

理科

华东师范大学 第二附属中学 校本课程

华东师范大学第二附属中学 主编

L I K E



数学的推广与创造

乔根凤 编撰



华东师范大学出版社



华东师范大学 第二附属中学 校本课程

华东师范大学第二附属中学 主编

数学的推广与创造

乔根凤 编撰



华东师范大学出版社

序言

笛卡儿说：一切问题可以化为数学问题。恩格斯说：数学是关于数和形的科学。这个定义直到现在仍然概括了数学的大部分，但是数学发展到今天，又诞生了许多新的分支，比如数理逻辑，它既没有形也没有数，很难把它归到数和形的学问中去。数学的定义也在发展和推广。今天大多数数学家认为：数学是人类意志的表达，反映积极的意愿、深思熟虑的推理，以及精美而完善的愿望，它的基本要素是逻辑与直觉、分析与构造、一般性与个别性。虽然不同的传统可能强调不同的侧面，但只有这些对立势力的相互作用，以及为它们的综合所作的奋斗，才构成数学科学的生命、效用与高度的价值。

数学是一种古老而又年轻的文化。人类从蛮荒时代的结绳计数，到如今的电子计算机操控宇宙航行，无时无刻不受到数学的恩惠和影响。一个发达的社会，没有强盛的数学研究是不可想象的。

数学的生长，是一个反复尝试、探究的过程；是一个依靠、猜想、证明、批判、反驳的过程；是一个不断修正、改进、完善、深化和创造的过程；是一个寻找各种关系，去探索扩充某种思想的过程。扩充的手段之一就是推广。

推广是一个定义扩张，以涵盖更多、更广的物件对象或思想领域。有时候也可以把多个不相连的研究领域，合并为单一的观念领域（因而原来的对象只是这个更广对象的特殊情形，即特例）。当然，推广也有其方法和评价。波利亚说：无论如何请你记住推广有两种类型，一种是价值不大的，另一种是有价值的。推广之后冲淡了的是不好的，推广之后提炼了的是好的。

综观数学发展的历史,无不与推广有关(在国际数学教育大会上,曾提出的数学发展史上的四个高峰:公元前300年的欧几里得的《几何原本》;微积分的发明和应用;19世纪至20世纪初的公理化数学;以计算机技术为基础的当代数学,也是如此)。数学家总是在已有知识的基础上,向未知的领域扩展,从实际的概念及问题中推广出各种各样的新概念、新问题。数学的发展依赖于数和几何两方面的进步,笛卡儿的创新用代数方法解决几何问题推动了数学的发展。黎曼则不可估量地扩展了几何(黎曼也是拓扑学的奠基者)。而贝蒂于1871年推广了黎曼的连通度数。又如希尔伯特在推广通常的 n 变量二次型的主轴理论到无穷多变量的过程中发现了许多新的数学现象(当然,希尔伯特还在1900年为数学家提出了著名的23个问题)。说得狭隘点,数学的发展正是由数学中某些概念的推广和由此而引发的新内容、新概念、新方法、新问题的出现而导致的。

费马在阅读丢番图的《算术》时,在页边用拉丁文写下了一段话:“不可能把一个立方数分成两个立方数,或者把一个四方数分成两个四方数,而且一般地说,不可能把任何一个大于二次幂的方幂数分成两个同次幂的方幂数。我对此找到了一个绝妙的证明,可惜这里空白太小,写不下。”表示成现代的语言就是:“ $x^n + y^n = z^n$, $xyz \neq 0$, 当 $n > 2$ 时无整数解。”

费马大定理: $a^n + b^n = c^n$ ($n \geq 3$) 没有正整数解。可以看成是勾股定理 $a^2 + b^2 = c^2$ 的一个推广。

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBRI SEX, ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER VNVS.

CM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
C. Editione nouissima D. P. de FERMAT Secundo, Tercio.

Accessit Locutus Analyticus nouissimus collectum
ex varijs ciuilibus D. de FERMAT Epistolis.



