张 铭 张立凤 安 洁 著

大气波谱分析及其不稳定性

第一卷 二维旋转层结大气中的扰动

气象出版社
China Meteorological Press

大气波谱分析及其不稳定性

第一卷

二维旋转层结大气中的扰动

张　铭　张立凤　安　洁　著

气象出版社

内 容 提 要

大气波谱分析及其不稳定性(第一卷)立足于大气动力学理论,通过理论研究和数值求解的方法,对二维旋转层结大气中的扰动作了波谱分析。对不同尺度、特别是β中尺度系统中所包含波动的波谱分布、特征波动结构、性质和可分性以及不稳定等问题作了研究;提出了运动尺度划分的理论依据和范围;揭示了在中尺度波段,涡旋波与重力惯性波会发生混合,出现了涡旋-重力惯性混合波,并有涡旋-重力惯性混合波包存在;发现了涡旋-重力惯性混合波的非平衡不稳定。以上研究工作有助于了解实际中飑线、雨带、辐合线和锋面的发生和演变。本卷书可供从事中尺度气象学研究的学者参考,也可作该方面的研究生教材。

图书在版编目(CIP)数据

大气波谱分析及其不稳定性. 第1卷,二维旋转层结大气中的扰动/张铭,张立凤,安洁著. —北京:气象出版社,2008.7

ISBN 978-7-5029-4547-3

Ⅰ. 大… Ⅱ. ①张…②张…③安… Ⅲ. 大气-波谱分析 Ⅳ. P433

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 097114 号

大气波谱分析及其不稳定性

Daqi Bopu Fenxi Jiqi Bu Wendingxing

出版发行:气象出版社　　**地　址**:北京市海淀区中关村南大街46号

网　址:http://cmp.cma.gov.cn　　**邮　编**:100081

电　话:总编室 010-68407112　发行部 010-68409198　　**E-mail**: qxcbs@263.net

责任编辑:俞卫平　王萃萃　　**终　审**:章澄昌

封面设计:王　伟　　**责任技编**:吴庭芳

责任校对:刘祥玉

印 刷 者:北京中新伟业印刷有限公司

开　本:787mm×1092mm　1/16　　**印　张**:11　　**字　数**:280千字

版　次:2008年7月第1版　　**印　次**:2008年7月第1次印刷

印　数:1～1500　　**定　价**:35.00元

自　序

关于波谱分析及其计算方法的研究，早在30年前我在中科院大气所攻读硕士学位时，在恩师曾庆存院士的指导下，就开展过这方面的工作。硕士毕业后我到原空军气象学院（现解放军理工大学气象学院）任教，我和我的学生张立凤继续在该方面开展研究，并时断时续，一直延续至今。我们主要的研究工作集中在二维旋转层结大气的波谱分析（本书第一卷）、热带气旋尺度涡旋中扰动的波谱分析（本书第三卷）和球面大气上扰动的波谱分析（本书第二卷）三个方面，本书第四卷则给出了有关的应用。前两个方面主要研究的是中尺度的问题。早在1979年，曾庆存院士在其专著《数值天气预报的数学物理基础》中就明确指出：我们常见到的处于稳定状态的成熟阶段的中尺度系统，除了小槽小脊之外，确实是水平方向准一维的或者流形较对称的。前者例如有飑线等，后者如引起局地暴风雨的某些中尺度涡旋，甚至台风也是如此。后一个方面我们则用波谱分析方法研究了季风问题。

对于无基本气流或基本气流为常数的情况，在线性化的假定下，大家对这方面的问题均很熟悉，无庸赘述。然而，当存在基本气流切变时，问题变得复杂，此时可有连续谱出现并可有非平衡不稳定发生。本书对这些问题作了探讨并给出了研究成果。

本书中的研究工作得到了自然科学基金《大气运动方程组谱点及谱函数的研究》（编号49875008）和《β中系统的波谱研究及其在灾害性天气预报中的应用》（编号40575023）的资助，在此向国家基金委地学部表示衷心感谢。本书的出版得到了我院领导和气象出版社的重视和支持，这里也向他们表示深深的谢意。这里还要感谢所有帮助和鼓励过我的气象界的同事和朋友们。最后，要感谢做过气象员的我的妻子李雪兰，没有她工作上对我的支持和生活上对我的照顾，本书是难以完成的。

張銘

2008年6月19日

目　　录

第1章 绪　论

波动是大气运动的一种重要形式，其产生、演变和发展与大气中的天气变化和持续异常密切相关，其不稳定发展还可激发出强烈的天气现象。随着社会经济的高速发展，自然灾害带来的损失也呈迅速上升的趋势。据统计，1992—2001年的十年间，全球自然灾害导致超过622 000人死亡，水文气象灾害造成的经济损失估计为4 460亿美元，约占同期所有自然灾害总损失的65%以上。仅2006年一年，自然灾害夺走了全球超过31 000人的生命，经济损失达480亿美元。我国气象灾害种类繁多，每年受台风、暴雨、冰雹、寒潮、大风、暴风雪、沙尘暴、雷暴、浓雾、干旱、洪涝、高温等气象灾害和森林草原火灾、山体滑坡、泥石流、山洪、病虫害等气象次生和衍生灾害影响的人口达4亿人次，造成的经济损失平均达2 000多亿元，约相当于国内生产总值的1%～3%。

