

现代物理基础丛书

18

量子非阿贝尔 规范场论

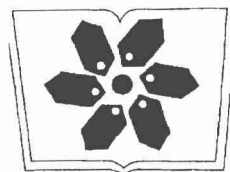
曹昌祺 著



科学出版社

www.sciencep.com

041
26-2



中国科学院科学出版基金资助出版

现代物理基础丛书 18

量子非阿贝尔规范场论

(理论物理三卷集之二)



曹昌祺 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是作者在其为北京大学物理系理论物理专业研究生讲授量子非阿贝尔规范场论的讲稿的基础上加以整理写成的, 全书比较系统地阐述了当代物理学基本理论的这一最新成就. 全书共分 6 章, 内容包括: 海森伯图像中的格林函数、泛函积分量子化、经典非阿贝尔规范场、非阿贝尔规范场的量子化、非阿贝尔规范场的重正化理论、重正化群方程和顶角函数的大动量渐近行为.

本书可作为物理系研究生的教学用书, 也可供高校教师和相关科研人员参考.

图书在版编目 (CIP) 数据

量子非阿贝尔规范场论/曹昌祺著. —北京: 科学出版社, 2008

(现代物理基础丛书; 18. 理论物理三卷集; 2)

ISBN 978-7-03-022546-7

I. 量… II. 曹… III. 场论-研究生-教材 IV. O412.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 107370 号

责任编辑: 胡 凯 / 责任校对: 包志虹

责任印制: 赵德静 / 封面设计: 王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 7 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2008 年 7 月第一次印刷 印张: 25 3/4

印数: 1—3 000 字数: 493 000

定价: 69.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈双青〉)

序 言

本书是作者 20 世纪 80 年代将其在北京大学物理系讲授量子非阿贝尔规范场论的讲稿加以整理写成的. 当初由高等教育出版社于 1990 年以《量子规范场论》为名出版. 这次作为“理论物理三卷集”的第二卷重新出版时, 作者在叙述上作了少量增改, 更正了印刷上的一些错误并加写了一些附注. 但基本内容没有改变^①, 至于书名则更准确地写成“量子非阿贝尔规范场论”.

这门课程是为理论物理专业的研究生开设的, 要求先修课程为高等量子力学、量子场论和群论. 学习者一般还需具有一些粒子物理的初步知识. 本课程只限于讲授量子非阿贝尔规范场论的基本内容, 一些比较专门的问题和发展得还不够成熟的内容皆未包括在内. 此外对粒子物理也涉及不多, 因为另外开设有粒子物理学的课程.

为了方便研究生的学习, 讲授时曾指定一些书籍或文集为参考书^②, 讲稿中吸取了这些书中不少好的讲法, 在写成书时它们也被保留了下来. 一般文献在本书中皆不列出 (比较特殊的除外), 需要的读者可从上述参考书中找到.

本书的第一章和第二章为准备部分. 由于量子场论课程中主要讲作用图像, 而本书要采用海森伯图像. 因此, 我们用第一章补充有关海森伯图像中格林函数的内容. 第二章讲解泛函积分量子化方法, 为非阿贝尔规范场的量子化作准备. 从第三章开始才进入对非阿贝尔规范场的讨论.

与多数量子场论的书一样, 本书采用自然单位, 即取 $\hbar = c = 1$ 制. 洛伦兹指标 μ 取为 (1, 2, 3, 4), 度规张量为 $\delta_{\mu\nu}$. 四维矢量 A_μ 的第 4 分量 A_4 等于 iA_0 . 场论中常用的一些不变函数的定义, 各书不尽相同, 我们采用的定义除在书中有说明外, 还可在附录中查到.

量子非阿贝尔规范场论是比较专门的理论, 国内有关的书还很少. 作者恳切地希望听到批评意见, 对于书中错误和不当之处, 更盼读者在发现后予以指正.

曹昌祺

2005 年 9 月于北京大学燕园

^① 由于某些原因, 本书初版后不久, 作者的研究方向就从粒子物理转到量子光学. 即使现在想改写此书 (把阐述写得详尽些), 也已感到荒疏力不从心了. 另外, 三卷之间并无联系, 其顺序是按初版时间来排的.

^② 主要有 L. D. Faddeev & A. A. Slavnov, *Gauge Fields, Introduction to Quantum Theory*, 1980; C. Itzykson & J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, 1980; J. C. Taylor, *Gauge Theories of Weak Interactions*, 1976; Les Houches, Session 28, *Methods in Field Theory*, 1975; Abers & B. W. Lee, *Gauge Theories*, *Physics Reports*, 1973.

引 言

非阿贝尔规范场理论是场论的最新发展. 量子非阿贝尔规范场论已成为现代粒子理论的主要基础.

在 20 世纪 30 年代人们就已认识到: 所有微观客体都是某种量子场. 不仅电磁场是量子场 (它的量子为光子), 就是费米子 (例如电子) 也是某种场的量子. 由于每种费米子都有它的反粒子 (它们可以成对地湮没或产生), 因而需要用量子费米子场来统一描写它们.

在量子场论中, 人们可以在拉格朗日函数中引入相互作用项以描述量子场之间的各种相互作用. 在 20 世纪 30 年代人们就已知道, 粒子间的基本相互作用除了引力作用以外, 还有电磁作用、弱作用和强作用. 后两者都是在核物理的研究中被发现的. 使质子和中子结合成核的作用就属于强作用, 而导致核的 β 衰变的作用则是弱作用. 通过强作用和弱作用, 粒子还可以互相转化.