TOLOSÆ,
Eiusdem BENARDI BOSCH. Regium Collegij Societatis Iren.
M DC LXX.

有费马批注的巴歇译(亚历山大的丢番图算术)的封面

创造性的活动,对学生来说则是再创造的活动。它可以是一个老事实的新证明,可以是一个新事实,也可以是处理一些事实的新方法。

《数学的推广与创造》以数学创造教育思想为指导,介绍数学推广的基本方法、基本技巧和基本理论,介绍数学史上著名的推广范例,力争让每一个参与的学生都能得到提高和发展!

目录

1. 数的发展与推广 / 1

1.1 数的发展 / 1

1.2 数概念进化途中的里程碑 / 7

1.3 数的发展大事记 / 9

阅读材料:说数 / 12

2. 数学发展中的推广范例 / 15

2.1 从数系的扩充到拉格朗日(Lagrange)平方和问题 / 16

2.2 勾股定理(毕达哥拉斯定理)及推广 / 25

2.3 帕斯卡三角形 / 38

阅读材料:费马大定理终结者 / 46

3. 数学推广的基本方式和方法 / 54

3.1 向高维、纵深推广 / 56

3.2 向类比、横向推广 / 69

3.3 反向推广(反问题)与联合推广 / 77

阅读材料:高考中与推广思想有关的试题 / 88

4. 学生作品 / 95

4.1 小球堆积问题的研究 / 95

4.2 由一道高考题引出的推论 / 106

4.3 特征根方程初探 / 109

阅读材料:以华人数学家命名的数学成果 / 124

参考书籍 / 145

1 数的发展与推广

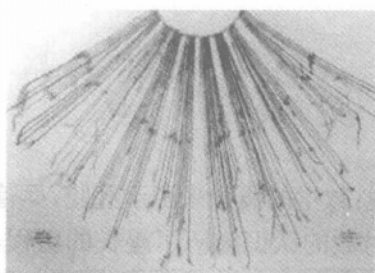
1.1 数的发展

数学概念从哪里来? 冯·诺依曼说:数学的概念来源于经验,尽管有时其系谱是长远的和曲折的。人类对数的认识经历了漫长的历程,人类在进化的蒙昧时期,就已经具有一种才能,这种才能,也就是通常所说的数觉。在一个小的集合里边,增加或者减去一样东西的时候,尽管不曾直接知道增减,也能够辨认到其中有所变化。

许多动物和鸟类也是有这种数觉的。传说的故事便说明了这一点。有个庄园主决心要打死一只在他庄园的望楼里筑巢的乌鸦,他试了好多次都惊动了它,始终没有成功;因为人一走近,乌鸦就离开巢,落在远远的树上守着,等到人离开了望楼,才肯飞回巢里。有一天,这个庄园主定下了一个计策:两人走进望楼,一个留着,一个出去走开,但是乌鸦并不上当,它等到留在望楼里的人也出来了才作罢,这个试验一连做了几天:两个人、三个人、四个人,都没有成功,用五个人时,也像以前一样,先都进了望楼,留一个在里面,其他四人走出来,这次乌鸦却数不清了,它不能辨别四与五,马上飞回巢里去了。

人类的数觉范围也十分有限,早期的人类,也只知道 1、2 和更多一点,中国成语的三人成众就说明早期的中国人认为三是非常大的数,而在欧洲的语言里也都带有这种早期局限性的痕迹,英文的 thrice 和拉丁文的 ter。同样有着双重的意义:三倍和许多,拉丁文的 tres(三)和 trans(超过)之间有着可信的联系,而法文的 tres(甚)和 trois(三)也是如此。

许多原始民族在记录畜群和军队的数目时,不是用刀在树上刻若干痕迹,就是用小卵石堆成一堆, tally(比对)和 calculate(计算)分别是 从拉丁文 talea(刻)和 calculus(石卵)转变成的。此外还用结绳记数。“古者无文字,结绳为约。”我国古代《周易·系辞》上就有结绳记数的记载(上古结绳而治,后世圣人易之以书契),在国外也是这样。