因此，极端天气(extreme weather)和高影响天气(high-impact weather)是天气预报中的重点和难点，从动力学角度研究天气系统的生成、发展和演变机理，必须研究大气特征波动的性质，这不仅可以丰富和深化动力学理论，而且是提高高影响天气预报准确率的基础，对大气科学研究和天气预报服务都有着很重要的理论意义和应用前景。

1.1 旋转层结大气波谱研究的历史和现状

瞬息万变的大气受大气波动的支配，罗斯贝(Rossby)波速公式定性地解释了天气图上槽脊的移动。Charney、Eady和Kuo(郭晓岚)提出的斜压不稳定和正压不稳定理论把当时流体力学中发展模和衰减模的思想引入到大气运动中，成功地解释了大气槽脊的发展、寒潮的爆发等现象，这些开创性的工作为以后进一步认识大气运动的规律奠定了基础。所以说大气长波概念的提出和大气长波不稳定理论被公认为是大气动力学发展中的两个重要里程碑。

1.1.1 大气运动中特征波动的研究

在研究大气运动小扰动的各种特征波动时，为求得模式中的特征值和特征函数(特征波动)，最早采用标准模方法(也称特征波动法，即Normal Mode或Characteristc Wave)，并用以研究基流的失稳问题。Normal Mode方法就是将线性方程的初值问题，在齐次边界条件下，转化成方程的特征值问题，从而将小扰动在基本气流中的演变问题归结为特征波动的传播或不稳定特征模的发展与衰减问题。许多学者用该方法研究了各种环境场的稳定性及对应的特征波动，并试图用其来解释观测到的大气瞬变扰动的传播、发展和消亡。虽然Normal Mode方法是对线性方程才适用的方法，而线性化方程的前提是大气中存在小扰动，但该方法直到现在仍然是研究大气动力学问题的一条有效途径。这一方面是因为线性问题在数学上已有了比较成熟的理论，另一方面是因为该方法在研究波动稳定性问题中已取得了很大的成功。

早在1979年，曾庆存[2]在其专著《数值预报的数学物理基础》中就对大气运动的谱点和谱函数做过研究，他论述了该问题的重要性和困难性，指出即使在简单的正压大气中这也涉及一

个复杂的特征值问题，他还证明了无基流时球面上任意大气扰动可按其特征波动展开的基本定理。若要研究普遍的初值问题，在基流不为零或存在切变时，对应于离散谱的谱函数(即特征波动)是不完备的，仅用离散谱的线性组合不能表示任意扰动，还必须补充连续谱部分。20世纪80年代，曾庆存和Held提出了关于如何从整个扰动场中分解出连续谱和离散谱的方法，使得连续谱在实际的资料计算中成为可能。同时，曾庆存[3]提出了波包理论，通过WKBJ方法研究了Rossby波波包的发展条件、演变过程及传播路径等，他给出了强迫基流上Rossby波的结构和演变，得出增强波包的平均空间尺度随时间变大，正压增强型扰动在水平面上向急流区传播，扰动的发展特性依赖于扰动本身的结构及其相对于基流的位置等结论，他还指出，波包的概念可以合理地对连续谱的演化作出正确的描述。这些开创性的工作为研究大气中的非模解(即连续谱)提供了一条研究途径。随后曾庆存等[4~8]，卢佩生等[9~13]在这个方面又做了一系列的工作，先后讨论了正压大气中扰动的演变，提出了扰动发展的判据，研究了正压准地转模式的谱点和谱函数，揭示了当存在基流切变时Rossby波存在连续谱，论证了Rossby波包在大气演变中的作用。

实际上大气扰动的演变是一个初值问题，连续谱就是依赖于扰动初值的解，要描述好连续谱最佳的办法是追踪基本气流中初始扰动的演变，研究其演变和基本气流的相互作用。张明华和曾庆存[14]使用积分变换和微分方程的解析理论，完整地求解了正压准地转涡度方程的初值问题。结果表明，演变中的波包既包含有传播性的离散谱波动，也包含有连续谱扰动。他们同时也对正压涡度方程的波谱做了数值计算。20世纪90年代，曾庆存和任舒展[15~17]对连续谱动力学从理论上做了研究，从数学上严格地指出了支配方程中存在连续谱和离散谱两类不同性质的解，给出了连续谱和离散谱的分布范围及连续谱能量增长上限的估计，并讨论了连续谱在大气环流中的作用；指出对整个大气环流而言，连续谱扰动占据着主导地位，从而进一步证实了曾庆存关于“连续谱扰动滋养西风”的思想。波包理论能揭示出连续谱演化的整体图像，从而对研究连续谱提供了一条新的途径。

