



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

理论力学简明教程

(第二版)

陈世民



高等教育出版社
Higher Education Press

内容提要

本书第一版是教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果,是 21 世纪课程教材。本书在第一版基础上修订而成,是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

全书系统地介绍了经典力学的传统内容,吸收了该学科的最新进展,直观、简明地介绍了质点系非线性动力学中有序、分岔、混沌等基本现象和基本概念,并基于计算技术的发展引进了求解力学问题的数值计算方法。本书收录了许多经典例题,并在题后附有评注,用以阐述理论、总结思路,有助于读者更好地理解所学内容。本书根据新的专业需要对第一版进行了修订,增加了“拉格朗日不定乘法”、“耗散函数”等内容,并作为举例叙述了“简单电路问题的动力学模型”,同时对某些意义容易混淆或叙述不够清楚的字句作了修改,并对全书内容作了适当精简。

本书脉络清晰、说理透彻,可作为普通高校物理类专业的教材,也可供相关专业选用和其他科学技术工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学简明教程/陈世民.—2版.—北京:高等教育出版社,2008.6

ISBN 978-7-04-023918-8

I. 理… II. 陈… III. 理论力学-高等学校-教材
IV. O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 053034 号

策划编辑 忻蓓 责任编辑 张海雁 封面设计 于文燕 责任绘图 尹莉
版式设计 马敬茹 责任校对 殷然 责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京未来科学技术研究所
有限责任公司印刷厂

开 本 787×960 1/16
印 张 17
字 数 310 000

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2001 年 1 月第 1 版
2008 年 6 月第 2 版
印 次 2008 年 6 月第 1 次印刷
定 价 19.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 23918-00

第二版前言

本教程自 2004 年 12 月出版以来,已重印多次,受到广大读者的欢迎。此外还收到了不少读者寄来的信件,在此对他们的鼓励表示深切地感谢!同时,在这几年的使用过程中,也发现了本书的一些不足和错误,乘这次再版的机会,作了必要的补充和修正。

本书再版时,对某些意义容易混淆或叙述不够清楚的文句,作了修改;对某些公式的推导不够仔细的,进行了适当补充。有些读者反映,本教程中某些例题过大、过长,为此,我们对例题也进行了全面审核。对某些例题的内容太庞杂的,作了适当缩减,使演算交代得更清楚些。书中许多例题是采用一题多解方式的,这也是显得过长的一个原因。但是我们认为,作为例题采用一题多解方式有其一定的好处;同一题目从各种角度思考求解,可以比较不同方法的优缺点,可以拓宽读者思路,有利于读者系统地 and 全面地掌握课文内容。为此我们还是基本上保留了一题多解的方式。当然,教师在讲授时可以选择一种解法讲解,其他解法可作为作业留给学生研究。在某些例题中,我们也已发现了一些运算上的错误,对此作者深表歉疚!本书再版时对这些错误一一作了改正。

考虑到基本方法的重要性和某些专业的需要,在“第六章 分析力学”中增加了“拉格朗日不定乘子法”、“耗散函数”等段落,并作为举例叙述了“简单电路问题的动力学模拟”。这些内容对分析力学在非保守力学系和在非力学系统的应用方面,有给读者一定的启示作用。“拉格朗日不定乘子法”是一个基本的数学方法,在后行的课程中也要用到,而这个方法放在分析力学中讲述是最为恰当的。

本书面对的专业较广,不一定能完全适应某一特定专业的要求;面对的读者在力学方面的基础也有很大差异。为此,希望老师讲授本课程时结合专业需要和学生的基础,适当地选择讲授内容。如果专业要求的力学知识主要在应用方面,或学生的力学基础不足,则讲授的学时可着重安排在牛顿力学部分,分析力

学部分则可主要介绍基本概念和主要方法(如拉格朗日方程);对于力学基础较好的学生,则重点放在分析力学部分,牛顿力学部分的讲授可采用简要的、总结式的和举些重点例题的讲授方式;例如可适当选择讲解本书中的综合例题,特别是一题多解和具有“评注”的例题,以温习和总结学过的力学知识。

附录 C 中,有心力问题的计算程序源代码,改用 Visual Basic 语言书写。这是因为与 Turbo C 语言相比 Basic 语言属于高级计算语言,易于书写和阅读,更适宜于在 Microsoft Windows 系统上运行,况且多数院校将其作为计算机语言课程讲述。

限于作者水平,本书一定还存在不少缺点甚至错误,恳切地希望读者批评指正!