电磁作用具有一种定域阿贝尔规范对称性, 因此电磁场属于阿贝尔规范场. 杨振宁和 Mills(1954 年) 以及 Shaw(1955 年) 把定域规范变换的概念推广到了具有内部对称性的理论中. 他们的研究表明, 同样要有相应的规范场与费米子场相耦合, 才能使内部自由度的对称性成为定域的规范对称性. 内部自由度的对称性是由非阿贝尔群描述的, 因此这种规范场就称为非阿贝尔规范场, 它所传递的作用称为非阿贝尔规范作用.

非阿贝尔规范理论被提出以后, 并没有立即在粒子物理中获得应用. 这是因为:

- ① 定域规范对称性要求非阿贝尔规范场的量子像光子一样是质量为零的矢量玻色子, 它所传递的作用应为长程作用, 而实验上并未发现这种粒子和这种相互作用;
- ② 非阿贝尔规范场在量子化方面存在着困难, 如果简单地仿照电磁场的方式进行量子化, 则所得出的 S 矩阵不满足么正性的要求.

在 20 世纪 60 年代初, 固体物理中的对称性自发破坏的概念被 Nambu 等引入到粒子物理中. 但是在相对论理论中, 连续对称性的自发破坏带来一个问题, 即它不可避免地导致零质量粒子的出现. 这种零质量粒子被称作 Nambu-Goldstone 粒子. 几年以后 Higgs 等阐明, 如果发生自发破坏的是定域规范对称性, 则这种零质量的 Nambu-Goldstone 粒子将与规范场耦结在一起, 使规范场量子成为有质量的矢量玻色子, 而 Nambu-Goldstone 粒子本身不再作为物理粒子出现. 这一重要进展带来了将非阿贝尔规范理论应用到短程作用上的可能性.

1967 和 1968 年, Weinberg 和 Salam 在弱作用普适 V-A 相互作用理论的基础上, 提出了统一描述弱作用和电磁作用的定域规范理论. 在这个理论中, 定域规范

对称性发生了自发破坏,一部分规范玻色子获得了大的质量,它们所传递的作用就是实际观测到的短程的弱作用.而剩余对称性所相应的规范作用就是长程的电磁作用.

电弱统一理论已获得巨大成功,它所预言的中性弱流作用已于 1973 年为中微子散射实验所证实,传递弱作用的有质量的矢量玻色子 $W^\pm$ 和 Z^0 也于 1982~1983 年被发现,而且它们的质量与理论所预言的相符合.

几乎在电弱统一理论发展的同时,非阿贝尔规范场的量子化和重正化问题也得到了解决. 1967 年 Faddeev 和 Popov 找到了推导非阿贝尔规范场的费曼规则的系统方法. 1971 年 't Hooft 又证明了非阿贝尔规范场论是可重正化的. 这些工作使量子非阿贝尔规范场论得以建立和完善化.

通常从经典理论过渡到量子理论,是将描述物理量的普通数 (c 数) 换成不可对易的量 (q 数). 这种不可对易量可以用算符来表示,因此这种量子化方法称为算符量子化. 20 世纪 40 年代,费曼发展了另外一种量子化方法,称为泛函积分量子化(或路径积分量子化),并把它推广到场论中去. Faddeev 和 Popov 正是采用这种方法比较完整地解决了非阿贝尔规范场的量子化问题.

关于强作用,1964 年 Gell-Mann 和 Zweig 提出了强子是由更小的夸克子所组成的理论模型. 从重子波函数的交换对称性,人们又提出了夸克子可能还具有一个隐藏的自由度. 这个自由度称为色自由度,夸克子具有色自由度的内部对称性. 色自由度的存在和色对称性后来在 e^+e^- 湮没实验和 π^0 衰变为 2γ 的实验中都得到了支持. 色对称性的定域规范化所得出的理论称为色动力学 (QCD), 其中将出现 8 个 (非阿贝尔) 规范玻色子 (称为色胶子), 它们是强作用的作用量子, 夸克子在吸收或放射色胶子时将在色自由度上发生跃迁.

轻子-核子深度非弹性散射的实验结果不仅有力地支持了核子是由更小的粒子构成的模型,而且它所揭示出来的强作用渐近自由性,使得 QCD 几乎成为强作用的唯一的候选理论. 因为理论研究表明,只有非阿贝尔定域规范作用才可能具有渐近自由的性质,其他所有可重正化的相互作用都是反渐近自由的. 至于零质量的自由色胶子未被发现,人们则作为一个特殊问题试图用非阿贝尔规范理论的红外特性来解释.

这样,粒子间的电磁作用、弱作用和强作用都是定域规范作用,量子规范场论(包括非阿贝尔的)从而就成为现代粒子理论的主要基础.

目 录

第一章 海森伯图像中的格林函数	1
1.1 海森伯图像中的状态矢量和场算符	1
1.2 格林函数和顶角函数, 质壳重正化参量	20
1.3 格林函数和顶角函数的生成泛函, 重正化规格条件	35
第二章 泛函积分量子化	48
2.1 量子力学振幅的路径积分表示	48
2.2 相干态和相干态全纯表象	56
2.3 全纯表象中的路径积分, 标量场的泛函积分量子化	69
2.4 用泛函积分表示的 S 算符和格林函数生成泛函	79
2.5 稳相法和按圈数的展开, 单圈图的顶角函数生成泛函	93
2.6 有效势和场的真空期望值	104
2.7 格拉斯曼代数和旋量场的泛函积分量子化	114
第三章 经典非阿贝尔规范场	129
3.1 非阿贝尔定域规范变换	129
3.2 规范场的场强张量和定域规范不变的拉格朗日函数	138
3.3 整体连续对称性的自发破坏, Goldstone 定理	151
3.4 定域规范对称性的自发破坏, Higgs 机制	159
3.5 手征对称性与零质量的旋量场*	169
3.6 手征规范对称性, 电弱统一理论*	181
3.7 规范场的动力学变量与约束, 规范场理论的哈密顿体系	194
第四章 非阿贝尔规范场的量子化	206
4.1 库仑规范下的量子化	206
4.2 协变量量子化, ξ 规范和 Faddeev-Popov 虚粒子	214
4.3 单圈图近似下的规范场顶角函数生成泛函	229
4.4 与旋量场和标量场相互作用的规范场, 么正规范、 ξ 规范和 R_ξ 规范	233