曾庆存[2]、巢纪平[18]用WKBJ方法推导出波作用量方程，讨论了大气层结的水平非均匀和时间变化对缓变重力惯性波中扰动垂直发展的影响，后者还用得到的理论结果对暴雨预报中的某些问题做了初步的定性解释。刘式适、刘式达[19]用WKBJ方法和多尺度方法建立了三维Boussinesq近似下的波作用量方程，并讨论了惯性重力波的稳定性。但是WKBJ方法只能研究缓变介质中波包的演变问题，而实际大气中，急流的存在会造成大气环流的失稳，并使扰动发生不稳定，但在急流附近介质不是缓变的，此时WKBJ方法失效，从而给研究带来了困难。

曾庆存、李荣凤、张铭[20,21]提出了用数值计算的方法研究连续谱。然而在数值计算中，连续谱会被歪曲成计算离散谱，于是就产生了如何识别真实离散谱的问题。他们的工作表明在数值计算中，随着离散化时计算网格的增加，计算中增加的谱点大多位于连续谱区，而该区间外的谱点个数和位置对于网格点的变化却是稳定的，这些点就对应于理论上的离散谱点。所以数值计算的方法不仅能正确描述离散谱，也能合理描述连续谱，这给连续谱的研究指出了另一条途径。1991年曾庆存，李荣凤、张铭、张立凤等[22]计算了超高速情形下正压大气中的谱点和特征函数，结果表明，当扰动尺度较小时会有涡旋波和重力惯性波的混合，此时运动难以分类。在基流取线性切变且满足一定条件时，有超高速不稳定发生，且该不稳定对波长有选择性，在中尺度范围内最易出现。在基流和风切变不很大的情况下，正压原始方程模式有三支波

动，即一支涡旋波和一对重力惯性波，当基流有线性切变时，随着基流风速切变的增大和扰动波长的减小，三支波动的谱点互相靠拢、衔接，最后发生重叠；注意这里是离散谱和连续谱范围的重叠，只是因采用数值方法进行计算，连续谱表现为计算离散谱。这时三支波动从频谱上已不可分，即从频率上已不能区分为快波和慢波。此时涡旋波的非地转性已十分明显。从特征函数结构上看，相应于连续谱的涡旋波对应的特征函数在结构上呈间断形式，而相应于离散谱的重力惯性波其特征函数则呈波状结构。

1999年，张立凤、张铭[23,24]在研究了斜压切变基流中的横波型扰动后指出：在基流为常值，f为常数，未考虑β效应的情况下，涡旋波退化为相对基流静止的地转平衡态，而重力惯性波则表现为离散谱。基流存在切变时，无论重力惯性波还是涡旋波都存在连续谱，这点与正压大气情况有显著不同。在通常环境下，对天气尺度的扰动，这三支波动连续谱区不重叠，但扰动尺度小于某个临界波长时，则出现了涡旋波和一支重力惯性波的二波连续谱区重叠，当扰动尺度继续减小至该临界波长的一半时，则出现涡旋波和两支重力惯性波的连续谱区重叠，这时三支波动从频谱上已不可分。当出现连续谱区的重叠时，若出现不稳定，其频率的实部落在重叠谱区。这部分工作给出了连续谱区发生重叠的条件。

由此可见，对沿着基流传播的波动在中尺度范围内，且基流风速切变较大时，重力惯性波与涡旋波在频谱上常不可分，这也许可以解释观测到的一些中尺度系统不仅有很明显的散度场，同时也有很明显的涡度场的现象。

1.1.2　大气稳定性的研究

对于大气运动来讲，设有一定常的基本气流，由于某种原因受到微小的扰动，则这个扰动有基本保持不变、阻尼和随时间增长三种情形。在气象上往往习惯将不变和阻尼的扰动统称为稳定扰动，而把随时间增长的扰动称为不稳定扰动。有时也称叠加稳定扰动的基本气流是稳定的，称叠加不稳定扰动的基本气流是不稳定的。

不稳定是大气中一种普遍的物理过程，各种大气系统的发展都同某种不稳定的波动活动相联系。例如，中高纬度气旋的加深和槽脊的发展都同大气长波的不稳定有关，而暴雨的发生发展经常表现为中尺度的不稳定。所以大气波动的稳定性问题一直是大气动力学的一个重要的理论问题。虽然其属于理论研究的范畴，但由于它是天气和气候系统发生发展的动力机制，也可为大气环流和天气系统的存在和维持作出解释，故也是一个很有实用价值的应用研究问题。

1.1.2.1　大气长波稳定性的研究

大尺度长波稳定性理论的开创性工作是由Charney、Eady和Kuo等气象学家完成的，Charney[28]和Eady[29]最先发现斜压基流中天气尺度扰动的不稳定，给出了斜压西风气流的不稳定条件。Kuo[30]还对西风水平分布产生的正压不稳定做了理论上的研究，给出了西风水平切变存在拐点是正压不稳定出现的必要条件。这些研究所采用的方法均是标准模(Normal Mode)方法。在以后的几十年中，大多数关于稳定性理论的研究均限于Normal Mode方法，Normal Mode方法成为大气稳定性问题研究的主流，Pedlosky[31]、曾庆存[2]和Kuo[32,33]都在他们的著作中系统地总结了这方面的研究成果。

