, \infty))$ 是必然发生的事件, 故 $X \in (-\infty, \infty)$ 的发生概率必为 1, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

X 的“期望”(或“均值”) (expectation, mean) 定义为

$$\mu_X = E[X] = \int x f(x)dx$$

这里积分的积分区域即 X 的取值范围. 随机变量的期望就是它的概率分布的期望.

期望为零的随机变量称为“中心化随机变量”(centred random variable). 设 X 的期望为 μ_X , 则可得

$$E[X - \mu_X] = E[X] - E[\mu_X] = E[X] - \mu_X = 0$$

即 $X - \mu_X$ 是相应于 X 的中心化随机变量.

随机变量 X 的 q 次幂的期望 $E[X^q]$ 称为 X 的“q 阶原点矩”(moment of order q about the origin), 记为 μ'_q . 一阶原点矩就是随机变量的期望.

X 的中心化随机变量 $X - \mu_X$ 的 q 次幂的期望 $E[(X - \mu_X)^q]$ 称为 X 的“q 阶中心矩”(centred moment of order q), 记为 μ_q .

X 的二阶中心矩为 μ_2 , 特记为

$$\sigma_X^2 = \mu_2 = E[(X - \mu_X)^2] = \int (x - \mu_X)^2 f(x)dx$$

这里积分的积分区域即 X 的取值范围. σ_X^2 称为 X 的“方差”(variance), 即相应的中心化随机变量平方的期望. σ_X 是方差的正平方根, 称为“标准差”或“标准偏差”(standard deviation).

对于正态分布 X: $N(\mu, \sigma)$ 而言

$$\mu'_q = \int_{-\infty}^{\infty} x^q f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^q e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx$$

可算得(积分过程略)

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= \mu_X = \mu \\ \mu'_2 &= \sigma^2 + \mu^2 \\ \mu'_3 &= 3\mu\sigma^2 + \mu^3 \\ \mu'_4 &= 3\sigma^4 + 6\mu^2\sigma^2 + \mu^4 \end{aligned}$$

同样, 对于正态分布 X: $N(\mu, \sigma)$ 而言

$$\mu_q = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^q f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^q e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx$$

可算得

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \sigma^2 = \sigma_X^2 \\ \mu_3 &= 0 \\ \mu_4 &= 3\sigma^4\end{aligned}$$

1.1.2 正态分布的计算

期望为零、标准差为 1 的随机变量叫“标准化随机变量” (standardized variable)。设随机变量 X 的期望即均值为 μ_X 、标准差为 σ_X ，则相应的标准化随机变量为 $\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$ 。

对于正态分布 $X: N(\mu, \sigma)$ 而言，它的 $\mu_X = \mu$ 、 $\sigma_X^2 = \sigma^2$ ，所以相应的标准化随机变量为

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

可以推得：U 的概率密度函数为

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad -\infty < u < \infty$$

它的均值即期望为 0、标准差为 1，即 U 为 $N(0, 1)$ 。它叫“标准正态分布”。它的概率密度函数曲线图形对纵轴对称。它的分布函数定义为

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

有的书定义 $Q(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

则 $Q(u) = 1 - \Phi(u)$

〔标准正态分布表的查法〕

标准正态分布表 $\Phi(u)$ 见附页。其用法如下

情况 1: $u \geq 0$

设要求 $\Phi(u)$ ， u 是一个形如 $u = \text{甲} \cdot \text{乙} \cdot \text{丙}$ 形式的数，甲、乙、丙是 0 到 9 之间的数，则先根据甲·乙，查出相应的行；再根据丙，查出相应的列。行列交会格中的数即 $\Phi(u)$ 。

[例 1.1.2.1] 要求 $\Phi(1.96) = ?$

今 u 是 $u = 1.96$ 形式。先根据 1.9 查出相应的行；再根据 6，查出相应的列，行列交会格中为 0.975002，故 $\Phi(1.96) = 0.975002$ 。