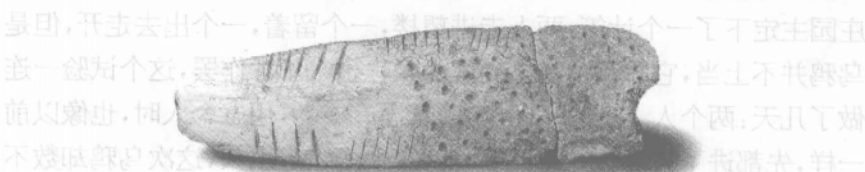
上图 为印加结绳记数



西班牙人描绘的秘鲁人结绳

发现记数的最早直接证据是两块兽骨，上面显现清晰的成组刻痕，其中一块是大约 35 000 年前一只狒狒的股骨，在非洲朋波山脉发现的，另一块是在捷克发现的狼骨，年代约在 33 000 年前。

正是记数，才使具体的、不同质的表达多寡的概念结合为统一的抽象的数概念。前者是原始人的特点，后者则是数学发展的前提。



这些用数形结合去对抽象“数”的诠释或描述的做法，曾启发毕达哥拉斯(pythagoras)学派的学者们用“形数”概念去研究数的性质，且至今仍影响着人类的思维(比如代数性质的几何解释等正是这种思维的延伸)。

由于分配(当一件或几件物品多人去分)而引出了“分数”概念，它的出现是数学史上令人振奋的一件大事。据说分数起源于“分”。一块土地分成三份，其中一份便是三分之一。三分之一是一种说法，用专门符号写下来便成了分数，分数的概念正是人们在处理这类问题的长期经验中形成的。

世界上最早的分数，出现在埃及的阿默斯纸草卷。公元 1858 年，英国人亨利林特在埃及的特贝废墟中，发现了一卷古代纸草卷，立即对这卷无价之宝进行修复并花了 19 年的时间，才把纸草卷中的古埃及文翻译出来。现在这部世界上最古老的数学书被珍藏在伦敦大英博物



上图为早期苏美尔人和巴比伦人的数

馆内。

在阿默斯纸草卷中,人们见到了四千年前分数的一般记法,当时埃及人已经掌握了单分数——分子为1的分数的一般记法。埃及人把单分数看作是整数的倒数,埃及人的这种认识以及对单分数的记法是十分了不起的,它告诉人们数不仅有整数,而且有它的倒数——单分数。

但是分数终究不只是单分数,大约在公元前5世纪,中国开始出现了把两个整数相除的商看作分数的认识,这种认识正是现在分数概念的基础。在这种认识下一个除式也就表示一个分数,中国古代的表示法被除数放在除数的上面,最上面放着商数。大约在12世纪后期阿拉伯人的著作中,首先用一条短横线把分子、分母隔开来,这可以说是世界上最早的分数线,13世纪初,意大利数学家菲波那契在他的著作中介绍阿拉伯数学,也把分数的记法介绍到了欧洲。

无理数的发现曾付出过沉重的代价,古希腊毕达哥拉斯学派的学者们一致认为,数皆可表示为两整数比的形式(即分数或有理数),但学派成员希皮亚斯(Hippias)却发现了边长为1的正方形(单位正方形)其对角线长无法用分数表达,他的发现不仅没能得到学派的褒奖与认可,反而招来杀身之祸(据传他被抛入大海葬身鱼腹),然而无理数最终

还是未能被封杀。

负数是来源于记账的需要。印度数学家从公元 6、7 世纪开始,为了会计上的需要,开始使用负数。在会计分类账上,他们把负债记为负数,与记账法上资产的正数相反。事实上,负数打破了一般实际账务目的,被发明出来了。于是抽象思想家开始探索负数的纯概念领域。

