幻方再论

曹 陵 编著

◇◇◇ ○	☆☆☆ ◇◇ ○	☆☆ ◇ ○	☆ ○
☆☆ ○	☆ ◇ ○	◇◇ ○	☆☆☆ ◇◇◇ ○
☆ ◇◇ ○	☆☆ ◇◇◇ ○	☆☆☆ ○	◇ ○
☆☆☆ ◇ ○	○	☆ ◇◇◇ ○	☆☆ ◇◇ ○

对称 互补 和谐 完美

从游戏中吸取知识

在探索里领悟真谛

中国幻方研究者协会主编

香港天马图书有限公司

中国高次幻方发明历史一览表

次　数	幻　方　阶　数	发　明　者	地　　址	发明时间
1	3 阶一次幻方	河图　洛书	中　　国	4000 年以前
2		舒　文　中	广　　西	1975 年
2	8 阶平方幻方	丁　宗　智	江　　苏	1989 年
2	9 阶平方幻方	刘　志　雄	辽　　宁	1990 年
2	16 阶平方幻方	孙　　友	西　　安	1991 年
2	广义 18 阶完美平方幻方	苏　茂　挺	福　　建	2002 年
1 次和积	8 阶双重幻方	梁　培　基	河　　南	1989 年
1 次和积	9 阶双重幻方	孙　　友	西　　安	1991 年
1 次和积	128 阶双重幻方	鲁　思　顺	山　　东	1999 年
1 次和积	144 阶双重幻方	孙　　友	西　　安	1991 年
2 次与积	128 阶平方双重幻方	郭　先　强	江　　苏	1999 年
3	12 阶三次幻方	高治源　潘凤雄	延安　西藏	2002 年
3	接近的 16 阶三次幻方	王　忠　汉	安　　徽	2000 年
3	广义 16 阶三次幻方	郭先强　李　文　苏茂挺		2002 年
3	32 阶三次幻方	苏茂挺　施　学良　钱剑平		1993 年
3	32 阶三次幻方	俞　润　汝	上　　海	1997 年
3	32 阶三次幻方	刘　　霞	安　　徽	1998 年
3	64 阶三次幻方	施　学　良	贵　　州	1993 年
3	64 阶三次幻方	钱　剑　平	江　　苏	1996 年
3	64 阶三次幻方	王　忠　汉	安　　徽	1999 年
3	81 阶三次幻方	施　学　良	贵　　州	1993 年
3	81 阶三次幻方	李　　文	四　　川	2003 年
4	256 阶四次幻方	吴硕辛　高治源	北京　延安	2002 年 3 月
5	36 阶五次广义幻方	郭　先　强	江　　苏	2002 年 6 月
5	729 阶五次幻方	李　文　郭先强	四川　江苏	2003 年 5 月
5	1024 阶五次幻方	吴硕辛　郭先强　潘凤雏　李　文		1992–2003 年
6	4096 阶六次幻方	潘　凤　雏	西　　藏	2003 年 6 月
7	65536 阶七次幻方	潘　凤　雏	西　　藏	2003 年 7 月

更高高次幻方的理论研究：吴硕辛的 mi(q) 语言，郭先强的矩阵理论，潘凤雏的幻群映射理论，李文的高次幻方公式，都可构造出高次幻方。

羊年致辞

2002年是万马奔腾、成果迭出的一年，有六件大事值得庆贺，留下文字永久记忆。

其一。我们发现了《魔环》，它是一门新的学科、是组合数学的又一分支。魔环问世将会引起深远的社会影响。发现它的是三位普通的数学工作者：昆明理工大学杨高石教授、孝感工业学校曹陵老师与我。我编写并出版了《有趣的魔环》与《幼儿启蒙探讨》两书，这就为推动魔环游戏的广泛开展准备了最佳环境。

其二。小“神童”杨弋、他是随我第一位学会《幻方》的小朋友、现在安师大附中一年级10班。他是2002年芜湖市小学升初中的“状元”，并在这年11月的第八届全国计算机分区联赛普及组中，以满分的成绩获全国一等奖。

其三、安师大幼儿园大2班的寇明阳登上了魔环舞台，他的加减乘除运算己经过关，是第一位研究《魔环》的小朋友。我们的王绎皓，中4班，与之伴读，我正在为他俩做进一步培育、加工。兼有《魔环》与《幻方》的寇明阳将可望创下更加出色的成绩。寇明阳的出现，使我得出了一个大胆的判断：在幼儿园阶段，完成加减乘除综合运算的训练是完全可能的。我又让王绎皓努力及实验，如果在一年半的时间内她能完成这套训练，那就意味着，我们的这一套开发智力方案具有普遍的意义。

其四。安徽师范大学教育技术系2000级杨富宝同学的出现，他编写电脑程序，促成了《100万之内素数表》的问世，为素数幻方的研究提供了良好条件。

其五、睢宁蔡宜文先生登台是一颗耀眼的幻方新星，他在马年的2月15日到12月6日，连过十一关，以惊人的速度创下了一大批新的连续素数幻方记录，这就是11阶，16、20、24、28、30、32。36、38、42各阶及54阶连续素数幻方。

其六、孝感工业学校曹陵于2002年5月4日，撰写了当阶数n为素数时，对角线上五次与四次等幂和数组同生共存的理论探讨；并于12月8日给出了47阶以下的全部素数阶高优幻方，完成了素数高优的实践。时不几天，曹陵寄来了16、20阶高优与19阶极优幻方，12月23日他制作出25、49阶高优幻方，我看作 $(2m+1)^2$ 阶家族派来的代表，使特优完美幻方的内容更加充实。马年的六大盛事，其乐融融！

将有两本新书在羊年亮相。一本是《素数幻方》，由天门张道鑫先生编写。张道鑫是长期从事行政、技术管理的农机工作者，他为素数研究给出了一整套绝妙的设计，其《素数幻方》是一只会下“金蛋”的鸡，第一批“金蛋”就是蔡宜文先生的一大批连续素数幻方，相形益彰，这使《素数幻方》一书大放异彩。

另一本是曹陵编撰的《幻方再论》。曹陵先生，祖籍湖北应山，生于南京，长在溧水，现任孝感工业学校教师。他在特优完美幻方的理论与实践上都取得重要突破。其《幻方再论》是幻方制作的一套系统理论总结，将对幻方研究产生深远的影响。

马年为我们推动《魔环》与《幻方》知识的普及提供了绝好的条件，这两本新书的发行，将有助于形成一个更加可喜的局面：羊年吉祥，喜气洋洋。

中国幻方协会秘书长　王　忠　汉

马年除夕　书於安徽师范大学凤凰山麓

目

基础论述

第一讲 幻方制作中的走与飞……1
附录 马步幻方制作的VB程序……16
第二讲 幻方的拉丁合成法……17
第三讲 幻方的模块合成法……34
上：幻方的克罗内克尔乘积……34
下：单模双倍制作法……42
第四讲 幻方的对调制作法……55
上：幻方的穿心对调法……55
下：幻方的块对调法……62
第五讲 幻方的数步法制作……79