第五章 非阿贝尔规范场的重正化理论	241
5.1 关于重正化的一般讨论	241
5.2 高阶协变导数规制化	252
5.3 维数规制化方法	262
5.4 单圈图顶角函数的重正化	271
5.5 Slavnov-Taylor 恒等式, BRS 变换下的不变性	286
5.6 非阿贝尔规范场论的重正化	306
5.7 规范理论中的 γ_5 反常问题	322
第六章 重正化群方程和顶角函数的大动量渐近行为	334
6.1 Gell-Mann-Low 函数与光子传播子大动量渐近行为	334
6.2 标度不变性和重正化对它的破坏	342
6.3 质量无关的重正化和重正化群方程	348
6.4 顶角函数的大动量渐近行为, 非阿贝尔规范作用的渐近自由性	360
6.5 含复合算符的顶角函数的重正化, 算符乘积的展开*	374
附录 基本符号及公式	389
索引	398

第一章 海森伯图像中的格林函数

在量子理论中作具体的微扰论计算时,采用作用图像是比较合适的,因为在作用图像中建立的协变微扰论确实是一个方便的计算工具.但我们对格林函数或 S 矩阵的性质作普遍性的讨论时,采用海森伯图像往往更加方便.因此在正式讲授规范场本身的内容之前,作为准备,我们将在这一章中对海森伯图像中状态矢量和场算符等基本概念、格林函数和顶角函数以及它们的生成泛函的意义和重正规化规格条件等进行必要的讨论.如序言中所述,本书将用自然单位制,从而 $\hbar = c = 1$.

1.1 海森伯图像中的状态矢量和场算符

为了以后讨论的需要,在本节中我们将对海森伯图像中的状态矢量和场算符的表意作一个物理上的说明.其中有些说法虽不一定是准确的,但具有表征性意义,对我们从物理上来理解一些量有帮助.另外,入射场和出射场算符是海森伯图像中常用来标志状态矢量和 S 矩阵元的工具,因此也将在这一节中一并介绍.

1. 状态矢量和算符的基本概念

在海森伯图像中,状态矢量(简称状态)不随时间变化.对于这一点在物理上应如何理解?是不是说所讨论的状态只限于定态?回答当然是否定的.

在物理学中,体系的一个变化过程既有其特殊性又有普遍性的内涵.普遍性内涵体现在它服从的运动规律上,而其特殊性则反映为某个具体的初始条件.在海森伯图像的量子理论里,体系演变的普遍性内容已归入到力学量的变化中(这与薛定谔图像和作用图像不同),而状态矢量只起初始条件的作用,即标定某个特殊过程.因此,也可以说:在海森伯图像中,一个状态矢量代表体系的一个运动过程,而要标定一个过程,只要标出该体系任一时刻的情况即可.这样,若体系在 t_1 时刻情况为 A_1 ,在 t_2 时刻情况为 A_2 ,则该状态矢量既可记作 $|A_1, t_1\rangle$,也可记作 $|A_2, t_2\rangle$,因为两者代表同一过程.于是就有

$$\langle A_1, t_1 | A_2, t_2 \rangle = 1.$$

至于 $|A, t_1\rangle$ 和 $|A, t_2\rangle$,一般它们并不相等,因为“ t_1 时刻为 A ”和“ t_2 时刻为 A ”这两种初条件一般对应于不同的过程(除了定态以外).如果是定态,就不必标出时间,表成 $|A\rangle$ 即可.

已知体系在 t_1 时刻情况为 A , 问: 到 t_2 时刻情况为 B 的概率幅如何表示? 根据上面说明, 这一概率幅可以直接表示为 $\langle B, t_2 | A, t_1 \rangle$. 当然具体算它的值时, 还是需要知道该体系在 t_2 时刻的情况 A' , 然后通过

$$\langle B, t_2 | A, t_1 \rangle = \langle B, t_2 | A', t_2 \rangle$$

来得出其值.

同样, 在计算 t_2 时刻的算符 $\hat{L}(t_2)$ 作用到状态矢量 $|A, t_1\rangle$ 上的结果时, 首先要通过算符的变化方程把 $\hat{L}(t_2)$ 用 t_1 时刻的算符表示出来, 然后再作用到 $|A, t_1\rangle$ 上面.

在场论中, 所有算符都由场算符构成. 特别是格林函数可表为场算符编时乘积的真空矩阵元. 因此, 重要的是场算符的物理意义. 下面分别对标量场和旋量场加以说明, 并对两者进行比较.