情况 2: $u < 0$ 。

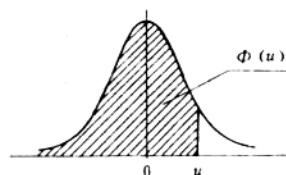
用公式 $\Phi(u) = 1 - \Phi(-u)$

[例 1.1.2.2] 要求 $\Phi(-1.96) = ?$

用 $\Phi(-1.96) = 1 - \Phi(-(-1.96)) = 1 - \Phi(1.96) = 1 - 0.975002 = 0.024998$

表 1 正态分布函数表

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500000	0.503989	0.507978	0.511966	0.515953	0.519939	0.523922	0.527903	0.531881	0.535856
0.1	0.539828	0.543795	0.547758	0.551717	0.555670	0.559618	0.563559	0.567495	0.571424	0.575345
0.2	0.579260	0.583166	0.587064	0.590954	0.594835	0.598706	0.602568	0.606420	0.610261	0.614092
0.3	0.617911	0.621720	0.625516	0.629300	0.633072	0.636831	0.640576	0.644309	0.648027	0.651732
0.4	0.655422	0.659097	0.662757	0.666402	0.670031	0.673645	0.677242	0.680822	0.684386	0.687933
0.5	0.691462	0.694974	0.698468	0.701944	0.705401	0.708840	0.712260	0.715661	0.719043	0.722405
0.6	0.725747	0.729069	0.732371	0.735653	0.738914	0.742154	0.745373	0.748571	0.751748	0.754903
0.7	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236
0.8	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802337	0.805105	0.807850	0.810570	0.813267
0.9	0.815940	0.818589	0.821214	0.823814	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913
1.0	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143
1.1	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.879000	0.881000	0.882977
1.2	0.884930	0.886861	0.888768	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.3	0.903200	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.4	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888
1.5	0.933193	0.934478	0.935745	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083
1.6	0.945201	0.946301	0.947384	0.948449	0.949497	0.950529	0.951543	0.952540	0.953521	0.954486
1.7	0.955435	0.956367	0.957284	0.958185	0.959070	0.959941	0.960796	0.961636	0.962462	0.963273
1.8	0.964070	0.964852	0.965620	0.966375	0.967116	0.967843	0.968557	0.969258	0.969946	0.970621
1.9	0.971283	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705
2.0	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691
2.1	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738
2.2	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989
2.3	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576
2.4	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613
2.5	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201
2.6	0.995339	0.995473	0.995604	0.995731	0.995855	0.995975	0.996093	0.996207	0.996319	0.996427
2.7	0.996533	0.996636	0.996736	0.996833	0.996928	0.997020	0.997110	0.997197	0.997282	0.997365
2.8	0.997445	0.997523	0.997599	0.997673	0.997744	0.997814	0.997882	0.997948	0.998012	0.998074
2.9	0.998134	0.998193	0.998250	0.998305	0.998359	0.998411	0.998462	0.998511	0.998559	0.998605
3.0	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999
3.1	0.999032	0.999065	0.999096	0.999126	0.999155	0.999184	0.999211	0.999238	0.999264	0.999289
3.2	0.999313	0.999336	0.999359	0.999381	0.999402	0.999423	0.999443	0.999462	0.999481	0.999499
3.3	0.999517	0.999534	0.999550	0.999566	0.999581	0.999596	0.999610	0.999624	0.999638	0.999651
3.4	0.999663	0.999675	0.999687	0.999698	0.999709	0.999720	0.999730	0.999740	0.999749	0.999758
3.5	0.999767	0.999776	0.999784	0.999792	0.999800	0.999807	0.999815	0.999822	0.999828	0.999835
3.6	0.999841	0.999847	0.999853	0.999858	0.999864	0.999869	0.999874	0.999879	0.999883	0.999888
3.7	0.999892	0.999896	0.999900	0.999904	0.999908	0.999912	0.999915	0.999918	0.999922	0.999925
3.8	0.999928	0.999931	0.999933	0.999936	0.999938	0.999941	0.999943	0.999946	0.999948	0.999950
3.9	0.999952	0.999954	0.999956	0.999958	0.999959	0.999961	0.999963	0.999964	0.999966	0.999967
4.0	0.999968	0.999970	0.999971	0.999972	0.999973	0.999974	0.999975	0.999976	0.999977	0.999978
4.1	0.999979	0.999980	0.999981	0.999982	0.999983	0.999983	0.999984	0.999985	0.999985	0.999986
4.2	0.999987	0.999987	0.999988	0.999988	0.999989	0.999989	0.999990	0.999990	0.999991	0.999991
4.3	0.999991	0.999992	0.999992	0.999993	0.999993	0.999993	0.999993	0.999994	0.999994	0.999994
4.4	0.999995	0.999995	0.999995	0.999995	0.999996	0.999996	0.999996	0.999996	0.999996	0.999996
4.5	0.999997	0.999997	0.999997	0.999997	0.999997	0.999997	0.999997	0.999998	0.999998	0.999998
4.6	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998	0.999998
4.7	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999
4.8	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999
4.9	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