陈世民

2007年8月于南京大学

第一版前言

理论力学是一门应用广泛的基础课程,不仅物理专业的学生必读,对于工程技术专业的学生而言,理论力学也是不可缺少的知识。为了适应当前社会经济发展的需要,高等学校中创建了许多应用物理专业。由于各专业特点不同,对理论力学课程的要求也有较大的差别。本课程就是为适应这一新的情况而编写的。

当今科学技术突飞猛进,新知识大量涌现,物理学本身也在某些方面有了重大进展。为了适应新的形势,需要对课程内容作必要的调整,删繁就简;某些学科的新进展和新知识在教材中需要有一定的反映,教材内容才能相应地得以充实。这正是作者编写本教材时试图贯彻的精神。

介绍、推演和总结物理学的基本规律是理论物理课程的主要目标。在理论物理的教科书中,不可避免地会出现众多纷繁的数学公式,这给初学者带来困扰,理论力学也不例外。本课程强调基本理论,注重从最基本的理论出发引导读者掌握物体各种机械运动形态下的具体规律。本教材较多地强调了势能函数作为稳定性问题判据的重要性。质点运动的平衡、有心力场中圆轨道运动的稳定性和刚体运动的稳定性问题,都用势能函数的极值来判断。考虑到读者对力学已有一定的基础,在普通物理力学课程中对许多重要的力学概念已有较为系统的讲述,因此我们在本教材中,并不特别注重力学概念引入的系统性;对于部分难点则尽可能地采用直观形象的方法。

非线性力学系统的动力学,是近些年蓬勃发展起来的新学科,它对物理学以至其他许多学科的发展,都有巨大的推动作用。非线性动力学的研究赋予古老的经典力学新的活力,对此本教程也给予一定的反映。教程中指出,在非线性的力学系统的运动中,普遍存在着有序、分岔和混沌现象。作为例子,介绍了“埃农-海力斯(Hénon-Heiles)势问题”的计算研究结果。我们希望读者能感受到经典力学中存在着的无序或混沌现象。力学系统中的混沌现象是决定论下无序运动的结果,它与统计物理中的概率不确定性有着本质的区别,力学运动的确定性中存在无序行为,而无序中却又包含着有序的特点。KAM定理则是对此作出证实的最重要进展,本教程的最后一节将初步介绍这方面的内容。

当今科学技术的发展已进入了计算机时代,单纯依靠人的脑力和解析数学的时代似乎已经过去,理论物理自身的发展也是如此。我们相信以后在相关的

教科书中将逐步引入计算方法和技术,以及计算技术所带来的其他优秀成果。为此,我们尝试着利用计算机对有心力问题和埃农-海力斯势问题进行了计算,在附录 B 和附录 C 中分别介绍了常微分方程初值问题的数值计算方法,并附有有心力问题的计算程序。这部分内容可作为读者的参考材料,有兴趣的读者也可以在课外上机计算。随着计算机的逐步普及,我们相信学生已经有条件这样做了,在这里我们只是抛砖引玉而已。

不同的应用类物理专业,对理论力学内容的要求不同,安排的教学课时数就有很大的差异,从 36 学时至 72 学时不等。本教程中,某些节或段的标题前标记有“*”号并用小号字排版的内容,可供灵活选用。有些较为具体的力学问题,例如质点力学中的振动问题、抛体和约束运动问题,质点组中的撞击问题以及拉莫尔进动等,则以例题的形式编写。这些都是为了适应各专业不同的讲课学时的需要,以方便教师更为灵活地选取讲授内容。没有讲授的部分则可作为读者的课外阅读材料。教程中还安排了较多的例题,求解步骤一般都较详尽,以便读者自阅。大多数例题后面附有“评注”,以帮助读者更好地理解本例题的意图、解题的各种可能途径以及其他应注意的地方。