无理数的发现加之随后的负数概念的引入,标志着人类完成了对于数的一个阶段性认识。

16 世纪意大利米兰学者卡尔达诺(1501—1576)在 1545 年发表的《重要的艺术》一书中,公布了三次方程的一般解法,被后人称之为“卡尔达诺公式”。他是第一个把负数的平方根写到公式中的数学家,并且在讨论是否可以把 10 分成两部分,使它们的乘积等于 40 时,他把答案写成“ $=40$ ”,尽管他认为这两个表示式是没有意义的、想象的、虚无缥缈的,但他还是把 10 分成了两部分,并使它们的乘积等于 40。给出“虚数”这一名称的是法国数学家笛卡儿(1596—1650),他在《几何学》(1637 年发表)中使“虚的数”与“实的数”相对应,从此,虚数才流传开来。

数系中发现一颗新星——虚数,引起了数学界的一片困惑,很多大数学家都不承认虚数。德国数学家莱布尼茨(1664—1716)在 1702 年说:“虚数是神灵遁迹的精微而奇异的隐避所,它大概是存在和虚妄两界中的两栖物。”瑞士数学大师欧拉(1707—1783)说:“因为它们所表示的是负数的平方根。对于这类数,我们只能断言,它们既不是什么都不是,也不比什么都不是多些什么,更不比什么都不是少些什么,它们纯属虚幻。”然而,真理性的东西一定可以经得住时间和空间的考验,最终占有自己的一席之地。法国数学家达朗贝尔(1717—1783)在 1747 年指出,如果按照多项式的四则运算规则对虚数进行运算,那么它的结果也是虚数的形式。法国数学家棣莫弗(1667—1754)在 1730 年发现了著名的棣莫弗定理。欧拉在 1748 年发现了有名的关系式,并且是他在《微分公式》(1777 年)一文中第一次用 i 来表示 -1 的平方根,首创了用符号 i 作为虚数的单位。“虚数”实际上不是想象出来的,而是确实存在的。挪威的测量学家成塞尔(1745—1818)在 1779 年试图给予这种虚数以直观的几何解释,并首先发表其作法,然而没有得到学术界的重视。

27

*Data quantitate cultus faciat quadrata
in integris.*

§ Et radix numeri trigonali a, numerus datus
d. Velut $\frac{aa+b}{2} + d$ esse quadratū. fix index.

exit $ua + a + rd = 206$ also $a = \frac{-1 + \sqrt{0.05 - 4(-1)(1)}}{2}$

ponat primo $d=0$ erit ut numerus frigus,

найдя из квадратной радикалы $x_1, a = \frac{-1 \pm \sqrt{5} \pm 1}{2}$

ponas $\sqrt{b^2+1} = 2b+c$ mit $a^2 = 4b^2+c^2+1$

et $2b = c \pm \sqrt{2c-1}$ ergo $2b > 2c$ ponat

$$1 = c + e \quad \text{and} \quad 4c + 8e + 4l = 4c + 4e + 4 = 1$$
$$C = 4LE + 4CE + 1 \text{ at } L = zC + \sqrt{8CE + 1}$$

Si radix numerus cuiusdam trigonali $\equiv \pm$ sit, is

quadrati cuius radix e erit $t = \frac{-1 + \sqrt{1+4}}{2}$.

Quia vero $b = c + e = 3e + \sqrt{8e^2 + 1}$ et $\sqrt{8e^2 + 1}$

$$-50 + 2\sqrt{800} + 20 + \sqrt{800} \quad \text{at } a = -1 + \sqrt{100}$$
$$= 8x + 2\sqrt{8x^2+1} + x + \sqrt{x^2+1}$$
$$= \frac{-1 + 8e + 5\sqrt{8e+1}}{72} \quad \left\{ \text{use quadratic formula} \right\}$$
$$x = \frac{-1 + \sqrt{822+1}}{2} \text{ est quadrato di 17}$$

quadrata cuius latus est $\frac{-1+8p+3\sqrt{8p+1}}{16}$
 cuius radix + eius huius radix $1+3+\frac{1}{4}+\sqrt{H+1}$