本表对于 u 给出正态分布函数 $\Phi(u)$ 的数值。

例：对于 $u = 1.33$, $\Phi(u) = 0.908241$ 。

〔正态分布的分布函数的求法〕

可以推出 $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

这样就可以从标准正态分布的分布函数得出一般正态分布的分布函数。

〔例 1.1.2.3〕 设 X 是均值为 $\mu=1.00$, 标准差 $\sigma=2.00$ 的正态分布, 即 X 为 $N(1.00, 2.00)$ 。要求 $F(4.92)=?$

〔解〕 根据 $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ 得

$$F(4.92) = \Phi\left(\frac{4.92 - 1.00}{2.00}\right) = \Phi(1.96) = 0.975002$$

正态分布随机变量 X 落于某一区间内的概率

$$P(X \in (a, b)) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

即
$$P(X \in (a, b)) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

所以从标准正态分布的分布函数可以求得正态分布随机变量 X 落于某一区间内的概率

〔例 1.1.2.4〕 设 X 为 $N(\mu, \sigma)$, 要求 $P(X \in (\mu-2\sigma, \mu+2\sigma))=?$

〔解〕 按上述公式, 有

$$\begin{aligned} P(X \in (\mu-2\sigma, \mu+2\sigma)) &= F(\mu+2\sigma) - F(\mu-2\sigma) \\ &= \Phi\left(\frac{(\mu+2\sigma)-\mu}{2\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(\mu-2\sigma)-\mu}{2\sigma}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) \\ &= 0.977250 - (1 - 0.977250) = 0.95450 \end{aligned}$$

据此, 可得出下列的常用到的有关正态分布的几个概率值表

r	1.282	1.645	1.960	2.00	2.326	2.576	3.000
$P(X > \mu + r\sigma)$ 或 $P(X < \mu - r\sigma)$	0.100	0.500	0.025	0.023	0.010	0.005	0.0013

r	0.674	1.00	1.282	1.645	1.960	2.000	2.326	2.576	3.00
$P(X \in \mu - r\sigma, \mu + r\sigma)$	0.500	0.683	0.800	0.900	0.950	0.954	0.980	0.990	0.9973

由此可见: 如果 X 是 $N(\mu, \sigma)$, 则 X 落在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 之内的概率达 99.73%, 亦即 X 落在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 以外的概率不到千分之三, 这是一个很小的概率。在工程中, 通常认为出现概率很小的事件一般不会出现, 所以在习惯上 (不严格) 把 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 叫做 X 的“最大范围”。当然, 这里的“最大”两个字是不妥切的, 在计量中, 则通常把 $(\mu-2\sigma, \mu+2\sigma)$ 叫做 X 的“最大范围”。所以当文件用到“最大范围”时, 应先明确最大范围的定义。

本资料所附的 $\Phi(u)$ 表引自 GB 4086.1-83。但 u 值最高只达 4.99。要查更高 u 值的 $\Phi(u)$ 时, 可查何国伟: 《机电产品的可靠性》上海科技出版社 1989 年出版, p12~p17。提供高达 $u=10.0$ 的 $\Phi(u)$ 表。

当用计算机计算时, 计算机内贮存 $\Phi(u)$ 表当然是不方便的, 此时可用下述近似公

式

$$\Phi(u) \approx 1 - y(b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5), \quad u > 0$$

$$y = f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

这里的

$$t = \frac{1}{1 + \gamma u}, \quad \gamma = 0.2316419$$

$$b_1 = 0.31938153, \quad b_2 = -0.356563782, \quad b_3 = 1.781477937,$$

$$b_4 = -1.821255978, \quad b_5 = 1.330274429$$

公式的误差绝对值不超过 7.5×10^{-8} , 这在实用上是足够了。

1.1.3 正态分布的分位数

若 p 是 0 与 1 之间的一个数, 随机变量 x 的 p 分位数是随机变量 x 的一个取值 x_p , 在 x_p 处, 分布函数恰好等于 p 。即

$$F(x_p) = p, \quad \text{亦即 } P(x \leq x_p) = p$$

x_p 叫做 X 的 p “分位数” (fractile 或 quantile)。可能出现这种情况: 分布函数在随机变量的相邻可能值之间的整个区间中都等于 p , 此时在这个区间中的任何值都可看作为 p 分位数。