每章的公式及插图都独立编号,例题和习题的插图在编号前分别加有字母 I 和 T。

本书的初稿完成于 1997 年底。此后在内容安排和文字上进行了少量调整和修改。由于作者水平有限,书中疏漏和错误之处在所难免,敬请读者批评指正。

陈世民
1999 年 1 月于南京大学

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

反盗版举报传真：(010) 82086060

E - mail: dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮编：100120

购书请拨打电话：(010)58581118

目 录

绪论	1
第一章 牛顿力学的基本原理	4
§ 1.1 质点运动的描写	4
(一) 参考系和坐标系	4
(二) 质点的运动轨道 速度和加速度	5
(三) 长度恒定的矢量转动时的时间变化率	14
§ 1.2 牛顿定律	14
§ 1.3 质点运动的基本定理	27
(一) 质点动量定理	27
(二) 质点动量矩定理	28
(三) 质点动能定理	30
§ 1.4 保守力 势能和机械能守恒定律	31
(一) 保守力 势能函数和机械能守恒定律	31
(二) 保守力场的特性	33
*§ 1.5 质点运动的相空间和相轨迹	38
(一) 一维简谐振子的相轨迹	38
(二) 单摆运动的相轨迹	39
习题	42
第二章 有心运动和二体问题	46
§ 2.1 有心力和有心运动	46
(一) 基本特性	46
(二) 运动方程	47
(三) 轨道微分方程	48
§ 2.2 距离平方反比引力作用下的质点运动	49
(一) 轨道	49
(二) 轨道的特性	50
§ 2.3 圆轨道的稳定性	54
§ 2.4 距离平方反比的斥力作用—— α 粒子的散射	58
(一) 散射轨道 散射角	58
(二) 散射截面 卢瑟福散射公式	59

§ 2.5	二体问题	61
*§ 2.6	任意幂有心力问题的计算	63
	(一) 与距离成任意幂指数的引力	63
	(二) 微小扰动对轨道的影响	65
	(三) 相轨迹和庞加莱面	67
*§ 2.7	埃农-海力斯势问题	69
	习题	71
第三章	非惯性参考系	74
§ 3.1	相对运动	74
	(一) 绝对速度 相对速度和牵连速度	74
	(二) 加速度 科里奥利加速度	78
§ 3.2	平动的非惯性系	79
§ 3.3	旋转的非惯性系	81
§ 3.4	地球自转的效应	84
	(一) 地面坐标系中的质点运动方程	85
	(二) 自由落体的偏东	87
	(三) 傅科摆	88
	(四) 气旋 热带风暴和信风	89
	习题	93
第四章	质点组动力学	96
§ 4.1	质点组	96
	(一) 外力和内力	96
	(二) 质心	97
§ 4.2	质点组的动量、角动量和动能	99
	(一) 动量	99
	(二) 角动量	99
	(三) 动能	100
§ 4.3	质点组运动的基本定理	102
	(一) 动量定理和质心定理	102
	(二) 角动量定理	103
	(三) 动能定理	105
*§ 4.4	开放的质点组——变质量物体的运动问题	109
	习题	110
第五章	刚体力学	113
§ 5.1	刚体的运动	113
	(一) 刚体的运动及其自由度	113

808	·(二) 欧拉角	115
818	* (三) 角位移和角速度	116
818	·(四) 角速度的欧拉角表示	118
818	·(五) 刚体内任意点的速度和加速度	120
818	·(六) 瞬时转动中心	122
918	§ 5.2 刚体的动量、角动量和动能	126
538	·(一) 刚体的角动量和惯量张量	126
538	·(二) 刚体的动能	133
438	§ 5.3 刚体的动力学方程	136
538	§ 5.4 刚体的定轴转动	139
538	§ 5.5 刚体的平面平行运动	144
538	§ 5.6 刚体的定点运动	149
538	·(一) 基本方程	149
538	·(二) 用完全跟随刚体转动的坐标系表示的角动量定理——欧拉方程	151
540	地球的自转	151
540	·(三) 不随刚体自旋的活动坐标系 对称重陀螺的定点运动	154
548	·(四) 高速自旋陀螺的近似理论	158
548	习题	163
	第六章 分析力学	168
548	§ 6.1 约束 自由度和广义坐标	168
548	§ 6.2 虚功原理	172
528	·(一) 虚位移和实位移	172
528	·(二) 理想约束和虚功原理	173
528	·(三) 虚功原理的广义坐标表述和广义力	175
	* (四) 虚功原理的不定乘子法	177
	§ 6.3 拉格朗日方程	182
	·(一) 达朗贝尔原理	182
	·(二) 拉格朗日方程	183
	·(三) 循环坐标和广义动量积分	186
	* (四) 耗散系统与耗散函数	187
	§ 6.4 拉格朗日方程的应用举例	189
	* § 6.5 微小振动	197
	·(一) 耦合摆的微振动	197
	·(二) 简正坐标	201
	·(三) 一般力学体系的微振动	202
	§ 6.6 哈密顿函数和正则方程	204
	·(一) 哈密顿函数	205