1.1.2.2　中尺度系统稳定性的研究

暴雨的发生发展，经常与中尺度系统的稳定性有关。对称不稳定就是一种重要的中尺度

动力不稳定。对称不稳定理论是大气动力学中的一个经典问题，它被应用于多种天气系统的发生发展问题研究上。所谓对称不稳定，从物理上看就是在垂直方向上为对流稳定的和在水平方向上为惯性稳定的环境中，气团作倾斜上升运动时可能出现的一种不稳定。从上个世纪到现在，对称不稳定的研究有了长足的进步。它经历了由轴对称到平面对称，由无黏大气到黏性大气，由干大气到湿大气，由均匀参数到非均匀参数的发展[34]，并应用于行星大气环流，进一步应用到诸如锋面降水雨带、雪暴等中尺度天气现象触发机制的研究中。Rayleigh、Solberg等首先讨论了同轴圆筒之间不可压缩均匀流体的惯性不稳定机制，得到轴对称扰动的稳定性判据。Ooyama[35]进一步用来研究台风涡旋中的发展型轴对称扰动，如果扰动的总动能对任何初始扰动来说都受到限制，那么涡旋就被认为是稳定的，若至少有一组初始值，使得总扰动动能随时间增长而超过界限，则涡旋就是不稳定的。Yanai 和 Tokioka[36,37]对此进行了数值试验，证明了该不稳定性条件的充分性。

Stone[38]发现，对于具有常数垂直切变、无水平切变、f 平面上的无黏斜压 Boussinesq 流来说，惯性环流几乎是在一个等熵面上作翻转运动，不同类型扰动的增长率是 Ri 数的函数，若 $Ri>0.95$，斜压不稳定占优势，若 $0.25<Ri<0.95$，对称不稳定占优势，若 $Ri<0.25$，Kelvin-Helmholtz 不稳定占优势。张可苏[39]讨论了垂直方向有界的对称不稳定性，利用齐次边界条件，导出了斜压基流对称不稳定的条件为 $Ri<f/f_a-n^2(L/L_0)^2(f_a/f)$，其中 $Ri\equiv N^2/U_z^2$ 是 Ri 数，$L_0=HU_z/f$ 是热成风的惯性圆半径，从而可知，基流的水平反气旋性切变有利于提高临界 Ri 数，在没有水平切变时，只有 $0<Ri<1$ 时才有对称不稳定，并指出对称不稳定实质上是斜压大气中的惯性对流不稳定，且正好落在对流和惯性运动之间的 β 中尺度段上。

然而，真实斜压流体中必须考虑黏性的作用，McIntyre[40]发现，惯性稳定度方程关于扩散系数是呈奇性的，即黏性系统解的性质随着扩散的消失，其不同于无黏系统的解，不相等的热量和动量扩散有利于对称不稳定的发生。

随着多普勒雷达的应用，人们开始发现温带气旋中的雨带结构并不是直接与锋面环流联系，有些雨带中并不存在对称不稳定。考虑到凝结作用会改变对称不稳定的临界值及其结构，在饱和大气中用湿球位温代替干大气中的位温，从而引入了条件对称不稳定(CSI)，Bennetts 和 Hoskins[41]认为 CSI 是锋面雨带形成的一种主要机制，并提出了雨带形成的三个阶段。高守亭和孙淑清[42]在国内最早引入对称不稳定的概念，并将其用于中尺度系统稳定性的研究。讨论了由于低空强风切变导致 Ri 的减小与对称不稳定的关系，并证明了对中尺度扰动在 $Ri<5.2$的情况下，就会发生对称斜压不稳定。而后，赵平和高守亭[43]利用原始方程和压力对数坐标，进一步研究了对称不稳定，找出了 Ri 数依赖于 Ro 数的判据。张立凤、张铭[44]研究了线性情况下的 Wave-CISK 与对称不稳定的关系，考虑不同加热廓线对对称不稳定增长率及结构的影响，指出当无加热时，不稳定扰动在原地增长但不传播，有加热时，可以出现传播的不稳定扰动，且扰动的传播方向与加热分布有关，凝结加热是产生最不稳定波长选择性的因子之一。沈新勇、张铭[45]采用 Green 函数法和 Fourier 方法讨论凝结加热反馈在对称不稳定中所起的作用，发现凝结加热反馈使对称不稳定的增长率和截断半波长加大，低层加热反馈明显有利于对称不稳定的发展。

在动力稳定性理论研究方面，除了继续探讨对称不稳定外，对横波不稳定亦做了研究。所谓横波型扰动不稳定，就是扰动的传播方向与基流相同，即研究沿着基流传播的扰动的稳定性问题。Charney[28]和 Eady[29]最早研究了天气尺度波段上横波型扰动准地转的发展问题。