轶篇散记

第一章 数步法与跳格步法的统一……106
第二章 马步雪花特优幻方的制作……113
第三章 均匀对称块与斜线平移……117
第四章 阶和平分与特优对称码的制作……123
第五章 高次特优序码的探讨……128
第六章 用共轭对称法制作高优幻方……136

幻方花絮

1. 4M阶高优完美幻方欣赏……149
2. 幻方的制作与进化过程……150
3. 趣味盎然的少儿游戏……151
4. 致《泰山顶上一青松》—方俊玲女士……153

佳作选录

1. 13阶4次特优完美幻方……157
2. 16阶7次特优完美幻方……157
3. 64阶9次特优完美幻方……158
4. 65阶9次特优完美幻方……166
5. 浅谈同心幻方的构造及其规律……174

第一讲　幻方制作中的走与飞

摘要：幻方从大禹治水的远古走到今天，流传海外；多少贤哲智者为之倾倒，不断探索，而今百花盛开，群星璀灿！我们先从最简单有效的马步法入手，试作理论性的论述与探讨，使之系统化而出新，迎接跨世纪的飞跃。

一、从古老游戏走向数学理论

幻方是一项古老的数学游戏，她伴随着人类文明而出现，闪烁着玄妙的智慧灵光。古今中外，多少学子、爱好者为之倾倒而不懈地探讨，才有今天幻方园中，草木丰盛，奇花争艳！丁宝训老先生五十余年锲而不舍，要使《人人学会编幻方》；高源先生在延安宝塔山上高擎大旗，向人们揭示《奇妙的幻方》；王忠汉先生年届古稀，不辞劳累、奔波呼号在镜湖之畔，播育良种，一心要在中华大地上，开辟出一个接一个《龙的摇篮》，……科学需要她的开路人，知识只锺情她的痴迷者，我深深钦佩他们可贵的执着，为他们难得的成果而欢呼！正是这些，在茫茫商海的迷蒙中坚持着一丝亮丽，为新世纪的到来，为沉睡千年的古老大陆增添了一线科技曙光。

我有幸加入中国幻方协会，游览学习诸位师长、前辈的大作。时方数年，获益非浅，有一些见解和探索拿出与同仁共赏。再论幻方，所谓“再”，是在以往著作论述之外多加探讨，已经成熟详细的部分，不提或一掠而过。所谓“论”，一是将幻方研究规范化、条理化，科学化，尽可能让一些幻方制作写出定理和公式，给予证明，最终形成独特完整的理论体系。二是这可能引起许多学术上的争论，……

例如：洛书出自陕西的洛河还是河南的洛水？据我所知，洛水是指发源在西岳华山南麓之洛源，地近蓝田；经洛南、卢氏到洛宁，再过宜阳在洛阳龙门与伊水汇合，入黄河。洛水不大，但流经中原宝地，傍嵩山禹域，是夏商文明所在，所以名气极盛。好像大禹治水时最西也仅到三门峡，再上晋陕峡谷已无必要！直到春秋之际仍将秦陇视同西戎之地。又是一个南阳与襄阳之争论，作为幻方爱好者，当然有必要追根寻源，但也许还要请教历史学家和考古学家等高人。

再者，以前编制幻方只用一纸一笔，最好是珠算高手，可能还要知道一些秘技绝窍。现在进入了电脑时代，我关心的是作法之规律，理论之正确；将各种幻方作法先编成 VB 程序，让电脑去计算验证，在屏幕上显示幻方，成功则自动记录。这样，简单的操作代替复杂的计算，苦苦思索、一旦成功的乐趣没有了？看到的只是快速、大批量的机械化生产！是进步还是退化？大量幻方的制作与测试，高阶多数值的求和，记录，……，要在短期内完成而不错误百出，如果没有电脑的运用，简直是不可想象的？采用了方阵、数组等知识，引入整除和取模运算，对深入研究和科普推广是有益的，但少年儿童一时能接受吗？如何用最通俗的语言来叙述。

幻方的公式及计算在诸位前辈大家的著作中或多或少都有所出现，舒文中老先生在名作《幻方》内，‘阐述了……作法，并从数学理论上予以论证。……以期读者从中获得启发，提高逻辑推理能力。’使国外数学界为之折服！开辟了良好先河。虽然

有些幻方名家如丁宗智老先生为了在社会上易于普及推广，编写大作时‘不用一个符号一个公式，只是简单明白地说明幻方的构造规律’。刘缉熙在其《奇妙的幻方》中‘热诚期待，至于理论论证问题，作者坚信自有后来人’。孙友先生在其《幻方专缉》中‘将函数引多种不同命题幻方的研究和构造，作为趣味数学的一部分，它对于训练思维和提高学习数学的兴趣也是非常有益的。’

吴硕辛、苏茂铤等先生在当今幻方论文中采用了高深艰难的数学理论与推理，这肯定不是一般大学生可以看得懂的，我取其严谨治学态度与浅显部分。丁伟明、郭先强、李文等诸多幻方高手在电脑的辅助下，佳作迭出，精彩异常！百家争鸣后才会有百花齐放，最可怕的是对钱权以外的学术冷漠与茫然一片。所以我先将摸索写出来，让大家观赏、讨论，相信她终究会成为一套完美、和谐的幻方理论。

1、方阵与数组

定义 1-1：由 n^2 个数构成的 n 个横行、n 个竖列的正方形数表，称作 n 阶方阵，记为 A(i, j)（$1\leqslant i,\ j\leqslant n$）。其中 n^2 个数 A(i, j) 叫做方阵的元素，简称为项。

在不致于混淆时，我们将方阵 A 与其中某一项都记作 A(i, j)；它们区别是前者 i, j 是自变量，而后者中 i, j 是一对固定值。

在 n 阶方阵 A 中，由 A(1,1)到 A(n,n)联成的直线称为方阵 A 的主对角线，由 A(1,n)到 A(n,1)联成的直线称为方阵 A 的副对角线。

n 阶方阵 A 中的各项总与它所在位置的行标，列标相对应，因此也可以把方阵 A 看成一个以自然数 i, j($1\leq i$，$j\leq n$)为下标的 n 阶二维数组 A(i, j)。

如果一个方阵 A 的通项 A(i, j)与下标 i, j 之间的函数关系能用解析式来表示，那么这个解析式就称为方阵 A 的通项公式。一个方阵，如果已知它的通项公式，那么运用求函数值的方法很容易求得出这个方阵内的每一项。

2、自然方阵及整除、取模运算

定义 1-2：以方阵行、列顺序依次排入自然数 1 到 n×n，得到的是 n 阶自然方阵 Ne。如果其中有 Ne(i, j) = z，则称 i, j 是自然数 z 在 n 阶方阵中的自然下标。

幻方一般都是在自然数集 N 内研究的，因此有两种最常用的运算：整除与取模运算，希望幻方制作者务必理解，并能熟练掌握运用。

整除与一般除法相似但更简单，整除只取相除所得结果的整数部分，“\” 表示整除运算，例如：17 \ 7 = 2。取模运算符号 mod 用来求余数，其结果为第一数整除第二数所得的余数，如：17 mod 7=3，其中 7 称为模数。在 n 阶方阵中，经常以阶数 n 为模，计算下标时，应将下标为 0 或为 n 视作同一件事，但最终结果要把下标为 0 的换成等价的 n ，即让余数是从 1 到 n 之间的自然数。

例 1：请看图一1，以方阵行、列顺序依次排入自然数 1 到 36，得到的是一个 6 阶自然方阵 Ne。容易得出 Ne 的通项公式是：

Ne(i,j)=n(i-1)+j .　　Ne(5,3)=6×(5-1)+3=6×4+3=27 .