111	(二) 哈密顿正则方程	208
111	(三) 泊松括号	213
118	§ 6.7 哈密顿原理和正则变换	214
150	(一) 泛函和变分	215
151	(二) 哈密顿原理	216
151	* (三) 正则变换	219
151	*§ 6.8 不变环面和 KAM 定理	222
133	(一) 作用变量 角变量和不变环面	222
131	(二) KAM 定理	224
131	(三) 力学系运动的映射特性	227
141	习题	228
	附录 A 矢量	234
	附录 B 常微分方程的数值解法	236
	(一) 龙格-库塔(Runge-Kutta)方法	237
121	(二) 亚当斯(Adams)多步方法	240
124	(三) 米尔恩(Milne)多步方法	241
	附录 C 有心力问题的计算和画图程序	242
101	(一) 力的类型	242
101	(二) 计算方法及相关的子过程	242
101	(三) 主要的变量	244
171	(四) 源程序	244
	主要参考书目	252
	中英文对照索引	253

绪 论

理论力学是研究物体机械运动基本规律的科学。所谓机械运动,是指物体在空间的相对位置随时间变化的一种运动形态^①,它是一种最简单、最基本的物质运动形态,各种复杂的、高级的运动形态都包含有这种基本的运动形态。

力学是最早发展起来的学科之一。早在古代,人们在日常生活和生产中就已经积累了许多关于物体机械运动的知识。17世纪末,牛顿(I. Newton)在前人工作的基础上总结出了物体运动的三个基本定律。这三个著名的牛顿定律,奠定了力学的理论基础。微积分等数学工具的发展和广泛应用,有力地推动了力学学科的进展。18世纪后,拉格朗日(J. L. Lagrange)、哈密顿(W. I. Hamilton)等人又发展了“分析力学”。分析力学使力学规律具有更严密的数学基础,而且力学问题可以完全用严格的解析数学方法来处理;在风格上分析力学则与具有较强矢量特征的牛顿力学很不相同。分析力学对物理学的发展起着重要的推动作用,在理论物理中占有重要的地位。由于分析力学理论形式简洁且富有公理特性,很容易将它推广应用到其他学科中去。

理论力学又称“古典力学”或“经典力学”,以区别于20世纪初发展起来的更深层次上的动力学理论和时空理论。经典力学中所描述的物体运动,是指物体的尺度与原子、分子相比大得多的宏观物体的运动,与原子尺度可以相比的微观物体的运动则遵循量子力学的规律。虽然在量子力学中有许多物理量依然沿用经典力学中的概念,然而经典力学和量子力学则是分别适宜于描述不同尺度范围内的物体运动的规律。此外,经典力学也仅适用于物体的运动速度远小于光速的情形。速度与光速可以比拟的物体的运动则必须考虑爱因斯坦(A. Einstein)的相对论效应,需由建立在新的时空观念上的相对论力学来处理。尽管如此,经典力学依然是不可取代的。对于尺度远大于原子、速度远小于光速的物体的运动,

① 本课程不讨论可形变的连续介质的运动。这里所指的物体是不可形变的刚性物体;连续介质的运动规律是连续介质力学——流体力学、弹性力学等课程讨论的内容。

运用新理论得到的结果与经典力学的结果完全一致. 这便证实了经典力学在其适用的物体尺度和运动速度范围内的正确性. 在数学处理上经典力学远比新理论简单, 从而才有可能对许多宏观低速运动物体的力学问题进行求解.

近两个世纪前经典力学已发展成一门理论严谨、体系完整的学科, 用它来处理大至天体、小到尘埃的各种物体运动, 都能得出与实际完美符合的结果. 然而, 刚过去的 100 年中, 物理学发生了三次伟大革命, 恰恰都涉及了经典力学的基础. 如前所述, 20 世纪初建立的相对论, 否定了牛顿学说的绝对时空观念; 20 世纪 20 年代发展的量子力学则破除了经典力学中物体位置和动量的同时可精确测量原则; 到了 20 世纪中叶, 随着非线性系统研究的开展, 力学系统混沌行为的揭示逐渐动摇了经典力学的决定论思维方式. 这启示人们, 即使像经典力学这样成熟的物理学科, 其背后也潜藏着活力.