Kuo和Seitter[33]在研究中性和部分不稳定大气中简单地讨论了横波不稳定问题。张可苏[46]将Eady模型推广到非地转情况，得到斜压基流的双模态不稳定谱：在天气尺度和次天气尺度上出现Eady模态，在几十至几百千米的惯性尺度上出现非地转斜压中尺度模态，在垂直剖面上中尺度模态呈非对称“猫眼”流型，在水平方向上散度与涡度交替分布。对同一线性风速廓线，中尺度模态的发展率约为Eady模态的4倍，并指出这可能是启动和组织强对流云团的一种动力学机制。张立凤、张铭[47]研究了沿切变基流传播的非地转不稳定及对流凝结对它的影响，发现在非地转模式中，在大尺度模态的短波截断以外，确实存在中尺度模态，加热对后者的影响比前者的影响要大，它使中尺度模态的不稳定增长率增大，并改变了增长率对波长的选择性和扰动的结构。

但是，通常斜压大气中普遍存在的是扰动在水平方向呈二维传播，即扰动传播方向与垂直切变基流存在的夹角既非0°(横波型)，也非90°(对称型)，此时的扰动可简称为斜交型扰动。张立凤、王丽琼、张铭[48]利用Boussinesq方程研究了此类斜交型扰动的不稳定问题，指出当Ri数不大时，在α中尺度波段其增长率最大，此时该斜交型不稳定的性质既不同于重力惯性波的对称不稳定，也不同于Rossby波的斜压不稳定，而是非地转涡旋波的不稳定。张铭、张立凤[25~27]还从理论上对斜交型扰动(对称型扰动和横波型扰动是其特例)的不稳定谱点分布作了分析，得到了不稳定扰动谱点分布的半圆定理。

赵思雄等[49]在分析东亚冷锋时，发现条件对称不稳定和对流不稳定是同时存在的，认为这种混合型的不稳定机制可能是梅雨锋暴雨的触发机制之一。高守亭等[50,51]在研究切变线上涡层不稳定理论时，打破了传统的Kelvin-Helmholtz研究切变不稳定的观点，考虑了强涡度切变存在时切变线已构成了一个涡层，这时切变线的不稳定问题就变成涡层的不稳定问题，并从理论上给出了水平切变线上涡层不稳定必要条件的判据。施曙、赵思雄[52]对长江中游一次中低压过程的诊断分析表明，对称不稳定与对流不稳定也是同时存在的。可见，在中尺度系统形成的不同阶段，是有不同的不稳定机制在起主要作用，且各种不稳定也不是绝对独立的，它们可能是同时存在的。

1.2 传统的大气运动尺度划分

观测和分析表明，大气运动是极为复杂的，包含着从湍流微团到超长波运动等多尺度的运动系统。由于不同尺度的天气系统具有不同的物理性质，为便于研究，气象学家将发生在大气中的运动进行分类。但由于对大气运动认识和研究对象理解的不同，尺度划分并不十分一致[1]。

从观测的角度来看，气象学家把可以用常规观测网站资料分析得到的系统称为大尺度天气系统，其水平尺度至少大于1 000 km；此外，把用单站雷达探测到的系统称为小尺度天气现象，其水平尺度为几米到几千米；而把介于这两者之间的天气现象泛指为中尺度现象，即描述性地定义为时间尺度和空间尺度比常规探测站网小，但比积云单体又大得多的一种尺度，水平尺度约几千米到几百千米，时间尺度约1～5天。

而在大气动力学中，一般是通过大气内部的各种物理参数的大小，来区分大气现象时空尺度的。根据尺度分析得到各种无量纲物理参数Rossby数(Ro)、Froudes数(Fr)、Richardson数(Ri)、Reynolds数(Re)等的大小，可以反映出作用于大气的各种基本作用力的相对大小，从

而确定大气运动的性质。对于大尺度运动，$Ro=1$，$Fr=1$，运动是准静力、准地转的，旋转是基本的，可忽略非地转平流；对于中尺度运动，$Ro:1$，$Fr<1$，旋转和非地转平流是基本的；对于小尺度运动，$Ro>10$，$Fr>10$，运动是非静力的，非地转平流是基本的，可忽略旋转。

无论是从观测还是理论分析的角度，都很难确定性地讨论各种尺度的范围。在实际的应用中，都是依据动力分析所得到的尺度范围，结合实际需要，再取具体确定区分尺度的界限。目前，较普遍采用的尺度分类法是：将大气运动分为大尺度（水平尺度大于 2 000 km）、中尺度（水平尺度为 2～2 000 km）和小尺度（水平尺度小于 2 km）；并将中尺度运动进一步细分为 α 中尺度（水平尺度为 200 ～2 000 km）、β 中尺度（水平尺度为 20～200 km）和 γ 中尺度（水平尺度为 2～20 km）。