在 n 阶方阵中，求整数 z（ $0<z\leqslant n^2$ ）的自然下标，

有 i=(z+n-1)\n， j=z mod n ，即有 Ne(i, j)=z .

初学者必须注意，阶数 n 是一个对方阵有决定性的参数，不明确阶数 n，方阵的其它研究和计算都是毫无意义的，甚至会引出诸多荒谬，坠入迷雾而不可自拔！

6 阶自然方阵 Ne

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

图一1

3、幻方及幻和

定义 1-3：用 1 到 n^2 的 n^2 个自然数组成一个 n 阶方阵，使得每一行、每一列及两条对角线上 n 项之和都是相等的，这个方阵则称为 n 阶标准幻方，简称幻方。

根据等差数列公式可知，从 1 到 n^2，这 n^2 个自然数总和是 $n^2(n^2+1)/2$，那么很容易知道：n 阶幻方的每一行、列、对角线上 n 项之和都是 $n(n^2+1)/2$，这个数是 n 阶幻方最重要的数据，称作幻和 S_n，即 n 阶幻和 $S_n=n(n^2+1)/2$。

我们可以把幻方看作适合某个特定条件，n^2 个自然数的二维排列。方阵中平行于两对角线的所有斜线，如图 1－1：6 阶自然方阵 Ne 中，斜线 2+9+16+23+30+31 与斜线 3+8+13+24+24+29+34 等是由于方阵的局限，而被折断成两段的对角线，我们将它们连同主、副对角线统称为泛对角线，n 阶方阵应该有 2n 条泛对角线。

（注：以上斜线中的＋号，既有相加的性能　又有连接的意义。）

如果一个 n 阶幻方的所有泛对角线上的 n 项之和都等于幻和 S_n，那么我们就称其为一个完美幻方。这时对角线与行、列的地位才真正平等，达到完美的地步。

二、走与飞的游戏规则

1、斜走、小飞及大飞

世如棋局，变幻无穷！未填数字的方阵如同一张空棋盘，更恰切说是象一张国际象棋的棋盘。以数字为棋，以方阵为盘，可以演示出许多奇妙的幻方。蹦蹦跳跳，自在逍遥，最要紧的是起点和跳法规则。在起点方格内填入 1，跳出一步，在下一方格中填入 2，再跳一步，填入 3，……，按照这个法则，连续跳跃，最终将这个幻方棋盘填满，恰巧的话，我们填写的结果得到一个幻方！如何跳法？这是最为关键的，明显可见，沿着行、列方向，即横向或纵向跳跃是无效的，只可能是斜着跳。根据斜跳的规律，我们将其跳法粗分成下面四个类型。

参阅图 1－2：（1）斜跳入相邻的方格内，旧称为士步，更恰切是国际象棋中的王步，我们且称其为走；（2）跳入下一行，再横向跨两格，这就是大名鼎鼎的马步，多有奇效！为了更广泛地研究，借用围棋的术语称其为小飞，据横向跨格数 q，称作小飞 q；（3）向下跳两行，再横向跨 q 格，这就是大飞 q 的飞法。（4）向下跳三行，再横向跨 q 格，这已经超越大飞，就称作超飞 q 吧！

图1-2:		0		2	3	4	5	6	7
向下		O	□	□	□	□	□	□	□
小飞	一行	×	×	A	B	□	D	□	□
大飞	二行	×	×	×	C	□	□	□	E
超飞	三行	×	×	×	×	F	□	G	□

如图：由O格为起点跳跃，到A格是小飞2，到B是小飞3，到D格是小飞5；到C是大飞3，到F格是超飞4，到G格为超飞6，……

2、加减平移复位法

按照某个规则走与飞，很容易跳到 n 阶方阵的界外，这时就需要运用加减平移复位法，使数字棋子重返回 n 阶方阵界内，简称复位。当行标小于 1 时，我们在此行标上加个 n，记作 i=i+n ；当行标大于 n 时，我们在此行标上减去 n，记作 i=i-n。列标有类似情况也如此办理，相应的 VB 程序是：

```
If j<1 then j=j+n ;    或 If j>n then j=j-n  .
```

3、转向数后的跳格——转向步

在制作 n 阶幻方的大、小飞过程中，n 的倍数称作转向数；飞到该数后，停顿一下，向左平移一格作为一步，即 j=j－1，这是一个跳格动作，称为转向步，然后继续再飞。复位法的实质是取模运算，让行标与列标在 1 到 n 之间活动，转向步的理由也许更加必要与奥妙？幻方制作者必须正确、娴熟地掌握转向步规则与加减平移复位法，才能灵活自在、好梦成真！

三、走出一个标准幻方

1、斜排自然方阵易位法

图 1－3：用杨辉自然斜排易位法制作的 7 阶幻方如下（左边为作法，左侧是行标，下方为列标）

－2							1						
－1						2		8					
0					3		9		15				
1				4		10		16		22			
2			5		11		17		23		29		
3		6		12		18		24		30		36	
4	7		13		19		25		31		37		43
5		14		20		26		32		38		44	
6			21		27		33		39		45		
7				28		34		40		46			
8					35		41		47				
9						42		48					
10							49						
j	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

4	35	10	41	16	47	22
29	11	42	17	48	23	5
12	36	18	49	24	6	30
37	19	43	25	7	31	13
20	44	26	1	32	14	38
45	27	2	33	8	39	21
28	3	34	9	40	15	46

斜排自然方阵易位法是我国古代数学家杨辉发明的，这是中国人在幻方上的骄傲，如图 1－3 是 7 阶幻方杨辉法的制作。在 n 阶幻方的制作中，常用到参数 a，a=n\2。把 n 阶幻方向上、向下扩展 a 行，向左、向右扩展 a 列；以 M(1-a,1+a)格为起点，向左下斜走，即 i=i+1，j=j－1；在转向数后换行继续斜走，直到填完 n^2。然后按照加减平移复位法，让幻方界外的数字返回到界内的空格中，例如：在图 1－3 内，∵M(-2,4)=1，∴M(5,4)=1；∵M(3,9)=36，∴M(3,2)=36。最后检验幻方中各行、列及两对角线上 n 项之和都等于幻和 S_n 无误，则大功告成。