(注意: 一个大量旧著作中的定义不同处)

在所有八十年代前及大部分八十年代出版的概率统计及有关工程著作中, 分位数的定义与上述不同; 特别是 χ_a^2 , t_a 等。上述定义根据 GB33580-82 的 1.14, 一律应以此为准。

(标准正态分布分位数 u_p 的查法)

设 U 为标准正态分布 $N(0, 1)$ 给定 p , 要求标准正态分布的分位数 u_p , 可查如下的标准正态分布的分位数表, 方法如下:

情况 1: $p \geq 0.50$

设 p 是一个形如 0·甲乙丙的小数, 甲、乙、丙是 0 到 9 之间的数。则先根据 0·甲乙, 查出相应的行; 再根据丙, 查出相应的列。行列交会格中的数即 u_p 。

[例 1.1.3.1] 设 $p = 0.950$, 要求 $u_p = ?$

今 $p = 0.950$, 先根据 0.95, 查出相应的行; 再根据 0, 查出相应的列。行列交会格中为 1.644854, 故 $u_{0.95} = 1.644854$ 。

情况 2: $p < 0.50$

此时

$$u_p = -u_{1-p}$$

[例 1.1.3.2] 设 $p = 0.05$, 要求 $u_p = ?$

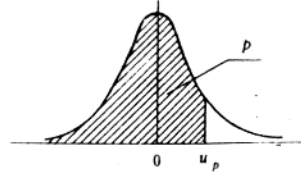
因

$$1-p = 1-0.05 = 0.95$$

$$u_{0.05} = -u_{0.95} = -1.644854$$

表2 正态分布分位数表

$$u_p = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = p$$



p	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.50	0.000000	0.002507	0.005013	0.007520	0.010027	0.012533	0.015040	0.017547	0.020054	0.022562
0.51	0.025069	0.027576	0.030084	0.032592	0.035100	0.037608	0.040117	0.042626	0.045135	0.047644
0.52	0.050154	0.052664	0.055174	0.057684	0.060195	0.062707	0.065219	0.067731	0.070243	0.072756
0.53	0.075270	0.077784	0.080298	0.082813	0.085329	0.087845	0.090361	0.092879	0.095396	0.097915
0.54	0.100434	0.102953	0.105474	0.107995	0.110516	0.113039	0.115562	0.118085	0.120610	0.123135
0.55	0.125661	0.128188	0.130716	0.133245	0.135774	0.138304	0.140835	0.143367	0.145900	0.148434
0.56	0.150969	0.153505	0.156042	0.158580	0.161119	0.163658	0.166199	0.168741	0.171285	0.173829
0.57	0.176374	0.178921	0.181468	0.184017	0.186567	0.189118	0.191671	0.194225	0.196780	0.199336
0.58	0.201893	0.204452	0.207013	0.209574	0.212137	0.214702	0.217267	0.219835	0.222403	0.224973
0.59	0.227545	0.230118	0.232693	0.235269	0.237847	0.240426	0.243006	0.245590	0.248174	0.250760
0.60	0.253347	0.255936	0.258527	0.261120	0.263714	0.266311	0.268909	0.271508	0.274110	0.276714
0.61	0.279319	0.281926	0.284536	0.287147	0.289760	0.292375	0.294992	0.297611	0.300232	0.302855
0.62	0.305481	0.308108	0.310738	0.313369	0.316003	0.318639	0.321278	0.323918	0.326561	0.329206
0.63	0.331853	0.334503	0.337155	0.339809	0.342466	0.345126	0.347787	0.350451	0.353118	0.355787
0.64	0.358459	0.361133	0.363810	0.366489	0.369171	0.371856	0.374543	0.377234	0.379926	0.382622
0.65	0.385320	0.388022	0.390726	0.393433	0.396142	0.398855	0.401571	0.404289	0.407011	0.409735
0.66	0.412463	0.415194	0.417928	0.420665	0.423405	0.426148	0.428895	0.431644	0.434397	0.437154
0.67	0.439913	0.442676	0.445443	0.448212	0.450985	0.453762	0.456542	0.459326	0.462113	0.464904
0.68	0.467699	0.470497	0.473299	0.476104	0.478914	0.481727	0.484544	0.487365	0.490189	0.493018
0.69	0.495850	0.498687	0.501527	0.504372	0.507221	0.510073	0.512930	0.515792	0.518657	0.521527
0.70	0.524401	0.527279	0.530161	0.533049	0.535940	0.538836	0.541737	0.544642	0.547551	0.550466