先看标量场. 设场局限于体积 $V = L^3$ 的立方腔内, 这时标量场算符 $\hat{\varphi}(x)$ 和它的正则共轭场 $\hat{\pi}(x)$ 可以展开为^①

$$\hat{\varphi}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} [\hat{c}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{d}_{\mathbf{k}}^\dagger(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}], \quad (1.1.1)$$

$$\hat{\pi}(x) = -i \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\omega}{2V}} [\hat{d}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}],$$

其中, $x = (\mathbf{x}, t)$, 而

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} (m_1 \mathbf{e}_1 + m_2 \mathbf{e}_2 + m_3 \mathbf{e}_3), \quad (1.1.1a)$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{e}_3$ 为沿立方体三个边线的单位矢量; m_1, m_2 和 m_3 为整数; $\omega \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. 式 (1.1.1) 可看作是场算符在 $\mathbf{x}$ 表象和 $\mathbf{k}$ 表象中的变换关系式.

通过三维傅里叶变换可从 $\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ 和 $\hat{\pi}^\dagger(\mathbf{x}, t)$ 解出 $\hat{c}_{\mathbf{k}}(t)$ 和 $\hat{d}_{\mathbf{k}}^\dagger(t)$, 注意, 仅从 $\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ 一式不可能分别确定 $\hat{c}_{\mathbf{k}}(t)$ 和 $\hat{d}_{\mathbf{k}}^\dagger(t)$, 而只能定出它们的组合 $\hat{c}_{\mathbf{k}}(t) + \hat{d}_{-\mathbf{k}}^\dagger(t)$.

利用 $\hat{\varphi}$ 和 $\hat{\pi}$ 以及 $\hat{\varphi}^\dagger$ 和 $\hat{\pi}^\dagger$ 的对易关系不难求出下列对易关系式

$$\begin{aligned} [\hat{c}_{\mathbf{k}}(t), \hat{c}_{\mathbf{k}'}^\dagger(t)] &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \\ [\hat{d}_{\mathbf{k}}(t), \hat{d}_{\mathbf{k}'}^\dagger(t)] &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

其余对易子为零. 算符

$$\hat{n}_{\mathbf{k}}^{(+)}(t) \equiv \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger(t) \hat{c}_{\mathbf{k}}(t) \quad (1.1.3)$$

^① 参见量子场论的书.

代表 t 时刻动量为 $\mathbf{k}$ 的正粒子数算符, 而

$$\hat{n}_{\mathbf{k}}^{(-)}(t) \equiv \hat{d}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(t) \hat{d}_{\mathbf{k}}(t) \quad (1.1.4)$$

代表 t 时刻动量为 $\mathbf{k}$ 的反粒子数算符. 正、反粒子总数算符 $\hat{n}^{\pm}$ 则为 $\hat{n}_{\mathbf{k}}^{\pm}$ 对所有 $\mathbf{k}$ 的和

$$\hat{n}^{(\pm)}(t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{n}_{\mathbf{k}}^{(\pm)}(t). \quad (1.1.5)$$

当长度 L 取为极大的值时, 可把求和化为积分:

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k.$$

令

$$\begin{aligned} \hat{c}(\mathbf{k}, t) &= \sqrt{\frac{2\omega V}{(2\pi)^3}} \hat{c}_{\mathbf{k}}(t), \\ \hat{d}^{\dagger}(\mathbf{k}, t) &= \sqrt{\frac{2\omega V}{(2\pi)^3}} \hat{d}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(t), \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

则式 (1.1.1) 可以化成

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(x) &= \int d\tilde{k} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} [\hat{c}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \hat{d}^{\dagger}(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}], \\ \hat{\pi}(x) &= -i \int d\tilde{k} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} [\hat{d}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - \hat{c}^{\dagger}(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}], \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

其中

$$\int d\tilde{k} \equiv \int \frac{d^3k}{2\omega} = \int d^4k \delta(k^2 + m^2) \theta(k_0) \quad (1.1.8)$$

代表相对论不变的三维积分. 算符 $\hat{c}(\mathbf{k}, t)$ 和 $\hat{c}^{\dagger}(\mathbf{k}, t)$ 的对易关系为

$$[\hat{c}(\mathbf{k}, t), \hat{c}^{\dagger}(\mathbf{k}', t)] = 2\omega \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (1.1.9)$$

因为按式 (1.1.6)

$$[\hat{c}(\mathbf{k}, t), \hat{c}^{\dagger}(\mathbf{k}', t)] = \frac{2\omega V}{(2\pi)^3} [\hat{c}_{\mathbf{k}}(t), \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}(t)] = \frac{2\omega V}{(2\pi)^3} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'},$$

从而^①

$$\int d^3k' [\hat{c}(\mathbf{k}, t), \hat{c}^{\dagger}(\mathbf{k}', t)] \sim \frac{(2\pi)^3}{V} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{2\omega V}{(2\pi)^3} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = 2\omega$$

^① 从式 (1.1.1a) 可得出 $\mathbf{k}$ 的取值密度为 $\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 = \frac{V}{(2\pi)^3}$, 于是 $\sum_{\mathbf{k}'} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k'$.

与直接用式 (1.1.9) 代入后计算的结果一致.