2、奇偶分填易位法

奇偶分填易位法的起点在 M(1,1+p)，即首行中列方格内填入 1，参阅图 1－4，

								1					
							19	11	3				
						37	29	21	13	5			
					55	47	39	31	23	15	7		
				73	65	57	49	41	33	25	17	9	
			10	2	75	67	59	51	43	35	27		
		28	20	12	4	77	69	61	53	45			
	46	38	30	22	14	6	79	71	63				
64	56	48	40	32	24	16	8	81					
74	66	58	50	42	34	26	18						
	76	68	60	52	44	36							
		78	70	62	54								
			80	72									
-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	j

42	34	26	18	1	74	66	58	50
52	44	36	19	11	3	76	68	60
62	54	37	29	21	13	5	78	70
72	55	47	39	31	23	15	7	80
73	65	57	49	41	33	25	17	9
2	75	67	59	51	43	35	27	10
12	4	77	69	61	53	45	28	20
22	14	6	79	71	63	46	38	30
32	24	16	8	81	64	56	48	40

图 1－4：用奇偶分填易位法制作的 9 阶幻方如下（左边为作法，幻和为 369）

是 9 阶幻方的制作，填完后按照加减平移复位法，将左下方界外的分为三块复位。

经检验确实得到一个标准的 n 阶幻方。此法作出的幻方特征是偶数全都分布在四个角上，而奇数斜排在连接四边中点的正方形内，单调还是有趣？

图 1—5：6 阶幻方如下：从 1 填到 36，它的每一行、每一列及两对角线上数之和都是：111

36	1	19					13	7	35
	33	2	20			14	8	34	
		32	3	21	15	9	31		
		29	4	22	16	10	30		
	28	5	23			17	11	27	
25	6	24					18	12	26

19	36	1	7	35	13
2	20	33	34	14	8
32	3	21	15	9	31
29	4	22	16	10	30
5	23	28	27	17	11
24	25	6	12	26	18

图 1—6：8 阶幻方如下：从 1 填到 64，它的每一行、每一列及两对角线上数之和都是：260

			57	56	25	24	48	33	16	1			
		58		26	55	47	23	15	34		2		
	59		27		46	54	14	22		35		3	
60		28		45		13	53		21		36		4
61		29		44		12	52		20		37		5
	62		30		43	51	11	19		38		6	
		63		31	50	42	18	10	39		7		
			64	49	32	17	41	40	9	8			

57	56	25	24	48	33	16	1
2	26	55	47	23	15	34	58
27	3	46	54	14	22	59	35
36	45	4	13	53	60	21	28
37	44	5	12	52	61	20	29
30	6	43	51	11	19	62	38
7	31	50	42	18	10	39	63
64	49	32	17	41	40	9	8

自宋代数学家杨辉之后，漫长的封建王朝阻碍了科学技术的正常发展，数学止步不前。广西舒文中老先生在极其艰难的环境下，潜心研究幻方几十年，搜集大量资料、手稿，创造了双偶数阶的环形作法，见图 1—6；及单偶数阶的双曲线作法，见图 1—5，走法精妙，令人拍案叫绝！文革后，舒老出版了新中国第一本幻方专集，惊动日美幻方数学界，为国争光，成一时盛事。

四、飞出一个素数阶的完美幻方

1、一马奔驰，纵横天下！幻方的大、小飞作法

所有幻方研究者都对马步的奇妙与功效赞叹不已。我选择首行第二格，即 M(1,2) 为起点，感觉当起点处 i+j 为奇数时效果较好；向右下方跳跃，与行标 i 和列标 j 增加同方向，便于掌握和计算。因为马步即小飞 2 论述已多，我就举小飞 3 为例说明制作方法。参阅图 1—7：用小飞 3 法制出 11 阶幻方最下方排出列标 j，便于初学者将界外数字迅速平移复位。

图 1－7：用小飞 3 法制作的 11 阶幻方并作法如下，幻和为 671，它是一个 11 阶完美幻方！

	13	1	121	109	97	85	73	61	49	37	25			
	50	38	26	14	2	111	110	98	86	74	62	50	38	26
	87	75	63	51	39	27	15	3	112	100	99	87	75	63
	113	101	89	88	76	64	52	40	28	16	4	113	101	
	29	17	5	114	102	90	78	77	65	53	41	29	17	5
67	66	54	42	30	18	6	115	103	91	79	67	66	54	42
	92	80	68	56	55	43	31	19	7	116	104	92	80	68
	8	117	105	93	81	69	57	45	44	32	20	8	117	105
	34	33	21	9	118	106	94	82	70	58	46		33	21
	71	59	47	35	23	22	10	119	107	95	83	71	59	47
	108	96	84	72	60	48	36	24	12	11	120	108	96	84
				109	97	85	73	61	49	37	25	13		121
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14 j

又用大飞 4 法即双马步制出 13 阶幻方，参阅图 1－8，方框内是最终所求的幻方。其它大、小飞法也仿此类似跳跃，牢记遇转向数后，停顿一下，向左平移一步，作为转向步，然后继续再飞。

图 1－8：用大飞 4 法制作的 13 阶幻方并作法如下，幻和为 1105，它是一个 13 阶完美幻方！

	15	1	169	155	141	127	113	99	85	71	57	43	29				
	50	36	22	8	163	149	135	121	107	93	79	78	64				
	72	58	44	30	16	2	157	156	142	128	114	100	86	72	58	44	30
	94	80	66	65	51	37	23	9	164	150	136	122	108	94	80		65
	129	115	101	87	73	59	45	31	17	3	158	144	143	129	115	101	87
	151	137	123	109	95	81	67	53	52	38	24	10	165	151	137	123	109
	4	159	145	131	130	116	102	88	74	60	46	32	18	4	159	145	
40	39	25	11	166	152	138	124	110	96	82	68	54	40	39	25	11	166
	61	47	33	19	5	160	146	132	118	117	103	89	75	61	47	33	19
	83	69	55	41	27	26	12	167	153	139	125	111	97	83	69	55	41
	105	104	90	76	62	48	34	20	6	161	147	133	119		104	90	76
	140	126	112	98	84	70	56	42	28	14	13	168	154	140	126	112	98
	162	148	134	120	106	92	91	77	63	49	35	21	7	162	148	134	120
					141	127	113	99	85	71	57	43	29	15		169	155
					163	149	135	121	107	93		78	64	50	36	22	8
j 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

2、大、小飞 q 法制作 n 阶幻方的有关计算公式

我们以 M(i, j) 为起点，当跳到方格 M(i+x, j+y) 时填入自然数 z $(1<z\leqslant n^2)$，则有转向次数 $s=(z-1)\backslash n$，转向步在 z 为 n 的倍数后发生，故要 z-1 再求转向次数 s；这时行标的增量 $x=z-s-1$，列标的增量 $y=q(z-s-1)-u$；