0.71	0.553385	0.556308	0.559237	0.562170	0.565108	0.568051	0.570999	0.573952	0.576910	0.579873
0.72	0.582842	0.585815	0.588793	0.591777	0.594766	0.597760	0.600760	0.603765	0.606775	0.609791
0.73	0.612813	0.615840	0.618873	0.621912	0.624956	0.628006	0.631062	0.634124	0.637192	0.640266
0.74	0.643345	0.646431	0.649524	0.652622	0.655727	0.658838	0.661955	0.665079	0.668209	0.671346
0.75	0.674490	0.677640	0.680797	0.683961	0.687131	0.690309	0.693493	0.696685	0.699884	0.703089
0.76	0.706303	0.709523	0.712751	0.715986	0.719229	0.722479	0.725737	0.729003	0.732276	0.735558
0.77	0.738847	0.742144	0.745450	0.748763	0.752085	0.755415	0.758754	0.762101	0.765456	0.768820
0.78	0.772193	0.775575	0.778966	0.782365	0.785774	0.789192	0.792619	0.796055	0.799501	0.802956
0.79	0.806421	0.809896	0.813380	0.816875	0.820379	0.823894	0.827418	0.830953	0.834499	0.838055
0.80	0.841621	0.845199	0.848787	0.852386	0.855996	0.859617	0.863250	0.866894	0.870550	0.874217
0.81	0.877896	0.881587	0.885290	0.888906	0.892533	0.896173	0.900226	0.903991	0.907770	0.911561
0.82	0.915365	0.919183	0.923014	0.926859	0.930717	0.934589	0.938476	0.942376	0.946291	0.950221
0.83	0.954165	0.958124	0.962099	0.966088	0.970093	0.974114	0.978150	0.982203	0.986271	0.990356
0.84	0.994458	0.998576	1.002712	1.006864	1.011034	1.015222	1.019428	1.023651	1.027893	1.032154
0.85	1.036433	1.040732	1.045050	1.049387	1.053744	1.058122	1.062519	1.066938	1.071377	1.075837
0.86	1.080319	1.084823	1.089349	1.093897	1.098468	1.103063	1.107680	1.112321	1.116987	1.121677
0.87	1.126391	1.131131	1.135896	1.140687	1.145505	1.150349	1.155221	1.160120	1.165047	1.170002
0.88	1.174987	1.180001	1.185044	1.190118	1.195223	1.200359	1.205527	1.210727	1.215960	1.221227
0.89	1.226528	1.231864	1.237235	1.242641	1.248085	1.253565	1.259084	1.264641	1.270238	1.275874
0.90	1.281552	1.287271	1.293032	1.298837	1.304685	1.310579	1.316519	1.322505	1.328539	1.334622
0.91	1.340755	1.346939	1.353174	1.359463	1.365806	1.372204	1.378659	1.385172	1.391744	1.398377
0.92	1.405072	1.411830	1.418654	1.425544	1.432503	1.439531	1.446632	1.453806	1.461056	1.468384
0.93	1.475791	1.483280	1.490853	1.498513	1.506262	1.514102	1.522036	1.530068	1.538199	1.546433
0.94	1.554774	1.563224	1.571787	1.580467	1.589268	1.598193	1.607248	1.616436	1.625763	1.635234
0.95	1.644854	1.654628	1.664563	1.674665	1.684941	1.695398	1.706043	1.716886	1.727934	1.739198
0.96	1.750686	1.762410	1.774382	1.786613	1.799118	1.811911	1.825007	1.838424	1.852180	1.866296
0.97	1.880794	1.895698	1.911036	1.926837	1.943134	1.959964	1.977368	1.995393	2.014091	2.033520
0.98	2.053749	2.074855	2.096927	2.120072	2.144411	2.170090	2.197286	2.226212	2.257129	2.290368
0.99	2.326348	2.365618	2.408916	2.457263	2.512144	2.575829	2.652070	2.747781	2.878162	3.090232