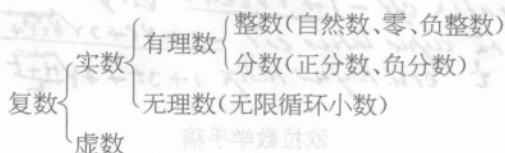
欧拉数学手稿

高斯—阿尔干图解法

出了“复数”这个名词,还将表示平面上同一点的两种不同方法——直角坐标法和极坐标法加以综合,统一于表示同一复数的代数式和三角式两种形式中,并把数轴上的点与实数——对应,扩展为平面上的点与复数——对应。高斯不仅把复数看作平面上的点,而且还看作是一种向量,并利用复数与向量之间——对应的关系,阐述了复数的加法与乘法。至此,复数理论才比较完整和系统地建立起来。

经过许多数学家长期不懈的努力,深刻探讨并发展了复数理论,才使得在数学领域游荡了 200 年的幽灵——虚数揭去了神秘的面纱,显现出它的本来面目。虚数成为了数系大家庭中的一员,从而实数集才扩充到了复数集。

数的概念以及数学符号与数学运算方法,都是随着人类社会的生产、生活与科学技术的发展,根据数学运算的实际需要,逐步地发展并人为地创造出来的。从数的运算角度来考察,数的运算从加、减发展到乘、除,到乘方、开方,再到指数、对数,都是正逆运算组成的一组对立又统一的矛盾。为了使减、除、开方等逆运算在任何情况下都能够进行,就不断地引入了新的数的概念,这就是事物内在的矛盾推动事物不断向前发展的结果。



人们对数的认识在不断扩张。这是我们大家熟悉的数的分类表,那是经过几代数学家们的努力得到的。数的概念的发展是逐步的,后继的系统包括前面的。

在 19 世纪由于数学严密性及公理化的要求,数学家们对数学的理论基础进行研究,发明了许多新的数的系统。意大利数学家皮亚诺在 1891 年提出了自然数的公理,它成为整个数系的基础。这些现代的数学系统中还有三个特别值得注意的:四元数、矩阵和超限数。

公元前 5 世纪,希腊思想家菲洛劳斯强调:如果没有数字,我们就什么也不懂,什么也不知道。在数的发展进程中,我们看到数的推广或抽象化,也看到了影响数学的伟大推动力——符号体系的发展。

柯朗说:在现代数学中抽象化和推广起着至关重要的作用。推广推进了数学的发展,数学发展的历史验证了这一点,数概念的每一种扩充也正是一种推广,它无疑促进人们逐步对数的认识深化,当然也相应

地促进了数学自身的发展。

数字符号表												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
巴比伦楔形数码												
埃及象形符号												
埃及僧侣符号												
埃及民间符号												
中国甲骨文												
中国算筹												
希腊象形数码												
希腊阿提卡数码												
希腊字母记数												
早期罗马符号												
罗马数字												
印度哈拉巴数码												
印度卡罗什奇数码												
印度婆罗门数码												
印度德温那格利数												
阿兹台克数码												
玛雅数字												
西阿拉伯数码												
东阿拉伯数码												
15世纪												
16世纪												

1.2 数概念进化途中的里程碑

古代			
成 就	功 臣	国 籍	时 代
无理数的发现	毕达哥拉斯	希腊	公元前 6 世纪
无限概念的第一关	芝诺、柏拉图 亚里士多德	希腊	公元前 4 世纪

续 表

成 就	功 臣	国籍	时 代
极限概念的第一次 系统整理表述	阿基米得	希腊	公元前 3 世纪
零记号的发明	无名氏	印度	公元后初期
负数	无名氏	印度	公元后初期

文艺复兴

成 就	功 臣	国籍	时 代
连分数的第一次 系统运用	邦别利	意大利	16 世纪
复数的第一次 系统整理表述	卡尔母、邦别利	意大利	16 世纪
文字记号的发明	韦达	法国	16 世纪后期
因式定理的发现	哈里沃特	英国	1631
无限小的系统 整理表述	卡瓦列里	意大利	1635
无限集合的第一次 系统整理表述	伽利略	意大利	1638