此方格的实际行标 $i=(i+x) \bmod n$，列标 $j=(j+y) \bmod n$。

例 2　以 M(1,2) 为起点用小飞 3 法制出 11 阶幻方，问数 47 填在哪个方格中？

解　在 11 阶幻方中，有转向数 $u=47\backslash 11=4$，行标增量 $x=47-4-1=42$，

列标增量 $y=3(47-4-1)-4=3\times 42-4=122$；实际行标 $i=43 \bmod 11=10$，

列标 $j=124 \bmod 11=3$，即 47 填在方格 M(10,3) 中，查阅图 1－7 计算正确。

当大飞 q 法制作 n 阶幻方时，计算公式中的行标增量改为 2x，其余都相同。

例3　以 M(4,7) 为起点用大飞 5 法制出 19 阶幻方，问数 264 应填在哪个方格中？

解　在 19 阶幻方中，有转向数 $u=264\backslash 19=13$，

行标增量 $2x=2(264-13-1)=2\times 250=500$，

列标增量 $y=5(264-13-1)-13=5\times 250-13=1250-13=1237$；

实际行标 i=（4＋500）mod 19＝504 mod 19＝10，

实际列标 j=（7＋1237）mod 19＝1244 mod 19＝9，即 M(10,9)＝264（由电脑应证无误）。

五、　幻方坐标系的建立

1、模仿平面直角坐标系，建立了幻方坐标系

大、小飞在类似国际象棋的方格盘里运动作出了幻方，为了便于理解和计算，我们模仿笛卡尔的平面直角坐标系，建立了幻方坐标系，参阅图 1－9：

①把直角坐标系 XOY 顺时针旋转 90 度，将 X 轴写成向下的 i 轴即行轴，让 Y 轴换成向右的 j 轴即列轴。在 I 象限内，从第一行向下数到第 n 行，从第一列向右数到第 n 列，正好放置一个 n 阶方阵，是我们研究的主要部分，称作一个**图形**。

②除了第一象限为实以外，另三个象限皆是虚，n 行 n 列图形方框之外是 n 阶方阵研究和计算的辅助部分。

③XOY 直角坐标系将平面上的点 P 与一个实数对(x, y)建立了一一对应关系，而在幻方坐标系内，平面上 i 行 j 列的方格（位置）有唯一的二维数组 C(i, j)与之对应，尽可以把它看作成一个能放置数字的空篮筐。

④直角坐标系是在实数域 R 内研究的，而幻方坐标系仅限使用于整数集 Z 中。

⑤在直角坐标系中，X 轴和 Y 轴相交于原点 0，画在四个象限中的曲线可能会有中心对称及轴对称。而在幻方坐标系内，i 轴与 j 轴相交于首行首格，即 M(1,1)格中，II、III、Ⅳ象限内的图形与 I 象限内的图形成位似对称，可以进行不变方向大小、不破坏以一个图形为单位整体的平移。

表1－1：幻方飞法的计算公式

在n阶方阵中，以M(i,j)为起点,整数z的位置			
有转向次数u=z\n		x=z-u-1	
		y=q(z-u-1)-u	
跳跃方向	下标	小飞q	大飞q
↘	行标i.	(i+x) mod n	(i+2x) mod n
	列标j	(j+y) mod n	
↗	行标i.	(i-x) mod n	(i-2x) mod n
	列标j	(j+y) mod n	
↖	行标i.	(i-x) mod n	(i-2x) mod n
	列标j	(j-y) mod n	
↙	行标i.	(i+x) mod n	(i+2x) mod n
	列标j	(j-y) mod n	

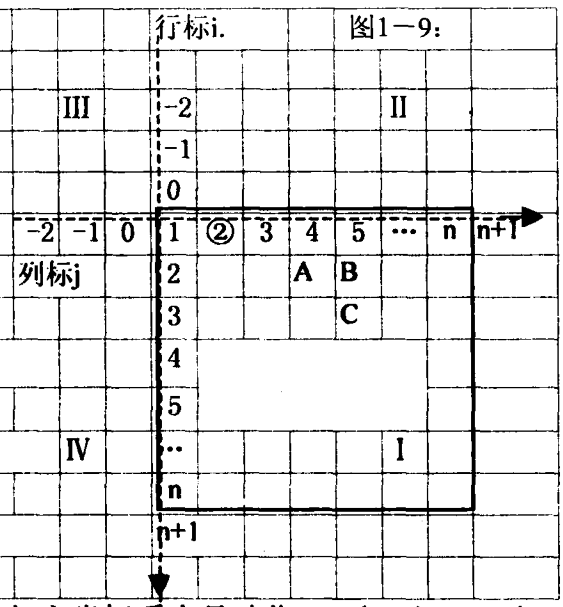

图1－9:

⑥在直角坐标系中有平面向量，类似的在幻方坐标系内是动作 α = (p, q)。α = (p, q)既表示一个方向，更确切说明一个跳跃动作：从始跳格 $C(x_1, y_1)$跳到终点格 $C(x_2, y_2)$，有 $p= x_2-x_1$，$q= y_2-y_1$。即从某一格向下 p 行，再向右 q 列，完成动作(p, q)。

马步 α =(p, q)和转向步 β ＝(u, v)是使用最多的动作，务必滚瓜烂熟，对于转向步 β，u＝0 时是横向跳格，v＝0 时是纵向跳格。

幻方坐标系可能对矩阵中的运动研究也有作用，并可顺利拓展到三维空间里，对

空间的立方格及动作做出相应的定义。

2、跳跃方向及相应的计算公式

将大、小飞放在幻方坐标系内，明显可见跳跃方向的不同，仅是影响行标增量 x、列标增量 y 的正负。如同直角坐标系内的矢量，可以将起点平移到原点一样；我们可以想象跳跃起点在 M(1,1) 格中，跳进哪个象限，行、列增量前面的符号正好与该象限 i,j 的符号相同，这是记忆计算公式的一个方法。请细阅表 1－1：

3、n 阶方阵在幻方坐标系中的平移

①前面所述的加减平移复位法是将某一项从幻方坐标系的辅助部分平移到主要部分的对应位置上，而我们现在论述的是一个图形（n 阶方阵的所有项）整体在幻方坐标系中的平移。任何一个平移总可以看作一个纵向平移与一个横向平移的合成；我们着重以纵向平移为例讨论。

②将一个图形向下平移 t 行，当 t 是 n 的整数倍时，是不改变图形大小、方向的位拟平移，这情况非常简单，不再多叙。当 $1\leqslant t\leqslant n$ 时，把这个平移过程写成：

$z=M(i,j) \rightarrow C(i+t,j)=z,\ 1\leqslant i,j\leqslant n$ 。

$z=M(i,j)$ 表示数字 z 原在方阵 M 的 i 行 j 列格中，$C(i+t,j)=z$ 表示再把数字 z 移入方阵 C 的 i+t 行 j 列的空格内，为了平移过程更加清楚明白，我们设立了 n 阶方阵 C 作为平移的结果；$1\leqslant i,j\leqslant n$ 表明以上动作遍及方阵 M 的所有项。