本表对于下侧概率 p 给出正态分布的分位数 u_p 。

例：对于 $p = 0.95$ ， $u_p = 1.644854$ 。

当 $p = 0.5$ 时， $u_p = -u_{1-p}$ 。例： $u_{0.5} = -u_{0.5} = -1.281552$ 。

与双侧概率 α 相应的分位数为 $u_{1-\alpha/2}$ 。例：对于 $\alpha = 0.05$ ， $u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.959964$ 。

〔正态分布分位数的查法〕

设 X 为正态分布 $N(\mu, \sigma)$, 对于给定的 p 而言, 它的分位数 $x_p = \mu + u_p \sigma$

〔例 1.1.3.3〕 设 X 为 $N(1, 1.5)$, 给定 $p = 0.950$, 要求 $x_p = ?$

〔解〕 今先求 $u_p = u_{0.95} = 1.644854 \approx 1.645$, 于是

$$x_{0.95} = \mu + u_p \sigma = 1 + 1.645 \times 1.5 = 3.468$$

当用计算机计算时, 计算机内贮存 u_p 表当然是不方便的。此时可用下述近似公式。

$$u = t \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3}$$

$$t = \sqrt{\ln \frac{1}{(1-p)^2}}$$

$$c_0 = 2.515517, c_1 = 0.802853, c_2 = 0.010328,$$

$$d_1 = 1.432788, d_2 = 0.189269, d_3 = 0.001308$$

它的误差绝对值不超过 0.45×10^{-4} , 实用上也够了。

§ 1.2 正态分布的参数估计

1.2.1 参数估计, 总体和样本

可以对其进行一系列观测的一件具体的或一般的物体或可以对其进行一系列观测的一定数量的物质或一个定性或定量的观测值叫做一个“个体” (item, individual, unit)。所考虑的个体的全体叫“总体” (population)。

例如导弹的一个落点与目标点的偏离值就是一个个体。所考虑的若干导弹的这种偏离值就构成一个总体。

区别给定总体中的个体的一种性质称为“特性”或“特征” (characteristic)。这种区别可以是良性的, 例如产品个体的质量特性中与规定要求不符合的任何一项 (点) 叫“缺陷” (defect), 有缺陷的个体叫“不合格品” (defective, defective item)。“合格”、“不合格”就是一种定性的特性。上述区别也可以是定量的。例如导弹落点与目标的偏离值就是一种定量的特性。但定性的特征也可以定量化。例如将合格品作为特性值 0, 不合格品作为特性值 1, 则定性的特征就定量化了。

表示总体特性的分布的量叫总体参数 (population parameter)。例如总体不合格品率 p 就是一种总体参数。又如设总体某特性为正态分布, 则分布的 μ 、 σ 就是总体参数。

为了提供关于总体的信息 (例如对 μ 、 σ 的信息), 并作为可能作出对总体 (或产生总体的过程) 的某种判定 (例如总体不合格) 的基础, 在总体中取出一个或多个个体, 构成一个样本 (子样) (sample)。在包含 N 个个体的总体中按某种方式抽取一个个体, 若每一个个体被抽取的机会都相等, 则称为“随机抽取”。随机抽取或组成样本的过程称为“抽样” (sampling), 为抽样的目的, 取自总体的一个个体称为“抽样单位” (sampling unit)。样本中所包含的抽样单位数目称为“样本大小” (sample size)。

对一个总体 X 而言, 设它有 N 个个体, 其特性值为 $X_1, X_2, \dots, X_N$. 于是“总体均值”为

$$\bar{X} = \frac{1}{N}(X_1 + X_2 + \dots + X_N)$$

如果研究的是产品个体的合格、不合格? 可令

$X_i = 1$, 如第 i 个个体是不合格品;

$X_i = 0$, 如果第 i 个个体是合格品

则总体均值 $\bar{X}$ 即总体的不合格品率

一般情况下, $X_i - \bar{X}$ 反映个体对于总体均值的偏离, 定义

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2$$

叫“总体方差”, 它反映总体内个体的散布.

当产品的设计、生产、管理文件都已齐全, 则从理论上说, 可以据此生产很多产品. 这些可能生产出来的产品尽管还未实现也就构成了一个总体.