长期以来, 物理学中存在着两种典型的思维方法, 一是以经典力学为代表的“确定论”思维方式; 另一种则是“概率论”思维方式, 这是以统计物理学为代表的, 量子力学也可以包括在内. 经典力学之所以成为确定论思维方式的代表, 出于多种原因, 特别是数学和计算工具的限制, 长期以来人们主要用它来处理一些较为简单的可积分的力学问题, 在力学教科书中甚至只讲述一些应用现有数学就可求解的问题. 对于这类可积分问题, 给定了外部条件后力学系统的运动完全由初始条件确定, 即下一时刻系统的运动状态完全由这一时刻的运动状态确定, 而且是可逆的. 这就是说, 所描述的物体的运动主要是周期的、有序的机械运动. 这便给人们造成了这样的概念: 经典力学是物理学中“确定论”思维方式的典范. 然而早在 20 世纪 20 年代, 著名数学家庞加莱 (H. Poincaré)^① 后来是爱因斯坦^②, 就曾指出经典力学系统也存在着“无序”或“混沌”的领域, 当时却没有引起物理学家们的注意. 随着电子计算机的出现, 计算工具有了革命性的改革. 从 20 世纪 40 年代开始, 物理学家们逐渐对非线性力学系统的研究重视起来. 特别是在 20 世纪 60 年代, 气象物理学家洛伦茨 (E. Lorenz) 采用计算方法计算了他设计的大气模型, 发现了令人惊奇的现象: 计算结果对于初始条件十分敏感, 甚至认为天气的长期预报是不可能的. 此后的许多学者对非线性力学系统进行了研究, 充分展示了某些力学系统的行为从有序向混沌转变的特性, 以及力学系统运动的混沌特性的重要意义. 这些研究成果对物理学的进展起着巨大的推动作用,

① H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Gauthier - villas, Paris (1892); Dover Press (1957); in English N. A. S. A. Translation TT F - 450/452, U. S. Fed. Clearinghouse, Spring - field.

② A. Einstein, *Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein*, *Verh. Deut. Phys. Ges.* 19, 82—92 (1917).

也给古老的经典力学增添了新的活力. 现在对非线性系统的研究已超越了力学学科, 扩展到物理学的各个领域, 甚至已超越了物理学, 而成为许多理工学科以至一些人文学科的共同课题. 对非线性系统的研究正逐步形成一门崭新的学科.

理论力学作为理论物理学的第一门课程, 它的任务不仅是介绍物体的机械运动规律, 还要引导读者如何应用数学去描写和分析物理问题. 作为科学, 就必须使用最严谨的方式去表达, 去描写, 去推演, 去总结自然规律. 在众多的表达方式中数学是最为严谨的工具. 我国古代的科学技术居于世界前列, 但是大多停留在语言或文字的表达方式(歌诀)上, 以致未能很好地总结并发展为严格的理论.

理论力学课程中最常用的数学工具是坐标系、矢量代数、微积分和常微分方程. 读者通过本课程的学习应该能熟练地应用这些数学工具去描述和求解物体的机械运动.

1.1 绪论

力学是研究物体机械运动规律的一门科学. 力学是物理学的一个分支, 也是工程技术的理论基础. 力学的发展经历了漫长的历史过程, 从古代的朴素力学到近代的经典力学, 再到现代的非线性力学. 力学在自然科学和工程技术中占有重要的地位. 力学的基本概念和基本定律是力学理论的基础. 力学的基本定律包括牛顿运动定律、动量守恒定律、能量守恒定律等. 力学的基本概念包括位移、速度、加速度、力、功、能、动量、角动量等. 力学的基本定律和基本概念是力学理论的基础. 力学的基本定律和基本概念是力学理论的基础.

系科坐味系卷(一)

力学是研究物体机械运动规律的一门科学. 力学是物理学的一个分支, 也是工程技术的理论基础. 力学的发展经历了漫长的历史过程, 从古代的朴素力学到近代的经典力学, 再到现代的非线性力学. 力学在自然科学和工程技术中占有重要的地位. 力学的基本概念和基本定律是力学理论的基础. 力学的基本定律包括牛顿运动定律、动量守恒定律、能量守恒定律等. 力学的基本概念包括位移、速度、加速度、力、功、能、动量、角动量等. 力学的基本定律和基本概念是力学理论的基础. 力学的基本定律和基本概念是力学理论的基础.