根据下标对的取模运算，可知 n 阶方阵 M 的最下方的 t 行将依次平移成 n 阶方阵 C 上方的到 t 行；仿佛将 n 阶方阵 M 的第 n 行与第一行粘贴成一个圆筒面，向下平移 t 行即让这个圆筒面绕轴正向旋转 t 格，故称此为循环平移。

横向平移可以类似讨论，其过程为：$z=M(i,j) \rightarrow C(i,j+s)=z,\ 1\leqslant i,j\leqslant n$ 。

图1—10：用小飞4作出的21阶幻方，供同仁赏阅。

116	1	348	233	139	24	371	256	162	47	394	279	185	70	417	302	208	93	440	325	231
138	23	370	255	161	46	393	278	184	69	416	301	207	92	439	324	230	115	21	347	232
160	45	392	277	183	68	415	300	206	91	438	323	229	114	20	346	252	137	22	369	254
182	67	414	299	205	90	437	322	228	113	19	345	251	136	42	368	253	159	44	391	276
204	89	436	321	227	112	18	344	250	135	41	367	273	158	43	390	275	181	66	413	298
226	111	17	343	249	134	40	366	272	157	63	389	274	180	65	412	297	203	88	435	320
248	133	39	365	271	156	62	388	294	179	64	411	296	202	87	434	319	225	110	16	342
270	155	61	387	293	178	84	410	295	201	86	433	318	224	109	15	341	247	132	38	364
292	177	83	409	315	200	85	432	317	223	108	14	340	246	131	37	363	269	154	60	386
314	199	105	431	316	222	107	13	339	245	130	36	362	268	153	59	385	291	176	82	408
336	221	106	12	338	244	129	35	361	267	152	58	384	290	175	81	407	313	198	104	430
337	243	128	34	360	266	151	57	383	289	174	80	406	312	197	103	429	335	220	126	11
359	265	150	56	382	288	173	79	405	311	196	102	428	334	219	125	10	357	242	127	33
381	287	172	78	404	310	195	101	427	333	218	124	9	356	241	147	32	358	264	149	55
403	309	194	100	426	332	217	123	8	355	240	146	31	378	263	148	54	380	286	171	77
425	331	216	122	7	354	239	145	30	377	262	168	53	379	285	170	76	402	308	193	99
6	353	238	144	29	376	261	167	52	399	284	169	75	401	307	192	98	424	330	215	121
28	375	260	166	51	398	283	189	74	400	306	191	97	423	329	214	120	5	352	237	143
50	397	282	188	73	420	305	190	96	422	328	213	119	4	351	236	142	27	374	259	165
72	419	304	210	95	421	327	212	118	3	350	235	141	26	373	258	164	49	396	281	187
94	441	326	211	117	2	349	234	140	25	372	257	163	48	395	280	186	71	418	303	209

使用马步 α=(-1,4)，转向步 β=(1,0) 作出的 21 阶标准幻方，幻和为 4641。

③明显可见，行（列）的循环平移后原在同一行（列）的 n 项仍旧位于同一行（列）

上，而两对角线上的 n 项都会有所改变！所以一个幻方经过循环平移后，其行、列上幻和仍可保持，但主、副对角线上的 n 项之和就要另外再计算了。

$z=M(i,j) \rightarrow C(i+t,j)=z \rightarrow D(i+t,j+s)=z,\ 1\leqslant i,j\leqslant n$ 。表示将 n 阶方阵 M 的每一项都向下平移 t 行、再向右平移 s 列，n 阶方阵 D 是循环平移的最终结果，当然它也遵循以上循环平移的重要性质。

六、各种大、小飞法结果的探索

1、合奇数阶幻方的制作可能

我将大小飞分别编成 VB 过程，改变参数 q，由电脑飞速去运行，结果经检验是否幻方，完美否？对于大于 7 的素数 n，各种大小飞法都可以制得一个 n 阶完美幻方。而对于 n 是奇合数时，结果就复杂多了！或有一定的规律蕴涵其中，特将 100 以内奇合数阶幻方制作结果列表 1—2 如下，供幻方爱好者及数学同仁参考。

表1-2：合奇数阶幻方的走与飞可能性														在C(1，2)格起步效果最好
幻方	斜排易位		小飞（马步）						大飞（十马步）					1、结果与注释
阶数	杨辉法	分奇偶	2	3	4	5	6	7	3	4	5	6	7	☆：完美幻方
5	□	□	☆	□	×	×	×	×	□	×	×	×	×	□：成幻方
7	□	□	☆	☆	☆	-1	×	×	☆	-1	-1	×	×	×：不成功 -1：仅差一线
9	□	□	×	×	-1	×	×	-1	×	-1	×	×	-1	2、注释：
15	□	□	×	×	×	×	×	-1	×	×	×	×	-2	小飞：(1,q)
21	□	□	×	×	-1	×	×	×	×	-1	×	×	×	大飞：(2,q)
25	□	□	☆	□	×	×	-1	☆	□	×	×	-1	-1	数字q 向右q 列，
27	□	□	×	×	-1	×	×	-1	×	-1	×	×	-1	3、转向步
33	□	□	×	×	-1	×	×	-1	×	-1	×	×	-1	定为（0，—1）。
35	□	□	☆	□	×	×	×	×	□	×	×	×	×	
39	□	□	×	×	-1	×	×	-1	×	-1	×	×	-1	
45	□	□	×	×	×	×	×	-1	×	×	×	×	-2	
49	□	□	☆	☆	☆	-1	×	×	☆	-1	-1	×	×	3、幻和：
51	□	□	×	×	-1	×	×	-1	×	-1	×	×	-1	66351
55	□	□	☆	□	×	×	-1	☆	□	×	×	-1	-1	83215
57	□	□	×	×	-1	×	×	-1	×	-1	×	×	-1	92625
63	□	□	×	×	-1	×	×	×	×	-1	×	×	×	125055
65	□	□	☆	□	×	×	-1	☆	□	×	×	-1	-1	137345
69	□	□	×	×	-1	×	×	-1	×	-1	×	×	-1	164289
75	□	□	×	×	×	×	×	-1	×	×	×	×	-2	210975
77	□	□	☆	☆	☆	-1	×	×	☆	-1	-1	×	×	228305
81	□	□	×	×	-1	×	×	-1	×	-1	×	×	-1	265761
85	□	□	☆	□	×	×	-1	☆	□	×	×	-1	-1	307105
87	□	□	×	×	-1	×	×	-1	×	-1	×	×	-1	329295

91	□	□	☆	☆	☆	−1	×	×	☆	−1	−1	×	×	376831
93	□	□	×	×	−1	×	×	−1	×	−1	×	×	−1	402225
95	□	□	☆	□	×	×	−1	☆	□	×	×	−1	−1	428735
99	□	□	×	×	−1	×	×	−1	×	−1	×	×	−1	485199