在一致条件下生产或按规定方式汇总起来的一定数量的个体叫一“批” (lot, batch), 批中包含的个体数量叫“批量” (lot size, batch size). 一批产品亦可作为一个总体.

一次观测或试验所确定的特性值叫“观测值” (observed value), 得到总体所有个体的观测值后, 当然可以求得总体参数 (例如 μ, σ), 但这往往是不经济并且有时是不现实的, 由于样本在一定程度上可代表总体, 因此通常是: 以根据样本观测值估计总体参数值. 这种操作过程中叫“估计” (estimation of parameters), 这种操作过程的结果叫“估计值” (estimate of parameter).

设要研究总体的不合格品率 $\bar{X}$. 取一个样本大小为 n 的样本. 样本个体合格、不合格的观测值为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($x_i = 0$ 或 1), 于是“样本均值”为

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$\bar{x}$ 就是一种 $\bar{X}$ 的估计值. 样本观测值的函数叫“统计量” (statistic). 用于估计总体参数的统计量叫“估计量” (estimator), 上述用于估计 $\bar{X}$ 的 $\bar{x}$ 就是一个估计量. 必须指出: 观测值是随机变量, 因此它们的函数即统计量从而估计量也是随机变量. 由于总体参数是客观存在的 (尽管有时是未知的) 量, 这样, 随机变量的取值不一定是总体参数的真值, 在估计参数时, 参数的估计值与其真值之差叫“总估计误差” (total estimation error). 总估计误差由三部分组成:

[i] 由于样本的随机性所造成的参数总估计误差中的一部分叫“抽样误差” (sampling error).

[ii] 测量误差.

[iii] 数值的舍入或组的划分.

正由于参数的估计量是一个随机变量, 因此它有一个期望 (即均值). 参数估计量的期望与参数真值的偏差叫“估计量的偏倚” (bias of estimator). 设 X 是正态分布 $N(\mu_X, \sigma_X)$, 设 X 的一个样本大小为 n 的样本观测值为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 定义样本均值

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

$\bar{x}$ 就是正态分布 μ 的一种估计量。

一个总体参数可以有几种估计量。当样本的观测值按其代数值大小排列时，这些按次序排列的数值中的每一个称为次序统计量或顺序统计量 (order statistic)。样本中的最小值即是其中一例。

1.2.2 正态分布均值及方差的参数估计

今将正态分布 X 的样本观测值按从小到大的次序排成

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}$$

$x_{(1)}$ 是诸观测值中的最小值， $x_{(n)}$ 是诸观测值中的最大值。一个定量特性的观测值中最大值与最小值之差叫“极差” (range)。记为 $R_n = x_{(n)} - x_{(1)}$

定义“样本中值” (median)

$$\bar{x} = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})}, & \text{如 } n \text{ 为奇数;} \\ \frac{1}{2}[x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}], & \text{如 } n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

由 $\bar{x}$ 亦是一种 μ 的估计量。

[例 1.2.2.1] 设正态分布 $X: N(\mu_X, \sigma_X)$ 的样本大小为 6 的样本观测值为

$$12.7, 14.6, 14.1, 12.2, 16.5, 13.6$$

则可用 $\bar{x}$ 来估计 μ

$$\bar{x} = \frac{1}{6}(12.7+14.6+14.1+12.2+16.5+13.6) = 13.95$$

也可用 $\bar{x}$ 来估计 μ ，此时需先把样本观测值按从小到大的次序排列成

$$12.2, 12.7, 13.6, 14.1, 14.6, 16.5$$

于是因 $n=6$ 为偶数， $x_{(\frac{6}{2})} = x_{(3)} = 13.6$ ， $x_{(\frac{6}{2}+1)} = x_{(4)} = 14.1$ ，

$$\text{故 } \bar{x} = \frac{1}{2}(x_{(3)} + x_{(4)}) = \frac{1}{2}(13.6 + 14.1) = 13.85$$

由于 $\bar{x}$ 及 $\bar{x}$ 都是随机变量，所以这里的一些差异是合理的。

估计一个总体（或总体概率分布）的方差的操作过程是：对包含 n 个独立观测值的一个样本，将每个观测值与样本均值的偏差平方和除以 $n-1$ ，这是总体方差的估计 (estimation of the variance of a population)。

对正态分布 $X: N(\mu_X, \sigma_X)$ 而言，样本观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ，定义“样本方差”。