第一章

牛顿力学的基本原理

人们对机械运动的理论探讨,首先从对质点运动的研究开始.300多年前,牛顿便在前人工作的基础上总结出质点运动的三条定律,从而奠定了牛顿力学的基础.本章首先讨论如何描写质点的运动,然后以牛顿定律为基础讨论质点动力学问题,并由此引入基本的动力学位。

§ 1.1 质点运动的描写

物体具有一定的质量、大小和形状.它的运动一般来说比较复杂,研究起来也较为困难.为研究方便,我们需要从比较简单的情形入手.一定大小的物体是由无数具有质量的微小客体组成的.从微观角度看,虽然这些微小客体仍然具有一定的体积且包含有大量的微观粒子,但在宏观上可以不考虑它的大小和形状,而将其抽象为具有质量的几何点——质点.在有些实际问题中,物体的运动范围比物体本身的尺度要大得多,而且它的形状和大小与问题无关或关系甚小,那么这样的物体也可以作为质点来处理.例如,地球虽然是一个庞大的物体,但在它围绕太阳做轨道运动时便可以把它当作质点看待.由于质点没有大小和形状,描述它的运动比较简单,因此我们首先讨论质点的运动.

(一) 参考系和坐标系

要研究物体在空间的运动,首先就必须确定物体在空间的位置.在茫茫宇宙中,物体的位置只能相对于某一参考物来确定.物体的机械运动也都是相对于参考物的.参考物又称参考系,由特定的一个或多个物体构成.例如,通常以太阳为参考物来确定地球和其他行星的位置,研究地面上物体的运动则常以地面为参考物.

选定了参考物后,还要在它上面建立适当的坐标系,才能具体地表达物体相对于参考物的位置.对于三维空间,常用的有直角坐标系、柱坐标系和球坐标系;二维情形时,还常用到平面极坐标系;有时可能更适宜用自然坐标系来描写质点

的运动,自然坐标系也称为“内禀坐标系”。

确定一质点的位置,不仅需要知道它相对于参考物的距离,还要知道它相对于参考物的方位.很显然,在坐标系中用矢量来表示质点的位置是最为适宜的.如图 1.1 所示,质点 P 的位置可由坐标原点 O 至 P 点的矢量 r 来表示.这个矢量称为质点 P 的位置矢量,简称位矢或径矢.在各种坐标系中位矢表达式分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ &= \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{k} \\ &= r\mathbf{e}_r \end{aligned}$$

位矢的长度为

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2} = r$$

r 是质点 P 离开 O 点的距离, \mathbf{e}_r 表示径矢 r 方向上的单位矢量(单位矢量是长度为 1 的矢量); $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 习惯上分别用来表示 x, y 和 z 坐标轴方向上的单位矢量.

采用坐标系不仅可以把矢量表达得很明确,而且便于进行运算.但必须指出,坐标系与参考系在概念上是有一定区别的.前者主要用作度量空间的数学工具,后者则是物理上实在的物体,物体的运动是以参考物为标准的.虽然在许多情况下采用完全固定在参考物上的坐标系,这时坐标系本身就成为参考物的一部分,可视为参考物的一种数学抽象.但是也常选取不固定在参考物上的活动坐标系,同样可用它来表达物体相对于该参考物的位置和运动.事实上,极坐标系、自然坐标系、柱坐标系和球坐标系都不是固定在参考物上的.

(二) 质点的运动轨道 速度和加速度

质点运动时其位置矢量随时间变化,位置矢量是时间 t 的函数,即 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, 它直接描绘出质点的运动轨道.在直角坐标系中有

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

或写成标量方程形式:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

这是以时间 t 为参数的轨道方程,消去参数 t 便得到质点运动的轨道曲线方程.

例如,对上面三个以时间 t 为参量的参量方程,分别消去 t 便得到方程组:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

这是两个空间曲面方程,它们的交线即是质点的轨道曲线方程.有时可以不用时间 t 作参量,而用其他与时间相关的量作参量.例如.

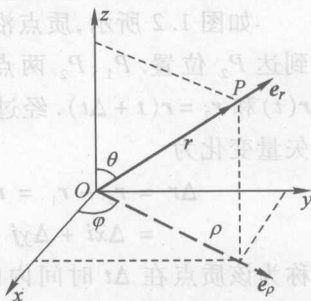


图 1.1