同样, 对反粒子也有对易关系

$$[\hat{d}(\mathbf{k}, t), \hat{d}^\dagger(\mathbf{k}', t)] = 2\omega\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (1.1.10)$$

算符 $\hat{n}^{(+)}(\mathbf{k}, t) \equiv \hat{c}^\dagger(\mathbf{k}, t)\hat{c}(\mathbf{k}, t)$ 代表不变 $\mathbf{k}$ 空间 (见式 (1.18)) 中的 t 时刻粒子数密度算符, 因为由以上诸式可得

$$\int d\tilde{k} \hat{c}^\dagger(\mathbf{k}, t)\hat{c}(\mathbf{k}, t) \sim \frac{(2\pi)^3}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\omega} \frac{2\omega V}{(2\pi)^3} \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger(t)\hat{c}_{\mathbf{k}}(t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{n}_{\mathbf{k}}^{(+)}(t) = \hat{n}^{(+)}(t). \quad (1.1.11)$$

从式 (1.1.9) 和 (1.1.11) 不难得出, 若 $|n, t\rangle$ 为粒子数的本征态, 则 $\hat{c}^\dagger(\mathbf{k}, t)$ 作用到 $|n, t\rangle$ 上面时, 所得的结果仍为粒子数的本征态, 但本征值增加 1. 在下文中我们有时简单地称 $\hat{c}^\dagger(\mathbf{k}, t)$ 为在“在 t 时刻发射动量为 $\mathbf{k}$ 的正粒子的算符”, 尽管这一名称原本属于 $\hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger(t)$ (注意, $\hat{c}^\dagger(\mathbf{k}, t)$ 与 $\hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger(t)$ 在量纲上就不相同).

在自由场情况下, $\hat{c}(\mathbf{k}, t)$ 和 $\hat{d}^\dagger(\mathbf{k}, t)$ 随时间的变化具有简单的形式

$$\begin{aligned} \hat{c}(\mathbf{k}, t) &= \hat{c}(\mathbf{k})e^{-i\omega t}, \\ \hat{d}^\dagger(\mathbf{k}, t) &= \hat{d}^\dagger(\mathbf{k})e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

于是 $\hat{\varphi}(x)$ 的展开式可写成

$$\hat{\varphi}(x) = \int d\tilde{k} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} [\hat{c}(\mathbf{k})e^{ikx} + \hat{d}^\dagger(\mathbf{k})e^{-ikx}], \quad (1.1.13)$$

其中, $kx = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$ 代表四维标积. 这时仅从 $\hat{\varphi}(x)$ 即可定出 $\hat{c}(\mathbf{k}, t)$ 和 $\hat{d}^\dagger(\mathbf{k}, t)$, 因为它们随时间的变化不同. 相应的公式为

$$\begin{aligned} \hat{c}(\mathbf{k}) &= - \int d^3x \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ikx} \overleftrightarrow{\partial}_4 \hat{\varphi}(x), \\ \hat{d}^\dagger(\mathbf{k}) &= \int d^3x \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikx} \overleftrightarrow{\partial}_4 \hat{\varphi}(x), \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

其中, $f(x) \overleftrightarrow{\partial}_4 \hat{\varphi}(x)$ 代表 $f(x)[\partial_4 \hat{\varphi}(x)] - [\partial_4 f(x)]\hat{\varphi}(x)$.

$\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ 是否代表 $\mathbf{x}$ 表象中粒子的吸收算符? 在非相对论的二次量子化理论中, 零自旋粒子的薛定谔波函数在量子化以后的算符 $\hat{\phi}_s(\mathbf{x}, t)$ 可赋予这样的意义, 因为它满足下述对易关系

$$[\hat{\phi}_s(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}_s^\dagger(\mathbf{x}', t)] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (1.1.15)$$

而且

$$\int d^3x \hat{\phi}_s^\dagger(\mathbf{x}, t)\hat{\phi}_s(\mathbf{x}, t) = \hat{n}(t). \quad (1.1.16)$$

$\hat{n}(t)$ 为总粒子数算符. 我们可以简单地称 $\hat{\phi}_s(\mathbf{x}, t)$ 为在 t 时刻吸收一个坐标为 $\mathbf{x}$ 的粒子的算符.

在相对论性场论中, 情况有所不同. 首先, 相对论性的标量场算符 $\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ 包括两个部分, 它们分别涉及正、反粒子自由度, 需要分开. $\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ 的分解式为

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \hat{\varphi}_{(+)}(\mathbf{x}, t) + \hat{\varphi}_{(-)}(\mathbf{x}, t), \quad (1.1.17)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{(+)}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} \hat{c}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\tilde{\mathbf{k}} \hat{c}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \\ \hat{\varphi}_{(-)}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} \hat{d}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\tilde{\mathbf{k}} \hat{d}^{\dagger}(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

其次, 这样分出来的 $\hat{\varphi}_{(+)}(\mathbf{x}, t)$ 和 $\hat{\varphi}_{(-)}(\mathbf{x}, t)$ 也并不分别就是在 t 时刻吸收一个坐标为 $\mathbf{x}$ 的正粒子和发射一个坐标为 $\mathbf{x}$ 的反粒子的算符, 关于这一点, 我们将在下面进一步说明. 实际上, 在相对论性场论中, 标量粒子的确切含义是标量场的量子, 它并不完全相似于量子力学中的粒子. 只在粗略的意义上 (或者说在作非相对论近似后) 才可以把 $\hat{\varphi}_{(+)}(\mathbf{x}, t)$ 称为 t 时刻吸收坐标为 $\mathbf{x}$ 的正粒子的算符^①, 把 $\hat{\varphi}_{(-)}(\mathbf{x}, t)$ 称为 t 时刻发射坐标为 $\mathbf{x}$ 的反粒子的算符. 这样, $\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ 作为两者之和可以粗略地看成是 $\mathbf{x}$ 表象中粒子数减少算符, 因发射一个反粒子或吸收一个正粒子都使粒子数减少 1. 同理 $\hat{\varphi}^{\dagger}(\mathbf{x}, t)$ 可粗略地称为 $\mathbf{x}$ 表象中粒子数增加算符. 当然, 也可把 $\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ 称作 $\mathbf{x}$ 表象中反粒子数增加算符, 把 $\hat{\varphi}^{\dagger}(\mathbf{x}, t)$ 称作反粒子数减少算符.