2、改变大小飞的起点对半幻方的修正

如果一个 n 阶方阵仅有所有行、列或所有的泛对角线满足幻和，我们称其为半幻方。半幻方通过某些项的平移或交换位置，有可能修正成为一个标准幻方。

对表 1－2 中结果仅差 1 或 2 线而未能成幻方的，我们感到深深地遗憾！能否通过改变起点来修正结果呢？对于表 1－2 中飞的制作，为了便于计算与研究，我将起点一律定在首行第二格，即 C(1,2)中，效果蛮好。

有了 4－5 节的研讨，我们知道：改变起点其实就是再施行一个循环平移，以起点的行标之差为 t，列标之差为 s。循环平移可以保持 n 阶方阵行、列及泛对角线不变，即原来在一线上的 n 项仍在同一线中！

所以改变起点对完美幻方的制作没有什么影响。循环平移使另外两条泛对角线转而成为主、副对角线，而飞法结果仅差 1 或 2 线的正是主、副对角线不合幻和的半幻方，通过改变起点有可能得到修正，成为一个幻方，但是我感觉到：这种改变起点的成功可能性不大！

方法	右上马步q，				起点在C(1,2),			
幻方	转向数时升2格				转向数时降1格			
q 阶	2	4	5	7	2	4	5	7
9	□	□	□	□	−1	□	□	−1
15	□	−1	×	□	−1	−1	×	−1
21	□	□	□	×	−1	□	−1	−1
25	☆	−1	×	☆	−1	−1	×	−1
27	□	□	□	□	−1	□	□	−1
33	□	□	□	□	−1	□	□	□
39	□	□	□	□	−1	□	□	□
45	□	−1	×	□	−1	−1	×	−2
49	−1	×	☆	×	☆	−1	☆	×
51	□	□	□	□	−1	□	□	□

3、变换转向步，期望飞出好的效果

除了马步起点和步数q，变换跳跃方向及转向步，也能修正飞的效果。但要从这四项内选出最佳组合，达到理想效果真也不容易？丁老先生提议非常巧妙，也许是最好的！起点仍在C(1,2)，方向为右上跳跃，转向数时的跳格分为：列不变，①向上跳2格，即i=i−2；②向下跳1格，即i=i＋1。我把测试结果录下成上表1－3，

图 1－10 是起点在 C(1,2)，转向数时向下降 1 格，即 β＝(1,0)；向右上跳跃的小飞 4，即 α＝(−1,4)，作出的 21 阶标准幻方，幻和为 4641，它的每一行、每一列及两对角线上数之和都是：4641。当步数 q＝3、6 或大飞时，马步法大多是失败！唯有 q＝3，转向步为升 2 格时，可得 45 阶与 49 阶完美幻方。好像任何马步 q 对制作偶数阶幻方皆无效？

图1－11：两种方法作出的 9 阶幻方

69	1	23	45	58	80	12	34	47
79	11	33	46	68	9	22	44	57
8	21	43	56	78	10	32	54	67
18	31	53	66	7	20	42	55	77
19	41	63	76	17	30	52	65	6
29	51	64	5	27	40	62	75	16
39	61	74	15	28	50	72	4	26
49	71	3	25	38	60	73	14	36
59	81	13	35	48	70	2	24	37

（1）C是用降1格的小飞5制成的 9 阶幻方

66	1	26	42	58	74	18	34	50
25	41	57	73	17	33	49	65	9
56	81	16	32	48	64	8	24	40
15	31	47	72	7	23	39	55	80
46	71	6	22	38	63	79	14	30
5	21	37	62	78	13	29	54	70
45	61	77	12	28	53	69	4	20
76	11	36	52	68	3	19	44	60
35	51	67	2	27	43	59	75	10

（2）D是升2格的小飞2制成的 9 阶幻方

图1－12：这是用右上小飞7，转向步为（－2，0）制作的15 阶幻方

212	1	30	44	58	72	86	100	114	128	142	156	170	184	198
99	113	127	141	155	169	183	197	211	15	29	43	57	71	85
196	225	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182
83	97	111	125	139	153	167	181	210	224	13	27	41	55	69
195	209	223	12	26	40	54	68	82	96	110	124	138	152	166
67	81	95	109	123	137	151	180	194	208	222	11	25	39	53
179	193	207	221	10	24	38	52	66	80	94	108	122	136	165
51	65	79	93	107	121	150	164	178	192	206	220	9	23	37
163	177	191	205	219	8	22	36	50	64	78	92	106	135	149
35	49	63	77	91	120	134	148	162	176	190	204	218	7	21
147	161	175	189	203	217	6	20	34	48	62	76	105	119	133
19	33	47	61	90	104	118	132	146	160	174	188	202	216	5
131	145	159	173	187	201	215	4	18	32	46	75	89	103	117
3	17	31	60	74	88	102	116	130	144	158	172	186	200	214
115	129	143	157	171	185	199	213	2	16	45	59	73	87	101

C是一个 15 阶幻方，其幻和为 1695，它的每一行、每一列及两对角线上数之和都是：1695

七、马步法的计算与展望

1、马步法的通项公式及数求格计算

马步跳跃快速有效，是幻方制作的主要方法之一。我在前辈研究的基础上做了一些拓展，借助电脑的高速运算，对某些方向进行可能性测试，这也许仅仅是跨入门槛。如此功能强大、传统的马步法，竟未能有相应的理论基础作证，就象眼望大河不知源头何在？真是憾恨之事！理论尚未成功，同志仍须努力！

我使用幻方坐标系的格和动作理论为基础，结合取模运算，经过摸索研究得

定理 1-1：用马步法制作 n 阶幻方时，设起点在 C(x, y)格，马步是(p, q)，转向步为(u, v)；数字 z ($1\leq z\leq n^2$)在 C(i, j)格内，即 C(i, j)=z，有转向次数 s=(z−1) \ n。这时马步法计算 C(i, j)的通项公式为：

$$i=[x+(z-1-s)\,p+\mu s]\bmod n \quad (1)$$

$$j=[y+(z-1-s)\,q+vs]\bmod n \quad (2)$$

定理 1-1 是实用而有效的计算公式，已知一数 z 该放入 n 阶幻方的哪一格中？即求位置的下标 i j，所谓的数求格问题，用它非常便利，通过电脑 VB 程序的验证很准确！对于起点在 C(1, 2)，转向步为(0, -1)的小飞 q，通项公式简化成：

i=(z-s)mod n , j=(z+1-3s)mod n , s=(z-1)\n .

例 3：以图 1－10 的马步作 21 阶幻方，计算数字 168 该填入哪一个方格内？

解：这是以数求格问题，起点在 C(1,2)，马步是(-1,4)，转向步为(1,0)。

n=21, z=168, s=(z-1)\n=167\21=7 , 所以有

i=[x+(z-1-s)p+us]mod n=[1+160(-1)+7]mod 21=(-152)mod 21=16,

j=[y+(z-1-s)q+vs]mod n=[2+160*4+0]mod 21=642 mod 21=12.

