GAODENGSHUXUE
XUEXIZHIDAO

高等数学

学习指导

陈万勇 葛玉凤 主编

东南大学出版社

高等数学

学习指导

高等数学学习指导

主　编：陈万勇　葛玉凤

副主编：韦　俊　黄素珍

编　委：朱亚萍　王　莉　陆　媛　陆文林
胡　忠　周　琦　刘　勇

东南大学出版社
·南京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/陈万勇，葛玉凤主编. —南京：东南大学出版社，2008.8

ISBN 978-7-5641-1170-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①陈…②葛… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.G013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 117597 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人：江 汉

江苏省新华书店经销　　盐城印刷总厂印刷

开本：787 mm×1092 mm 1/16 印张：13.25 字数：322 千字

2008 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5641-1170-0/O·71

印数：1～6 000 册　　定价：25.00 元

前　言

高等数学是工科各专业的重要基础课程，也是硕士研究生入学考试数学课程的主要部分。编者从事应用型工程本科高等数学教学二十多年，为帮助学生更好地学习好高等数学基础知识，也便于学生课后自习，同时兼顾学生复习考研的需要，结合自己的教学经验并参考大量的高等数学教材编写这本指导书。本书的章节编排基本符合同济四、五版的教材目录，便于指导学生同步学习，也可以作为考试复习用书。

本书具有如下特点：

一、疑点解析，通俗易懂；

二、例题精选、解答详细，便于自学；

三、自测练习，有利于考试；

四、复习考研，提高点拨。

编　者

2008年5月

目 录

第一章　函数、极限、连续

第一节　映射与函数

一、知识点复习

1. 集合的概念与运算、区间与邻域.

2. 函数:设 x,y 是两个变量,D 是一个给定数集.若对于每一个数 $x\in D$,变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$.数集 D 叫作这个函数的定义域,x 叫作自变量,y 叫作因变量.

3. 函数的几种特性:有界性、奇偶性、单调性、周期性.

4. 反函数的概念及其性质.

5. 复合函数:设 $y=f(u)$的定义域为 D_1,$u=\varphi(x)$的定义域为 D.若 $u=\varphi(x)$的值域 $W\subset D_1$,则称 $y=f(\varphi(x))$是由 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$复合而成的复合函数.

6. 初等函数:幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合步骤构成并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

二、重点提示

重点:邻域、复合函数、分段函数、定义域、函数性质.

难点:复合函数的复合过程.

三、疑点解析

1. 邻域 $U(a,\delta)$与去心邻域$\mathring{U}(a,\delta)$有什么区别与联系?

答　邻域 $U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$是一个完整的开区间$(a-\delta,a+\delta)$,而去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$是上述区间去掉对称中心 $x=a$ 后形成的两个小开区间$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.可见,它们仅有包含点 a 与不包含点 a 的不同.

2. 如何确定函数的定义域?

答　常用下列方法列出不等式或不等式组确定函数的定义域:

(1) 分式函数,其分母不等于零;

(2) 偶次根式函数,其被开方式非负;

(3) 对数函数,其真数大于零,底数大于零且不等于 1;

(4) 反函数的定义域是其直接函数的值域;

(5) 复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域是函数 $u=\varphi(x)$ 定义域的子集,在此子集上 $u=\varphi(x)$ 的值域包含于函数 $y=f(u)$ 的定义域之中;

(6) 具有实际意义的函数,其定义域是其解析表达式表示函数的(自然)定义域的子集,该子集由兼顾问题的实际意义(解联立不等式组)来确定.

3. 复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域是否相同?

答 一般不相同. 因为函数 $y=f(\varphi(x))$ 要求 $\varphi(x)$ 的值落在 $y=f(u)$ 的定义域内,而 $u=\varphi(x)$ 的值域可能超出 $y=f(u)$ 的定义域,所以复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域通常是 $u=\varphi(x)$ 的定义域的子集. 如 $y=f(u)=\arcsin u$ 与 $u=x^2$ 的定义域分别为 $[-1,1]$ 与 $(-\infty,+\infty)$,复合函数 $y=f(\varphi(x))=\arcsin x^2$ 的定义域 $[-1,1]$ 是 $u=\varphi(x)=x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 的子集.

四、典型例题分析与习题详解

例 1 填空.

(1) 设 $f(e^x-1)=x^2+1$,则 $f(x)=$________.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & -1\leqslant x<0,\\ \sqrt{x-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $\varphi(x)=$________时 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为奇函数.