值得指出的是, 无论是否存在场之间的相互作用, 算符 $\hat{c}(\mathbf{k}, t)$, $\hat{d}(\mathbf{k}, t)$, $\hat{c}^{\dagger}(\mathbf{k}, t)$, $\hat{d}^{\dagger}(\mathbf{k}, t)$ 以及 $\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ 和 $\hat{\varphi}^{\dagger}(\mathbf{x}, t)$ 的意义都一样. 有或没有相互作用的差别, 只在于不同时刻的算符之间关系不同, 不影响算符本身的意义. 另外, 以上所说的吸收和发射的粒子都是指裸粒子. 那种认为在有相互作用时海森伯图像中的吸收和发射算符是指物理粒子的吸收和发射算符的看法, 是不正确的.

根据上面的讨论, $\hat{\varphi}^{\dagger}(\mathbf{x}_1, t_1)$ 作用到某个态 $|a\rangle$ 上所得的新态 $\hat{\varphi}^{\dagger}(\mathbf{x}_1, t_1)|a\rangle$, 与原态的差别在于: 在 t_1 时刻, 后者比前者在 $\mathbf{x}_1$ 处 (裸) 粒子数增加 1 个 (在上述粗略意义上). 由此还可看出, $\hat{\varphi}^{\dagger}(\mathbf{x}, t_1)|a\rangle$ 不等于 $\hat{\varphi}^{\dagger}(\mathbf{x}, t_2)|a\rangle$.

对于旋量场可以类似地处理, $\hat{\psi}(x)$ 的展开式为

$$\hat{\psi}(x) = \sum_{r=\pm 1} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2EV}} [\hat{a}_{r,\mathbf{p}}(t) u_{r,\mathbf{p}}(x) + \hat{b}_{r,\mathbf{p}}^{\dagger}(t) v_{r,\mathbf{p}}(x)], \quad (1.1.19)$$

^① 注意, $\hat{\varphi}_{(+)}$ 与薛定谔波函数 ϕ_s 的量纲不同. 比较完全的说法是, 在非相对论近似下 $\sqrt{2m}\hat{\varphi}_{(+)}(\mathbf{x}, t)$ 代表 t 时刻吸收坐标为 $\mathbf{x}$ 的正粒子的算符, 见下文.

其中, $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}$, 而

$$u_{r,\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = u_r(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad v_{r,\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = v_r(\mathbf{p})e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}},$$

$$u_r(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+M}\chi_r(\mathbf{p}) \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{\sqrt{E+M}}\chi_r(\mathbf{p}) \end{pmatrix},$$

$$v_r(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{\sqrt{E+M}}\chi_{-r}(\mathbf{p}) \\ \sqrt{E+M}\chi_{-r}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \quad (1.1.20)$$

$\chi_r(\mathbf{p})$ 为泡利旋量^①, 并且是 $\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$ 的本征态:

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\chi_r(\mathbf{p}) = r\chi_r(\mathbf{p}), \quad r = \pm 1. \quad (1.1.21)$$

$u_r(\mathbf{p})$ 和 $v_r(\mathbf{p})$ 的规格化条件为

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})u_{r'}(\mathbf{p}) = 2M\delta_{rr'},$$

$$\bar{v}_r(\mathbf{p})v_{r'}(\mathbf{p}) = -2M\delta_{rr'}. \quad (1.1.22)$$

$\hat{a}_{r,\mathbf{p}}$ 和 $\hat{b}_{r,\mathbf{p}}$ 等满足下述反对易关系

$$\{\hat{a}_{r,\mathbf{p}}(t), \hat{a}_{r',\mathbf{p}'}^\dagger(t)\} = \delta_{rr'}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'},$$

$$\{\hat{b}_{r,\mathbf{p}}(t), \hat{b}_{r',\mathbf{p}'}^\dagger(t)\} = \delta_{rr'}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}. \quad (1.1.23)$$

当 $V \rightarrow \infty$ 时, 同样可将求和化为积分, 这时

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{r=\pm 1} \int d\tilde{\mathbf{p}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} [\hat{a}_r(\mathbf{p}, t)u_{r,\mathbf{p}}(\mathbf{x}) + \hat{b}_r^\dagger(\mathbf{p}, t)v_{r,\mathbf{p}}(\mathbf{x})]. \quad (1.1.24)$$

算符 $\hat{a}_r(\mathbf{p}, t)$ 和 $\hat{b}_r^\dagger(\mathbf{p}, t)$ 的定义与标量场情况相似, 即

$$\hat{a}_r(\mathbf{p}, t) = \sqrt{\frac{2EV}{(2\pi)^3}} \hat{a}_{r,\mathbf{p}}(t),$$

$$\hat{b}_r^\dagger(\mathbf{p}, t) = \sqrt{\frac{2EV}{(2\pi)^3}} \hat{b}_{r,\mathbf{p}}^\dagger(t).$$

^① $\chi_r(\mathbf{p})$ 的具体表达式可参见附录.