近代

成 就	功 臣	国籍	时 代
坐标几何的发明	笛卡儿	法国	1639
数学归纳法原理的 第一次系统整理表述	巴斯卡	法国	1654
微积分的发明	牛顿、莱布尼茨	英国 德国	1677
无穷级数的 第一次系统运用	牛顿、莱布尼茨	英国 德国	1677
复数的几何解释的发现	高斯	德国	1797

成 就	功 臣	国 籍	时 代
集合之势的第一次系统的整理表述	布尔查诺	德国	1820
非方根的代数数的发现	阿贝尔	挪威	1825
四元数的发明	哈密尔顿	英国	1843
超越数的发现	刘维尔	法国	1844
可展量的第一次理论	葛拉斯曼	德国	1844
形式律中固本原则的首次明晰系统整理表述	韩克尔	德国	1867
无理数的第一次科学理论	戴德金	德国	1872
无理数的第二次科学理论	康托尔	德国	1883
超限数的发明	康托尔	德国	1883
集合论中悖论的发现	布拉里-福蒂	意大利	1897

1.3 数的发展大事记

- 公元前 30000 年 旧石器时代在动物骨头上刻痕记数。
- 公元前 8000 年 美索不达米亚及中东地区发现记数石头。
- 约公元前 4000 年 中国西安半坡的陶器上出现数字刻符。
- 公元前 3300 年 苏美及艾兰出现最初的数字及第一个文字命数法。
- 公元前 2700 年 苏美人使用契形数字。
- 公元前 2500 年 据中国战国时尸佼所著《尸子》记载：“古者，埴（注：传说为黄帝或尧时人）为规、矩、准、绳，使天下仿焉”。这相当于有了“圆、方、平、直”等形的概念。
- 公元前 2000 年 十进位制底数出现。
- 公元前 1800 年 第一个位置命数法在巴比伦出现。
- 公元前 1300 年 中文数字出现。
- 公元前 6 世纪 发现无理数。毕达哥拉斯区分奇数与偶数，发展连通数概念与其他数字理论。

公元前 4 世纪	无穷大概念的最早危机。亚里士多德发现无穷大的数学概念。
公元前 335 年	古希腊的欧德姆斯开始编写数学史。
公元前 300 年	希腊字母命数法出现。
公元前 3 世纪	历史上首次出现零：巴比伦命数法的零。有限的概念第一次被提出。阿基米得写下 II 理论。
公元 3 世纪	古希腊欧几里得的《几何学原本》十三卷发表，把前人和他本人的发现系统化，确立几何学的逻辑体系，成为世界上最早的公理化数学著作。
公元 3 世纪	古希腊的阿基米得研究了曲线图形和曲面体所围成的面积、体积；研究了抛物面、双曲面、椭圆面，讨论了圆柱、圆锥和半球之间的关系，还研究了螺线。
战国时期的中国	筹算成为当时的主要计算方法；出现《庄子》、《考工记》记载中的极限概念、分数运算法、特殊角度概念及对策论的例证。
公元前 2 世纪	无零的中文位置命数法出现。梵文的九个数字出现，后来发展为印度数字。
公元前 170 年	湖北出现竹简算书《算数书》。
1 世纪	开始使用负数。
4~5 世纪	印度位置命数法、带 0 的十进位命数法出现。
5~9 世纪	带 0 的玛雅位置命数法出现。
8 世纪末	印度算术传到巴格达。
9 世纪初	花拉子米写了一本代数著作。
10 世纪	土盘算法在北非马格瑞布地区及伊比利亚半岛出现。这些数字都有一个不同的印度数字图形，通用于阿拉伯中东区，是今西方数字的前身。
12~13 世纪	印度命数法中的 0 在西欧出现。
12~15 世纪	“阿拉伯”数字的时代在西欧以图象形式确立下来，并沿用至今。
13 世纪	序列首次使用。