1.3 本卷书的撰写目的和内容

要透彻了解大气波动的性质，则必须回答以下关键问题：

(1)在不同尺度波段涡旋波和重力惯性波各自具有什么特点？在大尺度，该问题易答。此时涡旋波与重力惯性波的性质完全不同，前者是准静力和准地转的，在 β 平面上称为 Rossby 波；而后者是非地转的，并具有明显的辐合辐散。然而，在中尺度波段，涡旋波和重力惯性波均是非地转的，甚至是非静力的，故该问题的准确答案目前仍然不清楚。

(2)涡旋波和重力惯性波是否具有可分性？在大尺度，该问题也易答。在正压大气中，重力惯性波的频率（指绝对值，下同）明显大于涡旋波，故前者称之为快波，而后者则称之为慢波，两者按频率就能明显区分[89]。在斜压大气中，两者的频率虽较接近，但前者的频率仍大于后者的频率；在考虑到前者是非地转、后者是准地转的特点后，两者仍易区分。然而在中尺度系统中，当基流存在垂直切变时，这两类波动的频率范围可发生重叠[22]，此时这两类波动的可分性就成为亟待研究的关键问题，而有无新波型（如混合波）出现，也是待研究的新问题。

以上两问题均涉及中尺度系统波谱的分布规律和特征波动的性质、结构。在当前中尺度动力学中尚无现成答案，我们试图在该方面进行研究，分析不同尺度系统，特别是与暴雨有关的 β 中尺度系统的谱点分布及其特征波动的结构，给出重力惯性波、涡旋波连续谱的存在范围及其重叠条件，并依此提出运动尺度划分的理论依据和范围。

本卷书主要介绍我们对二维旋转层结大气中的波谱分析和非平衡不稳定的研究成果，其主要内容有：

(1)估计不同尺度系统的波谱分布，分析连续谱可能存在的范围；

(2)在理论上探讨不同尺度、特别是 β 中尺度重力惯性波和涡旋波的可分性问题，研究该两类波动的性质；

(3)提出运动尺度划分的理论依据和范围；

(4)计算不同尺度系统的波谱和谱函数，研究其波动性质和可分性问题，并与理论结果进行对比。

第2章　二维旋转层结大气中的β中尺度扰动数学模型

2.1 引　言

大气中存在多种波动,不同的波动在性质上有很大差别,对天气的影响也不一样。对天气和气候作用最大的有两种波动,即涡旋波(大尺度情况下,在β平面中称其为 Rossby 波)和重力惯性波。大尺度的 Rossby 波常与大范围天气的演变联系在一起,而旋转大气中的重力波,对大范围天气影响不大,但中尺度飑线、山地背风波、暴雨等都与其活动有关。

以往在直角坐标系中,对基流为线性垂直切变和层结参数为常数的情况已做过很多研究[23,24,48],得到了一系列有意义的结论。但在实际天气系统中,更多的是基流为非线性切变的情况。在这种情况下,虽然可以得到线性化的小扰动方程,但因方程的系数并非常数,一般情况下仍难求解。因此,本章在前人工作的基础上,针对β中尺度系统,推导了当基流存在非线性垂直切变和层结参数为非常数时的准二维深对流 Boussinesq 方程组,结合边界条件,将其初边值问题转化为一个常微分方程组的特征值问题,从理论上定性分析大气中涡旋波和重力惯性波的波谱分布特征,为后面章节的数值计算提供理论依据。

2.2 数学模型和计算方法

考虑深对流、无黏、非绝热无摩擦的滞弹性方程组为:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{\bar\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+fv & (2.1.1)\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{\bar\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}-fu & (2.1.2)\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{\bar\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}+\dfrac{g}{\bar\theta}(\theta-\bar\theta)-g & (2.1.3)\\[2ex] \dfrac{\partial\bar\rho u}{\partial x}+\dfrac{\partial\bar\rho v}{\partial y}+\dfrac{\partial\bar\rho w}{\partial z}=0 & (2.1.4)\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\dot Q}{c_p} & (2.1.5)\end{cases}$$

这里,地转参数f取为常数,c_p为定压比热容,u,v,w为速度的三个分量,$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial}{\partial t}+u\dfrac{\partial}{\partial x}+v\dfrac{\partial}{\partial y}+w\dfrac{\partial}{\partial z}$,且有:

$$
\begin{aligned}
\theta(x,y,z,t) &= \bar{\theta}(x,y,z)+\theta'(x,y,z,t),\\
\rho(x,y,z,t) &= \bar{\rho}(z)+\rho'(x,y,z,t),\\
p(x,y,z,t) &= \bar{p}(x,y,z)+p'(x,y,z,t)。
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