解 (1) 设 $e^x-1=t$,则 $x=\ln(1+t)$,$f(t)=1+\ln^2(1+t)$,即 $f(x)=1+\ln^2(1+x)$.

(2) 由 $f(x)=-f(-x)=\varphi(x)$,知 $\varphi(x)=-\sqrt{-x-(-x)^2}=-\sqrt{-x-x^2}$.

例 2 求函数 $f(x)=\sqrt{16-x^2}+\ln\sin x$ 的定义域.

解 要使函数 $f(x)$ 有意义,必须有 $\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\ \sin x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4,\\ 2n\pi<x<2n\pi+\pi, & n\in\mathbf{Z},\end{cases}$ 则所求定义域为 $(-4,-\pi)\cup(0,\pi)$.

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\geqslant 1,\\ x^2, & |x|<1,\end{cases}$ $g(x)=\lg x$,求 $f(g(x))$,$g(f(x))$.

解 (1)
$$f(g(x))=\begin{cases}\lg x, & |\lg x|\geqslant 1,\\ (\lg x)^2, & |\lg x|<1\end{cases}=\begin{cases}\lg x, & 0<x\leqslant\dfrac{1}{10}\text{ 或 }x\geqslant 10,\\ (\lg x)^2, & \dfrac{1}{10}<x<10.\end{cases}$$

(2) $g(f(x))=\lg f(x)$,故必须 $f(x)>0$.

当 $|x|\geqslant 1$,即 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1$ 时,$f(x)=x$,显然 $x\leqslant -1$ 时 $\lg x$ 无意义,故
$$g(f(x))=\lg f(x)=\lg x\quad(\text{当 }x\geqslant 1\text{ 时});$$

当 $|x|<1$,即 $-1<x<1$ 时,$f(x)=x^2$,显然 $f(0)=0$ 不符合 $f(x)>0$ 这一要求,故 $x=0$ 不在 $g(f(x))$ 定义域内,故
$$g(f(x))=\lg f(x)=\lg x^2\quad(\text{当 }-1<x<0\text{ 或 }0<x<1\text{ 时}).$$

综上,知

$$g(f(x))=\begin{cases}\lg x, & x\geqslant 1,\\ \lg x^2, & -1<x<0 \text{ 或 } 0<x<1.\end{cases}$$

例 4　指出复合函数 $y=\tan^3\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$是如何复合而成的.

解　函数 $y=\tan^3\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$是由 $y=u^3,u=\tan v,v=w^{-\frac{1}{2}},w=1-x^2$ 复合而成.

例 5　求 $y=f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1-x^2, & x<0\end{cases}$的反函数.

分析　求反函数的一般步骤:(1)从直接函数 $y=f(x)$解出 x 的表达式;(2)对换变量 x,y,即得所求反函数;(3) 直接函数的值域即为反函数的定义域.

解　(1) $x>0$ 时,由 $y=1+x^2$ 得 $x=\sqrt{y-1}$,　$y>1$;

(2) $x=0$ 时,$y=0$,由函数 $y=f(x)$的表达式知 $y=0$ 时 $x=0$;

(3) $x<0$ 时,由 $y=-1-x^2$ 得 $x=-\sqrt{-y-1}$,　$y<-1$.

综上,知 $x=f^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt{y-1}, & y>1;\\ 0, & y=0;\\ -\sqrt{-y-1}, & y<-1,\end{cases}$ 即

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & x>1;\\ 0, & x=0;\\ -\sqrt{-x-1}, & x<-1.\end{cases}$$

例 6　某商场以每件 a 元的价格出售某商品,若顾客一次购买 50 件以上,则超出 50 件的商品以每件 $0.8a$ 元的优惠价出售.(1)试将一次成交的销售收入 R 表示成销售量 x 的函数;(2)若每件商品的进价为 b 元,试写出一次成交的销售利润 L 与销售量 x 之间的函数关系式.

分析　要建立函数关系式,理解题意后设出自变量和因变量,找出变量间的关系,这种关系用解析式或方程表示出来就是所要建立的函数关系式. 本例中,销售单价按不同的销售量而定,故销售收入、销售利润与销售量 x 的关系是分段函数关系. 销售收入 R=销售单价×销售量;销售利润=销售收入-销售商品成本.