它们满足下述反对易关系

$$\begin{aligned}\{\hat{a}_r(\mathbf{p}, t), \hat{a}_{r'}^\dagger(\mathbf{p}', t)\} &= 2E\delta_{rr'}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \\ \{\hat{b}_r(\mathbf{p}, t), \hat{b}_{r'}^\dagger(\mathbf{p}', t)\} &= 2E\delta_{rr'}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}').\end{aligned}\quad (1.1.25)$$

像标量场一样, $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$ 可分解为

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}, t) = \hat{\psi}_{(+)}(\mathbf{x}, t) + \hat{\psi}_{(-)}(\mathbf{x}, t), \quad (1.1.26)$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_{(+)}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{r=\pm 1} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\tilde{p} \hat{a}_r(\mathbf{p}, t) u_{r,\mathbf{p}}(\mathbf{x}), \\ \hat{\psi}_{(-)}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{r=\pm 1} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\tilde{p} \hat{b}_r^\dagger(\mathbf{p}, t) v_{r,\mathbf{p}}(\mathbf{x}).\end{aligned}\quad (1.1.27)$$

粗略地说, 它们分别代表 $\mathbf{x}$ 表象中正粒子的吸收算符和反粒子的发射算符.

2. 关于 $\mathbf{x}$ 表象中吸收和发射算符问题的讨论

我们将说明, 在相对论理论的框架中, 要定义坐标表象中粒子的吸收和发射算符是有一定问题的. 先来考察标量场情况. 从 $\hat{c}(\mathbf{k}, t)$ 和 $\hat{c}^\dagger(\mathbf{k}, t)$ 所满足的对易关系不难得出

$$\begin{aligned}[\hat{\varphi}_{(+)}(\mathbf{x}, t), \hat{\varphi}_{(+)}^\dagger(\mathbf{x}', t)] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \\ &= i\Delta_+(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, m)_{t'=t}.\end{aligned}\quad (1.1.28)$$

它并不等于 $\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$. 这表明: $\hat{\varphi}_{(+)}(\mathbf{x}, t)$ 和 $\hat{\varphi}_{(+)}^\dagger(\mathbf{x}, t)$ 所满足的对易关系与非相对论的 $\hat{\phi}_s(\mathbf{x}, t)$ 和 $\hat{\phi}_s^\dagger(\mathbf{x}', t)$ 所满足的对易关系式 (1.1.15) 不同. 从数学上看, 出现这种差异在于式 (1.1.28) 积分中多出来 $\frac{1}{2\omega}$ 因子. 这个因子同时使得

$$\hat{n}_{(+)}(t) \equiv \int d\tilde{k} \hat{c}^\dagger(\mathbf{k}, t) \hat{c}(\mathbf{k}, t) \neq \int d^3x \hat{\varphi}_{(+)}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\varphi}_{(+)}(\mathbf{x}, t),$$

即 $\hat{n}_+$ 并不能表为 $\hat{\varphi}^\dagger \hat{\varphi}$ 的体积分. 在这一点与非相对论情况的式 (1.1.16) 不同.

实际上, “对易子等于 $\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$ ” 的一对算符是 $\hat{\varphi}_{(+)}(\mathbf{x}, t)$ 和 $-2i\hat{\pi}_{(+)}(\mathbf{x}', t)$, 即

$$[\hat{\varphi}_{(+)}(\mathbf{x}, t), -2i\hat{\pi}_{(+)}(\mathbf{x}', t)] = \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}), \quad (1.1.29)$$

其中, $\hat{\pi}_{(+)}$ 为 $\hat{\pi}$ 中与正粒子有关的部分

$$\hat{\pi}_{(+)}(\mathbf{x}, t) = i \int d\tilde{k} \omega \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \hat{c}^\dagger(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (1.1.30)$$

参见式 (1.1.30), $\hat{n}_{(+)}$ 亦可表为 $-2i\hat{\pi}_{(+)}$ 与 $\hat{\varphi}_{(+)}$ 乘积的三维积分

$$\hat{n}_{(+)}(t) = -2i \int d^3\mathbf{x} \hat{\pi}_{(+)}(\mathbf{x}, t) \hat{\varphi}_{(+)}(\mathbf{x}, t). \quad (1.1.31)$$

场算符 $\hat{\varphi}$ 与非相对论的二次量子化理论中的 $\hat{\phi}_s$ (见式 (1.1.15)) 间的这一差别与下述情况直接相关联, 即由克莱因-戈登方程导出的守恒流 J_μ 第 4 分量所对应的密度为

$$\rho = i(\varphi^* \pi^* - \pi \varphi), \quad (1.1.32)$$

而在非相对论的量子力学中, 密度 ρ 却等于 $\phi_s^* \phi_s$.

如果根据量子力学中动量表象与坐标表象间的关系, 定义一个 $\mathbf{x}$ 表象中正粒子的吸收算符 $\hat{\phi}_{(+)}$:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{(+)}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{V}} \hat{c}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{(2\omega)^{1/2}} \hat{c}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (1.1.33)$$

由于 (与式 (1.1.18) 相比) 少了因子 $\frac{1}{\sqrt{2\omega}}$, 自然会有

$$[\hat{\phi}_{(+)}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}_{(+)}^\dagger(\mathbf{x}', t)] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (1.1.34)$$

$$\hat{n}_{(+)}(t) = \int d\tilde{k} \hat{c}^\dagger(\mathbf{k}, t) \hat{c}(\mathbf{k}, t) = \int d^3x \hat{\phi}_{(+)}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\phi}_{(+)}(\mathbf{x}, t),$$

它们同 $\hat{\phi}_s$ 所满足的式 (1.1.15) 和 (1.1.16) 一样.