$\bar{\rho},\bar{\theta},\bar{p}$ 为密度、位温和气压的标准值(气候值),并认为在同一高度上有:

$$\rho'=\bar{\rho},\quad \theta'=\bar{\theta},\quad p'=\bar{p} \tag{2.3}$$

设 $z=0$ 处为地面,$z=H$ 处为逆温层高度(含对流层顶),则对该方程组可设以下边条件:

$$z=0,\quad w=0;\quad z=H,\quad w=0 \tag{2.4}$$

在方程组(2.1)中引入基本流矢量为 $\overline{\boldsymbol{U}}$,并设其方向与波动传播方向(设为 x 轴)有一个不变的夹角 δ(δ 为常数),基本流大小为 $\overline{U}$,且 $\overline{U}=\overline{U}(z)$,即该基本流仅流速随高度 z 变化而流向不变。此时有 $\bar{u}=\overline{U}\cos\delta,\bar{v}=\overline{U}\sin\delta,\bar{u},\bar{v}$ 分别为基流在 x 轴和 y 轴上的分量且$\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}z},\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}z}$仅为 z 的函数。在这种情况下有:

$$\bar{u}\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}z}-\bar{v}\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}z}=\overline{U}\cos\delta\frac{\mathrm{d}\overline{U}}{\mathrm{d}z}\sin\delta-\overline{U}\sin\delta\frac{\mathrm{d}\overline{U}}{\mathrm{d}z}\cos\delta=0 \tag{2.5}$$

再设:

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z,t) &= \bar{u}(z)+u'(x,y,z,t),\\
v(x,y,z,t) &= \bar{v}(z)+v'(x,y,z,t),\\
w(x,y,z,t) &= w'(x,y,z,t)。
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

这里 u',v',w'为速度场对该基本流的偏差。

基本气流必须满足原方程,故其在水平方向满足地转平衡,垂直方向满足静力平衡,即有:

$$f\bar{v}=\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} \tag{2.7.1}$$

$$f\bar{u}=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y} \tag{2.7.2}$$

$$\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}=-g \tag{2.7.3}$$

设偏差为微扰,对方程组(2.1)进行线性化,且为方便再记:

$$(u,v,w,\theta)\equiv(\bar{\rho}u',\bar{\rho}v',\bar{\rho}w',\frac{\bar{\rho}\,g}{\theta_0}\theta')$$

这里 θ_0 取常数。这样可得该大气运动的 Boussenque 方程组:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\bar{v}\dfrac{\partial u}{\partial y}-fv+\dfrac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}z}w=-\dfrac{\partial p'}{\partial x} & (2.8.1)\\[2ex]
\dfrac{\partial v}{\partial t}+\bar{u}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\bar{v}\dfrac{\partial v}{\partial y}+fu+\dfrac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}z}w=-\dfrac{\partial p'}{\partial y} & (2.8.2)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial w}{\partial t}+\overline{u}\dfrac{\partial w}{\partial x}+\overline{v}\dfrac{\partial w}{\partial y}-\theta=-\dfrac{\partial p'}{\partial z} & (2.8.3)\\
\dfrac{\partial \theta}{\partial t}+\overline{u}\dfrac{\partial \theta}{\partial x}+\overline{v}\dfrac{\partial \theta}{\partial y}+S^2u+M^2v+N^2w=\dfrac{g\overline{\rho}}{\theta_0}\dfrac{\pi\dot{Q}}{c_p} & (2.8.4)\\
\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0 & (2.8.5)
\end{cases}
$$

其中

$$M^2=\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}=-f\frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}z},\ S^2=\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x}=f\frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}z},\ N^2=\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z}。 \tag{2.9}$$

注意这里 u 与 $\overline{u}$ 量纲不同。$\overline{u}$ 为风的量纲，$u=\rho u'$ 为动量的量纲，v,w 的量纲与 u 的量纲相同。N^2 为层结参数。对于位温方程，考虑到式(2.9)后可知，则基本量 $\overline{\theta}$ 满足方程

$$\overline{u}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}=0 \tag{2.10}$$

由式(2.9)的前两式可知，等式右边仅为 z 的函数，故等式左边 $\dfrac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}$，$\dfrac{\partial\overline{\theta}}{\partial x}$ 也仅能为 z 的函数，故 $\overline{\theta}$ 是关于变量 x,y 的一次函数。这样 $\overline{\theta}$ 可有以下形式：

$$\overline{\theta}=\theta_0+\hat{\theta}(z)+\frac{f\theta_0}{g}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}z}x-\frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}z}y\right) \tag{2.11}$$

此时有：

$$N^2=\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z}=\frac{g}{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}(z)}{\mathrm{d}z}+f\left(\frac{\mathrm{d}^2\overline{v}}{\mathrm{d}z^2}x-\frac{\mathrm{d}^2\overline{u}}{\mathrm{d}z^2}y\right)=N_0^2(z)+\widetilde{N}^2(x,y,z) \tag{2.12}$$