解　(1) 由题意知,当 $0\leqslant x\leqslant 50$ 时,销售价为 a 元/件,故

$$R(x)=ax;$$

$x>50$ 时,50 件内售价 a 元/件,其余$(x-50)$件售价 $0.8a$ 元/件,故

$$R(x)=50a+0.8a(x-50)=0.8ax+10a.$$

即

$$R(x)=\begin{cases}ax, & 0\leqslant x\leqslant 50;\\ 0.8ax+10a, & x>50.\end{cases}$$

(2) 易知销售 x 件商品的商品成本为bx 元,故

$$L(x)=R(x)-bx=\begin{cases}ax-bx, & 0\leqslant x\leqslant 50;\\ 0.8ax-bx+10a, & x>50.\end{cases}$$

第二节 极限的概念

一、知识点复习

1. 数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的概念，几个常见的极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0(\alpha>0),\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0),\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0, & |q|<1;\\ \infty, & |q|>1;\\ 1, & q=1;\\ \text{不存在}, & q=-1.\end{cases}$$

2. 函数 $y=f(x)$ 在自变量 x 趋向于有限值 x_0 时极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 及左、右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 的定义.

3. 函数 $y=f(x)$在自变量 x 趋向于∞时极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$的定义.

4. 极限的性质(唯一性、有界性等)，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在的充要条件.

5. 水平渐近线的定义及其求法.

二、重点提示

重点：理解极限概念，知道极限的性质(如唯一性、有界性)，掌握左、右极限的关系.

难点：用定义证明极限.

三、疑点解析

1. 数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 定义中的 N 是不是ε 的函数?

答 N 与正数ε 有关，但却不能说 N 是ε 的函数. 因为对给定的任意小正数ε，若可以找到满足条件的一个正整数 N_0，那么任何一个大于 N_0 的正整数都可作为 N. 这就是说，N 的值依赖于给定的ε 但并不由ε 唯一确定，因此按函数定义知 N 不是ε 的函数.

2. 数列$\{x_n\}$与数列$\{|x_n|\}$的敛散性是否相同?

答 若$\{x_n\}$收敛，$\{|x_n|\}$也收敛，且当$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$. 这是因为$\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有$|x_n-a|<\varepsilon$，从而

$$||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|<\varepsilon.$$

若$\{|x_n|\}$收敛，$\{x_n\}$可能收敛，也可能发散. 如：$\{|(-1)^n|\}$收敛，但$\{(-1)^n\}$发散；而数列$\left\{\left|\frac{1}{n}\right|\right\}$与$\left\{\frac{1}{n}\right\}$都收敛于零.

3. 为什么在函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中要规定$|x-x_0|>0$?

答 极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 就是指自变量 $x\to x_0$ 时，对应的函数值 $f(x)$无限接近于常数

A，函数 $f(x)$ 在 x_0 处是否有定义，有定义时 $f(x_0)$ 等于什么，都不影响 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的变化趋势，所以规定 $|x-x_0|>0$ 就拓宽了研究函数极限的范围.

4. 讨论函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 时，在什么情况下要考虑左、右极限？求左、右极限时是否都得用定义去求？

答 讨论极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，通常要先观察左、右极限的情况. 当左、右两侧变化趋势一致时不必分开讨论；若两侧变化趋势可能有差别时，则应分别考虑左、右极限. 例如，求分段函数在分段点处的极限（特别是分段点两侧函数的表达式不同时），必须研究左、右极限；有些三角函数、反三角函数、指数函数等在特殊点处的左、右极限也不一样，如 $\arctan\dfrac{1}{x}(x\to 0)$，$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(x\to 0)$.

求左、右极限不必都用定义求. 如求 $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，由 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ 知 $\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$；而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$，故 $\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty$. 由于左、右极限不相等，因此 $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

四、典型例题分析与习题详解

例 1 已知数列 $x_n=(-1)^n\dfrac{n+1}{n}$，证明数列 $\{x_n\}$ 是发散的.

分析 证明数列是发散的，通常可采用下列两种方法：(1)找两个极限不相等的子数列；(2)找一个发散的子数列.

证明 考虑子数列 $\{x_{2n}\}$，$\{x_{2n-1}\}$. 由

$$x_{2n}=(-1)^{2n}\frac{2n+1}{2n}=1+\frac{1}{2n}\to 1\quad(n\to\infty),$$

$$x_{2n-1}=(-1)^{2n-1}\frac{2n}{2n-1}=-\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)=-1-\frac{1}{2n-1}\to -1\quad(n\to\infty),$$

可见数列 $\{x_n\}$ 是发散的.