用此法制作 21 阶幻方中，C(16,12)=168，查验结果正确。

例 4：以图 1－12 制作的 15 阶幻方，计算数字 224 该填入哪一个方格内？

解：这是以数求格问题，起点在 C(1,2)，马步是(-1,7)，转向步为(－2,0)。
n=15, z=224, s=(z-1)\n=224\15=14 , z-1-s=209, 所以有

i=[x+(z-1-s)p+us]mod n=[1+209(-1)-2*14]mod 15=(-236)mod 15=4 ,

j=[y+(z-1-s)q+vs]mod n=[2+209*7+0]mod 15=1465 mod 21=10.

用此法制作 15 阶幻方中，C(4,10)=224，查验正确，更证明该公式的通用性。

2、**已知位置下标该放入什么数字？**

以上是以数求格问题，得到很好的解决，现在研究它的逆，已知某一格的下标，那么此格应该放入哪个数？即求格中数的问题。解取模方程组需要较多的技巧，涉及初等数论知识，请耐心看我的推导。先定理1-1公式化成不定方程：

$$\begin{cases} x+(z-1-s)p+us=an+i, & (1)\times q \\ y+(z-1-s)q+vs=bn+j, & (2)\times p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xq+(z-1-s)pq+uqs=aqn+qi & (3) \\ yp+(z-1-s)pq+vps=bpn+pj & (4) \end{cases}$$

$$(3)-(4): xq-yp+(uq-vp)s=(aq-bp)n+(qi-pj)$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x & y \\ p & q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & v \\ p & q \end{vmatrix} \cdot s = \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} \cdot n + \begin{vmatrix} i & j \\ p & q \end{vmatrix} \Rightarrow Ts+R=Mn+qi-pj \qquad (5)$$

$$\left(\begin{vmatrix} u & v \\ p & q \end{vmatrix} = T,\ \begin{vmatrix} x & y \\ p & q \end{vmatrix} = R,\ \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} = M、\ a,b,M \in N \right)$$

推论1-1：以C(x, y)格为起点，用马步(p, q)制作n 阶幻方，转向步是(u, v)，则转向次数 s与上述各个参数有重要关系式如下：

$$\begin{vmatrix} x & y \\ p & q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & v \\ p & q \end{vmatrix} \cdot s = \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} \cdot n + \begin{vmatrix} i & j \\ p & q \end{vmatrix} \Rightarrow Ts+R=Mn+qi-pj \qquad (5)$$

$$\left(\begin{vmatrix} u & v \\ p & q \end{vmatrix} = T,\ \begin{vmatrix} x & y \\ p & q \end{vmatrix} = R,\ \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} = M、\ a,b,M \in N \right)$$

以上（5）式是格里数求解的关键式，写出它的行列式和简明表达形式，请读者特别加以注意！当起点在C(1,2)，转向步为(0,-1)，马步是(1, q)，即小飞q时：

$$R=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & q\end{vmatrix}=q-2,\quad T=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & q\end{vmatrix}=1,\quad 0\le s<n$$

$\therefore s=Mn+qi-j+2-q\Rightarrow s=(2-q+qi-j)\bmod n.$

$(1)\Rightarrow pz=an+i+p-x+ps-us.\quad(6)$

$p=1,u=0\Rightarrow z=an+s+i.\quad(7)\quad s=(z-1)\backslash n,\quad \therefore sn\le z<(s+1)n$

$\therefore s=(2-q+qi-j+n)\bmod n\quad(9),\quad z=sn+(s+i)\bmod n\quad(10).$

(9)与(10)是最终的小飞q的计算公式，(9)式中加个n是防止s为负，(10)式当s+i=0时，则令s+i=n。例如用小飞3制作11阶幻方，C(8,3)＝？ n=11, q=3, 代入(9)式得：

s=(2－3+3×8－3) mod 11=20 mod 11=9, ∴z =9×11+(9+8) mod 11=99+6=105.

图1－7验证计算结果是正确的，C(8,3)＝105。

3、大飞q法的计算公式

起点仍在C(1,2)，转向步为(0,-1)，马步是(2, q)，即大飞q时：

$$R=\begin{vmatrix}x & y\\ p & q\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & q\end{vmatrix}=q-4,\quad T=\begin{vmatrix}u & v\\ p & q\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & q\end{vmatrix}=2,\quad 0\le s<n$$

$\therefore 2s=Mn+qi-2j+4-q\Rightarrow s=2^{\varphi(n)-1}(4-q+qi-2j)\bmod n.$

$(6)p=2,u=0\Rightarrow 2z=an+i+2-1+2s$

$\therefore s=2^{\varphi(n)-1}(4-q+qi-2j+n)\bmod n.\quad(11),\quad z=sn+2^{\varphi(n)-1}(2s+i+1)\bmod n.\quad(12)$

注意不定方程两边不可以随便同除一个整数，这里用到了欧拉函数φ(n)，

当n为素数时，φ(n)=n－1；合数情况比较复杂，有：φ(9)＝6，φ(15)＝8，φ(21)＝12，φ(25)＝16，φ(27)＝18，φ(33)＝20，φ(35)＝φ(39)＝φ(45)＝24，φ(49)＝36，……

(11)与(12)是最终的大飞q的计算公式，(11)式中加个n还是防止s为负，(12)式当s+i=0时，则令s+i=n。例如用大飞4制作13阶幻方，C(5,9)＝？ n=13, p=2, q=4,

φ(13)＝12、 $2^{\phi(13)-1}=2^{11}$=64*32=2048, 代入(11)式得：

s=2048(4－4＋4×5－2×9) mod 13=4096 mod 13=1,

∴z =1×13+2048(2+5+1) mod 13=13+16384 mod 13=13+4=17. 图1－8可验证。

4、向右上小飞4，转向时降一格的计算公式

起点在C(1,2)，马步是(－1, 4)，转向步为(1,0)，这种飞法常有好的效果：

$$T=\begin{vmatrix}u & v\\ p & q\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix}=4,\quad R=\begin{vmatrix}x & y\\ p & q\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix}=6,\qquad 0\le s<n$$

$\therefore 4s=Mn+4i+j-6\Rightarrow s=4^{\varphi(n)-1}(4i+j-6)\bmod n.$

$(1)\Rightarrow pz=an+i+p-x+ps-us.\quad(6)p=-1,u=1\Rightarrow -z=an+i-1-1-s-s$

$z=-an+2s+2-i,\quad sn\le z\le(s+1)n$

$\therefore s=4^{\varphi(n)-1}(4i+j-6)\bmod n.\quad(13),\quad z=sn+(2s+2-i)\bmod n.\quad(14)$

(13)与(14)是最终的计算公式，(13)式中加个n还是防止s为负，(14)式当s+i=0 时，