这里 $N_0^2(z)=\dfrac{g}{\theta_0}\dfrac{\mathrm{d}\hat{\theta}(z)}{\mathrm{d}z}$ 仅为 z 的函数，而 $\widetilde{N}^2(x,y,z)=f\left(\dfrac{\mathrm{d}^2\overline{u}}{\mathrm{d}z^2}y-\dfrac{\mathrm{d}^2\overline{v}}{\mathrm{d}z^2}x\right)$ 为 x,y,z 的函数。注意到 N^2 在方程(2.8.4)中处于系数地位，当 $x\to 0$ 和 $y\to 0$ 时有 $\widetilde{N}^2\to 0$，此时有 $N^2=N_0^2(z)$。若假设 $\widetilde{N}^2\ll N_0^2$，则此时可不考虑层结参数在水平方向的变化，并认为其垂直方向的变化仅由 N_0^2 决定，这样有 $N^2\approx N_0^2$，方程(2.8.4)中的 N^2 可代之以 $N_0^2(z)$。通过尺度分析可知，条件 $N^2\approx N_0^2$ 在中尺度情况下通常均成立。注意到当基流随高度仅呈线性变化时，显然有 $\widetilde{N}^2(x,y,z)\equiv 0$，这样对大、中尺度均严格有 $N^2=N_0^2(z)$。若基流随高度分布变化的曲率较小($\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2}$ 较小)，则对大尺度(只要不是行星尺度)，也可不考虑层结参数在水平方向的变化，即可认为条件 $N^2\approx N_0^2$ 成立，故以下在对大尺度的讨论中，我们也认为该条件成立。

当式(2.8.4)中的 N^2 代之以 $N_0^2(z)$ 时，若再设大气内部的波动沿 x 方向传播且在 y 方向是均匀的(这是水平方向准一维中尺度扰动的特点，如飑线等[92])，此时对扰动量有 $\dfrac{\partial}{\partial y}=0$ 且 $\dot{Q}$ 与 y 无关，方程组(2.8)可进一步简化为：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}+\overline{u}\dfrac{\partial u}{\partial x}-fv+\dfrac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}z}w=-\dfrac{\partial p'}{\partial x} & (2.13.1)\\
\dfrac{\partial v}{\partial t}+\overline{u}\dfrac{\partial v}{\partial x}+fu+\dfrac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}z}w=0 & (2.13.2)\\
\dfrac{\partial w}{\partial t}+\overline{u}\dfrac{\partial w}{\partial x}-\theta=-\dfrac{\partial p'}{\partial z} & (2.13.3)\\
\dfrac{\partial \theta}{\partial t}+\overline{u}\dfrac{\partial \theta}{\partial x}+f\dfrac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}z}u-f\dfrac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}z}v+N_0^2w=Q & (2.13.4)\\
\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0 & (2.13.5)
\end{cases}
$$

其中，$Q=\dfrac{g\overline{\rho}}{\theta_0}\dfrac{\overline{\pi}}{c_p}\dot{Q}$，$\overline{\pi}=\left(\dfrac{1\ 000}{p_0(z)}\right)^{R/c_p}$，$p_0(z)$ 为与 z 相应的标准气压。

由式(2.13.5)引入流函数 ψ 并消去气压扰动，可得：

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\overline{u}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)v+f\dfrac{\partial \psi}{\partial z}-\dfrac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}z}\dfrac{\partial \psi}{\partial x}=0 & (2.14.1)\\
\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\overline{u}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\theta+f\dfrac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}z}\dfrac{\partial \psi}{\partial z}-f\dfrac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}z}v-N_0^2\dfrac{\partial \psi}{\partial x}=Q & (2.14.2)\\
\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\overline{u}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi-f\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial \theta}{\partial x}-\dfrac{\mathrm{d}^2\overline{u}}{\mathrm{d}z^2}\dfrac{\partial \psi}{\partial x}=0 & (2.14.3)
\end{cases}
$$

这里 $u=\dfrac{\partial \psi}{\partial z}$，$w=-\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$，$\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$。此时边界条件为：

$$
\psi_{z=0}=\psi_{z=H}=0 \tag{2.15}
$$

设方程组(2.14)满足边界条件(2.15)的解为：

$$
\begin{pmatrix} v \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} iV(z) \\ \Theta(z) \\ \Psi(z) \end{pmatrix}\mathrm{e}^{i(kx-\sigma t)} \tag{2.16}
$$

代入方程组(2.14)后，则有：

$$
\begin{cases}
(\overline{u}-\sigma)V+ik\dfrac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}z}\Psi-f\dfrac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}z}=0 & (2.17.1)\\
(\overline{u}-\sigma)\Theta-kN_0^2\Psi-if\dfrac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}z}\dfrac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}z}-f\dfrac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}z}V=-iQ & (2.17.2)\\
(\overline{u}-\sigma)\left(\dfrac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}z^2}-k^2\Psi\right)-f\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}+k\Theta-k\dfrac{\mathrm{d}^2\overline{u}}{\mathrm{d}z^2}\Psi=0 & (2.17.3)
\end{cases}
$$

方程组(2.17) 可通过消去变量 V，Θ 化为以下一个关于变量 Ψ 的方程：

$$
(\overline{u}k-\sigma)[(\overline{u}k-\sigma)^2-f^2]\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}z^2}+2kf[f\overline{u}_z+i(\overline{u}-\sigma)\overline{v}_z]\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}z}
$$