例 2 求曲线 $y=\dfrac{\mathrm{e}^{3-x}}{3-x}$ 的水平渐近线.

分析 求水平渐近线，只要求 $x\to\infty$，$x\to-\infty$ 或 $x\to+\infty$ 时 $y=f(x)$ 的极限.

解 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{3-x}}{3-x}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{3-x}}{3-x}=\infty$ 知，$y=0$ 即为所求的水平渐近线.

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\leqslant 1,\\ x-2, & |x|>1,\end{cases}$ 试讨论 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$.

分析 讨论分段函数在分段点处的极限，通常从左、右极限入手.

解 由题意知

$$f(x)=\begin{cases}x-2, & x<-1;\\ x, & -1\leqslant x\leqslant 1;\\ x-2, & x>1.\end{cases}$$

由 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)=-1$，因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在.

由 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(x-2)=-3$，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}x=-1$，因为 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ 不存在.

例 4 设 $f(x)=\begin{cases}ae^x, & x>0,\\ ax+2, & x<0,\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在，求 $f(-1)$.

解 由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=2$，因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在，所以

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x),$$

可得 $a=2$，从而 $f(-1)=2\times(-1)+2=0$.

第三节　无穷小(大)与极限运算法则

一、知识点复习

1. 无穷小、无穷大的定义及其相互关系.
2. 无穷小与函数极限的关系.
3. 铅直渐近线.
4. 无穷小的运算法则.
5. 极限运算法则(四则运算法则、复合函数运算法则等).

二、重点提示

重点：无穷小的运算法则、极限运算法则.

难点：用定义证明无穷小(大)、化为四则运算形式求极限.

三、疑点解析

1. 能否说无穷小是越来越小的数，而无穷大就是越来越大的数?

答 都不能. 在自变量的某个变化过程中，以零为极限的函数叫作无穷小. 除零(零是可以看作无穷小的唯一的常数)以外，其它无穷小不是任何固定的数，而是变量，所以既不能把无穷小看成越来越小的数，也不能说无穷小是很小的数.

同理，在自变量的某个变化过程中，对应函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大时就称 $y=f(x)$ 是该过程中的无穷大. 它是变量而不是数，也不是很大的数. 如 10^{500} 是很大的常数，不是无穷大. 注意，无穷大是极限不存在的变量，符号 $\lim f(x)=\infty$ 是借用极限的记号，只表示 $f(x)$ 是无穷大.

2. 在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷小，$\dfrac{1}{f(x)}$ 是否一定为无穷大?

答 当 $f(x)$ 为无穷小且 $f(x)$ 不恒为零，$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大；若 $f(x)\equiv0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 无意义，不是无穷大.

3. 函数极限存在时，“有限个函数的和的极限等于极限的和” 这一法则能否说成“函数

的和的极限等于极限的和"?

答　不能,因为这一法则对无限个函数的和求极限不适用. 如

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}$$
$$=0+0+\cdots+0+0=0$$

这一做法是错误的,因为当 $n\to\infty$时,上式是无限项的和求极限,不能用和的极限运算法则. 正确做法是

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$

4. 对$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\arctan x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=0$,运算正确吗?

答　运用极限运算法则 $\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$的前提是$\lim f(x)$和 $\lim g(x)$均存在. 由 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$,知$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在,所以该题不能用积的极限运算法则.

正确的做法是:因$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, $|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$,而无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小,故$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\arctan x=0$.

四、典型例题分析与习题详解

例 1　指出下列函数哪些是无穷小,哪些是无穷大.

(1) $\frac{x}{x^2-9}$　$(x\to3)$;　　(2) $\frac{\sin x}{1+\cos x}$　$(x\to0)$;

(3) $\ln x$　$(x\to1)$;　　(4) $e^{\frac{1}{x}}$　$(x\to0)$.

分析　由定义判定无穷小或无穷大需要判断其极限是零或∞.

解　(1) 因为$\lim\limits_{x\to3}\frac{x}{x^2-9}=\infty$,所以当 $x\to3$ 时,$\frac{x}{x^2-9}$是无穷大.

(2) 因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$,所以当 $x\to0$ 时,$\frac{\sin x}{1+\cos x}$是无穷小.

(3) 因为$\lim\limits_{x\to1}\ln x=0$,所以当 $x\to1$ 时,$\ln x$ 是无穷小.