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)$$

S_x^2 是 σ_x^2 的一种常用估计量。

另一种方法是通过样本极差 R_n 来估 σ_x ，公式为 $\hat{\sigma}_x = R_n / d_2$
 d_2 系数表如下

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_2	1.12838	1.69257	2.05875	2.32593	2.53441	2.70436	2.84720	2.97002	3.07751

还有一种方法是用样本平均绝对偏差来估 σ_x ，样本观测值数据 X_i 对样本均值 $\bar{x}$ 的偏差为 $d_i = x_i - \bar{x}$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，其绝对值的平均 d 叫“样本平均绝对偏差”。

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |d_i| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$$

通过 d 来估计 σ_x 的公式为

$$\hat{\sigma}_x^* = d / \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{n-1}{n}}$$

既然一个总体参数可能有几种估计量，在什么情况下使用那一种估计量比较合适呢？一种合理的要求是随机变量估计量的期望最好即要估的总体参数的真值，如果参数的一种估计量，它的期望等于该参数的真值，则叫“无偏估计量” (unbiased estimator)。

统计理论可以证明 $\bar{x}$ 及 $\bar{\bar{x}}$ 都是 μ 的无偏估计量， S_x^2 是 σ_x^2 的无偏估计量， $\hat{\sigma}_x$ 及 $\hat{\sigma}_x^*$ 都是 σ_x 的无偏估计量，但是必须指出：

(S_x 不是 σ_x 的无偏估计)

当几个估计量都是无偏估计量时，要判别那个无偏估计量好的一个准则是看谁的方差小？

统计理论证明

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n} \sigma_x^2, \quad \sigma_{\bar{\bar{x}}}^2 = m_3 \frac{1}{n} \sigma_x^2$$

这里的系数 m_3 值如下

n	2	5	10	15	20
m_3	1.000	1.198	1.176	1.235	1.212

$$m_3 \approx \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{4-\pi}{4n}\right), & \text{如 } n \text{ 为奇数;} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{6-\pi}{4n+1}\right), & \text{如 } n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

当 n 较大时 $m_3 \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.253$, 故 $\bar{x}$ 的散布大体上比 $\bar{x}$ 大 25% 左右. 从而如果从散布观点看, $\bar{x}$ 比 $\bar{x}$ 好. 但 $\bar{x}$ 有另一方面的优点, 当可能混入异常大或异常小的数据时, 它对 $\bar{x}$ 的影响比较严重, 而对 $\bar{x}$ 的影响则比较小, 用统计学的术语说, $\bar{x}$ 的“顽健性”较好.

当样本观测值中没有异常大、小数据时, 用 $\bar{x}$ 估 μ 比较合适.

对于 [例 1.2.2.1] 正态分布 $X: N(\mu_X, \sigma_X)$ 的样本观测值 12.7, 14.6, 14.1, 12.2, 16.5, 13.6, 而言

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{5} (1179.31 - 6 \times 13.95^2) = 2.339$$

因此 $S_x^2 = 2.339$ 是 σ_x^2 的无偏估计, $S_x = \sqrt{2.339} = 1.529$, 通常也就用 $S_x = 1.529$ 估 σ_x , 但 S_x 不是 σ_x 的无偏估计.

样本极差 $R_6 = x_{(6)} - x_{(1)} = 16.5 - 12.2 = 4.3$, 故

$$\hat{\sigma}_x = R_6 / d_2 = 4.3 / 2.53441 = 1.697$$

$\hat{\sigma}_x = 1.697$ 可作为 σ_x 的一种估计.

样本平均绝对偏差

$$d = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{6} (1.25 + 0.65 + 0.15 + 1.75 + 2.55 + 0.35) = 1.117$$

故

$$\hat{\sigma}_x^* = \frac{d}{\sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{n-1}{2}}} = \frac{1.117}{\sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{5}{6}}} = 1.534$$

$\hat{\sigma}_x^* = 1.534$ 亦可作为 σ_x 的一种估计.

通过统计理论分析, $\hat{\sigma}_x$ 及 $\hat{\sigma}_x^*$ 的散布较大, 所以常采用 S_x^2 来估 σ_x^2 .

在弹道学中还可采用 σ_x 的“最小平方误差估计” $\hat{\sigma}$, 即使 $E[(\hat{\sigma} - \sigma_x)^2] = \min$, 公式为 $\hat{\sigma} = a(n)S_x$