按照上面所述的 $\hat{\phi}_{(+)}^\dagger$ 的物理意义, 状态

$$|\mathbf{x}_0, t\rangle \equiv \hat{\phi}_{(+)}^\dagger(\mathbf{x}_0, t)|0\rangle \quad (1.1.35)$$

应代表 t 时刻在 $\mathbf{x}_0$ 点有一个正粒子的情况. 于是一个具有确定坐标 $\mathbf{x}_0$ 的粒子所对应的场函数可用 $\langle 0|\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)|\mathbf{x}_0, t\rangle$ 来表示^① 其值为

$$\langle 0|\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)|\mathbf{x}_0, t\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{(2\omega)^{1/2}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} = \text{常数} \left(\frac{m}{r}\right)^{5/4} H_{5/4}^{(1)}(imr). \quad (1.1.36)$$

^① 对于一个处于状态 $|S\rangle$ 的标量粒子 (自旋为零), 相对应的场函数应即为 $\langle 0|\hat{\varphi}(\mathbf{x})|S\rangle : |S\rangle$ 可一般地表示为 $\sum_j \alpha_j \hat{c}_j^\dagger |0\rangle$, 这时将 $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$ 用展式 (1.1.17) 代入即得出

$$\langle 0|\hat{\varphi}(\mathbf{x})|s\rangle = \langle 0 \left[\sum_{\mathbf{k}} 1/\sqrt{2\omega} \hat{c}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right] \left[\sum_j \alpha_j \hat{c}_j^\dagger \right] |0\rangle = \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\omega_j V}} \alpha_j e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x}}.$$

在非相对论情况, $\sqrt{\omega_j} \approx \sqrt{m}$ (注意 c 已取为 1), 于是 $\langle 0|\hat{\varphi}(\mathbf{x})|s\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2mV}} \sum_j \alpha_j e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x}}$. 再补上随时间的变化因子 $e^{-imt - iE_j t}$, 即得 $\langle 0|\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2m}} e^{-imt} \varphi_{NR}(\mathbf{x}t)$. 其中, $\varphi_{NR}(\mathbf{x}, t)$ 为非相对论量子力学中零自旋粒子的波函数. 因子 $\frac{1}{\sqrt{2m}} e^{-imt}$ 与具体状态无关. 在量子力学中可以将它除去.

上式中 $H^{(1)}$ 代表第一类汉克尔函数, r 为 $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ 的绝对值. 当 $r \gg \frac{1}{m}$ 时, 该函数 $\sim \frac{1}{m} \left(\frac{m}{r}\right)^{7/4} e^{-mr}$. 按照此式, 具有确定坐标的粒子所对应的标量场不是定域在一点, 其扩展范围具有粒子康普顿波长 $\frac{1}{m}$ 的量级.

需要指出的是, 这样定义的 $|\mathbf{x}, t\rangle$, 虽然对同一 t 不同 $\mathbf{x}$ 的态互相正交

$$\langle \mathbf{x}', t | \mathbf{x}, t \rangle = 0, (\text{当 } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \text{ 时})$$

但对 t 不相同的类空间隔的两点 $(\mathbf{x}, t)$ 和 $(\mathbf{x}', t')$, 所相应的态并不正交, 即 (注意, 本书取自然单位制, $\hbar = c = 1$)

$$\langle \mathbf{x}', t' | \mathbf{x}, t \rangle \neq 0, \quad \text{其中 } t \neq t', (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 - (t - t')^2 > 0$$

对于自由场, 通过直接计算就可以证明这一结果. 上式意味着粒子的运动速度可超过真空中的光速, 因而是不可接受的. 这表明了式 (1.1.35) 下面关于 $|\mathbf{x}_0, t\rangle$ 状态意义的陈述并不正确.

以上讨论表明, 在相对论性场论中, 标量粒子确切的含意是指标量场的量子, 只在非相对论近似中才能定义具有确定坐标的粒子^①. 这时, $\sqrt{2m}\hat{\varphi}_{(+)}(\mathbf{x}, t)$ 和 $\sqrt{2m}\hat{\varphi}_{(+)}^\dagger(\mathbf{x}, t)$ 分别代表这种粒子在 $\mathbf{x}$ 表象中的吸收和发射算符, 因为在非相对论近似中, $\sqrt{2m}\hat{\varphi}_{(+)}(\mathbf{x}, t)$ 就等于式 (1.1.33) 所引入的 $\hat{\phi}_{(+)}(\mathbf{x}, t)$.

对于旋量场, 虽然有

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}', t) \right\} &= \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \int d^3x \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) &= \hat{n}(t), \end{aligned} \quad (1.1.37)$$

使得 $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$ 和 $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t)$ 像是 $\mathbf{x}$ 表象中的吸收和发射算符, 但由于 $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$ 和 $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t)$ 都包含有正反粒子的自由度而使以上解释发生问题. 像标量场一样, 我们要将正反粒子的部分分开 (如式 (1.1.26)). 与正粒子有关的部分由 (1.1.27) 第一式表示. 这时尽管仍有

$$\hat{n}_+(t) = \int d^3x \hat{\psi}_{(+)}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}_{(+)}(\mathbf{x}, t), \quad (1.1.38)$$

但 $\hat{\psi}_+$ 与 $\hat{\psi}_+^\dagger$ 间的反对易子不等于所需要的 δ 函数:

$$\left\{ \hat{\psi}_{(+)}(\mathbf{x}, t)_\alpha, \hat{\psi}_{(+)}^\dagger(\mathbf{x}', t)_\beta \right\} = i [S_+(\mathbf{x} - \mathbf{x}', 0) \gamma_4]_{\alpha\beta} \neq \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

^① 因此在相对论性场论中, 传播子 $\langle 0 | T \hat{\varphi}(\mathbf{x}) \hat{\varphi}^\dagger(\mathbf{x}') | 0 \rangle$ 在类空间隔不为零并不就表示粒子速度可以超过光速.