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=\infty$,所以$\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$不存在,从而 $x\to0$ 时,$e^{\frac{1}{x}}$既不是无穷小,也不是无穷大.

例 2　求曲线 $y=\frac{4}{x^2-2x-3}$的铅直渐近线.

分析　若 $x\to x_0$, $x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0^+$ 时,$y=f(x)$是无穷大,则 $x=x_0$ 为 $y=f(x)$的铅直渐近线.

解　由 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{4}{x^2-2x-3}=\infty$, $\lim\limits_{x\to3}\frac{4}{x^2-2x-3}=\infty$知,$x=-1$, $x=3$ 即为所求的铅直渐近线.

例 3　计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$.

分析 这是$\dfrac{0}{0}$型极限，不能直接利用四则运算法则，故先对分子、分母进行恰当的因式分解，出现相同的零因子，约分后再利用四则运算计算.

解 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{2}{3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{10}(2x-3)^{15}}{(3x-1)^{15}(2x+1)^{10}}$.

分析 这是$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限，不能直接利用四则运算法则，故先将分子、分母同除以分母的最高次幂，然后再计算.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{10}(2x-3)^{15}}{(3x-1)^{15}(2x+1)^{10}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{10}\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^{15}}{\left(3-\dfrac{1}{x}\right)^{15}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{10}}=\dfrac{2^{15}}{3^{15}\cdot2^{10}}=\dfrac{2^5}{3^{15}}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-1})$.

分析 这是$\infty-\infty$型极限，先使其根式有理化，化为$\dfrac{\infty}{\infty}$，再将分子、分母同除以分母的最高次幂后再计算极限.

解
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-1})&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)-(n^2-1)}{\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{n^2-1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{n^2-1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}}=1.\end{aligned}$$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

分析 这是$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限，将分子、分母同除以$\sqrt{x^2}$(注意$x\to-\infty$)，再根据复合函数求极限法则计算. 掌握各种恒等变形的技巧(如有理化、分解因式、通分、分子分母同除以某一因子，等等)是计算此类极限的关键.

解 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}-1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}=\dfrac{2-1}{1}=1$.

例 4 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax+b\right)=3$，求常数$a,b$.

分析 已知极限值，求函数式中待定常数的一般方法是：在极限存在的前提下，找出参数所满足的方程组，求出参数的值. 本题所给极限是$\infty-\infty$型，通分将其转化为$\dfrac{\infty}{\infty}$型，再利

用有理分式当 $x\to\infty$ 时极限的求法，列出 a,b 的方程组.

解　因为

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax+b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1+(-ax+b)(x+1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2+(b-a)x+(b+1)}{x+1}=3,$$

若 $1-a\neq0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2+(b-a)x+(b+1)}{x+1}=\infty$，所以 $\begin{cases}1-a=0,\\ b-a=3,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=1,\\ b=4.\end{cases}$

例 5　证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界，但当 $x\to0^+$ 时，$f(x)$ 不是无穷大.

证明　$\forall M>0$，取 $\dfrac{1}{x_0}=2[M]\pi+\dfrac{\pi}{2}$，显然，$x_0\in(0,1)$，且

$$|f(x_0)|=\left(2[M]\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2[M]\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2[M]\pi+\frac{\pi}{2}>M,$$

所以，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界.

下证 $x\to0^+$ 时，$f(x)$ 不是无穷大. 设 $M_0=1$，$\forall\delta>0$，取 $x_0=\dfrac{1}{\left(\left[\frac{1}{\delta}\right]+1\right)\pi}\in(0,\delta)\subset(0,1)$，则

$$|f(x_0)|=\left(\left[\frac{1}{\delta}\right]+1\right)\pi\sin\left(\left[\frac{1}{\delta}\right]+1\right)\pi=0<M_0=1,$$

所以，$x\to0^+$ 时，$f(x)$ 不是无穷大.

第四节　极限存在准则　两个重要极限

一、知识点复习

1. 夹逼准则：若数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 满足：$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

若在自变量的某个变化过程中，函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 满足：$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim g(x)=\lim h(x)=A$，则 $\lim f(x)=A$.

2. 单调有界数列必有极限：若数列 $\{x_n\}$ 单调增加（减少）有上（下）界，则数列 $\{x_n\}$ 必有极限.

3. 两个重要极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 及其变型形式.

二、重点提示

重点：两个重要极限及其变型形式.

难点：利用极限存在准则证明极限的存在性.