全国高等农业院校试用教材

线性代数

北京农业大学主编

农 业 出 版 社

全国高等农业院校试用教材

线　性　代　数

北京农业大学主编

农　业　出　版　社

主　编　裴鑫德（北京农业大学）
编写人　张嘉林（北京农业大学）
许煜沂（北京农业大学）
陈伟侯（北京农业大学）

全国高等农业院校试用教材
线　性　代　数
北京农业大学主编
*　*　*
责任编辑　熊建勇

农业出版社出版（北京朝内大街130号）
新华书店北京发行所发行　　农业出版社印刷厂印刷

850×1168毫米 32开本　8印张　190千字
1986年7月第1版　1986年7月北京第1次印刷
印数 1—11,000册
统一书号 13144·306　定价 1.60 元

前　言

本书是根据农牧渔业部关于编写全国高等农业院校教材的指示，按照1982年8月审订的全国高等农业院校数学课程“线性代数”教学大纲，为高等农业院校编写的《线性代数》教材。

本书主要介绍了线性代数的基础知识，同时还考虑了我国高等农业院校的实际和我国农业科学和生物科学发展的需要；叙述上力求简明易懂，便于讲授和自学。全书除安排一定数量的例题外，每章还配有必要的习题，可作为课外练习。书后附有习题答案供参考。全书内容可供40左右学时讲授，其具体讲授，各院校可根据不同专业实际，对内容作必要的变动或增减，带“*”号部分可以不讲。

本书除可作高等农业院校教材外，还可作医学、生物等专业的教学参考书和农业科技工作者和生物科学工作者的参考书。

本书由裴鑫德同志担任主编，参加编写的还有张嘉林、许煜沂、陈伟侯同志。

由于水平所限，编写中难免有不妥之处，望读者批评指正。

编　者

1984年12月

目　　录

前　言
第一章　行列式 ……………………………………………… 1
　§1.1　线性方程组和行列式 …………………………… 1
　§1.2　n 阶行列式 ……………………………………… 3
　§1.3　行列式的基本性质 ……………………………… 9
　§1.4　行列式按行(列)展开 ………………………… 16
　§1.5　克莱姆法则 …………………………………… 26
　习题一 ……………………………………………… 30
第二章　矩阵及其运算 ………………………………… 34
　§2.1　矩阵概念 ……………………………………… 34
　§2.2　矩阵的基本运算 ……………………………… 36
　§2.3　方阵的行列式 ………………………………… 44
　§2.4　逆矩阵 ………………………………………… 48
　§2.5　矩阵的转置 …………………………………… 58
　§2.6　矩阵的分块运算 ……………………………… 68
　§2.7　矩阵的迹和矩阵的模 ………………………… 77
　§2.8　矩阵的秩 ……………………………………… 82
　§2.9　矩阵的初等变换 ……………………………… 84
　§2.10　初等矩阵 …………………………………… 89
　§2.11　利用初等变换求逆矩阵 …………………… 97
　习题二 ……………………………………………… 99
第三章　线性方程组 ………………………………… 106
　§3.1　引言 ………………………………………… 106
　§3.2　n维向量 …………………………………… 109

§3.3 向量的线性关系…… 111
§3.4 齐次线性方程组…… 123
§3.5 非齐次线性方程组…… 132
习题三 …… 139
第四章 线性方程组的数值解法 …… 142
§4.1 消去法（高斯消去法） …… 142
§4.2 主元素消去法（高斯—约当消去法） …… 145
§4.3 迭代法…… 149
习题四 …… 159
第五章 二次型 …… 161
§5.1 向量的内积…… 161
§5.2 矩阵的特征值与特征向量…… 168
§5.3 相似矩阵…… 177
§5.4 实对称矩阵的对角形…… 187
§5.5 二次型及其矩阵表示…… 198
§5.6 线性变换与标准形…… 203
§5.7 规范形…… 220
§5.8 正定二次型…… 225
习题五 …… 233
习题答案…… 238

第一章 行 列 式

§1.1 线性方程组和行列式

在初等数学中，我们已经研究过两个未知量和三个未知量的线性方程组．但是许多从理论和实际问题里导出的线性方程组，常常含有更多的未知量，并且未知量的个数与方程的个数也不一定相等．因此，我们需要研究含有任意个未知量的任意个方程的线性方程组问题．

线性方程组的一般形式是：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

其中 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 代表未知量，a_{ij} ($i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$) 代表未知量的系数，$b_1, b_2, \cdots, b_m$ 代表常数项．

对于含有两个未知量的两个方程所组成的线性方程组和含有三个未知量的三个方程所组成的线性方程组，从中学数学中我们已经知道，可以用二阶行列式、三阶行列式分别来解．

例如，含有两个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (2)$$

当它的未知量系数构成的二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

时，则方程组(2)有唯一的一组解，其解为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

对于含有三个未知量的三个方程所组成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{3}$$

当它的未知量的系数构成的三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组（3）有唯一一组解，为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

本章的目的是要把二阶和三阶行列式推广到 n 阶的情形，并

且利用 n 阶行列式来研究解决含有 n 个未知量的 n 个方程所组成的线性方程组问题. 为此，下面我们来介绍 n 阶行列式.

§1.2 n 阶行列式

一、排列及其逆序数

为了给出 n 阶行列式的定义，我们首先来观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \qquad (1)$$

中每一项构成的规律.

首先我们看到（1）中右端每项都是三个元素的乘积，这三个元素取自行列式中的不同行和不同列，即行列式中每行有一个，每列有一个，于是（1）式右端的每一项除正负号外都可以写成乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，这里三个元素的第一个下标（称行标）分别为 1, 2, 3（即按自然数由小到大的顺序），而第二个下标（称列标）p_1, p_2, p_3 是 1, 2, 3 三个数的某一个排列.

其次，我们写出（1）中右端各项的第二个下标的排列

123, 231, 312,

321, 132, 213,

它们是 1,2,3 三个数字的六种不同的排列. 因为 1,2,3 三个数字共有 $3! = 6$ 种不同的排列，而每一排列恰好对应（1）中右端的一个项，所以三阶行列式，一共有六项.

另外（1）中右端各项都带有符号，由于各项的第一个下标（行标）都按自然数由小到大的顺序排列，所以各项所带符号只

与第二个下标（列标）的排列有关，为了说明符号与排列的关系，下面我们引进逆序数的概念.

如果对于 n 个不同的元素，我们规定各元素之间有一个标准顺序，例如 n 个不同的自然数，可以规定由小到大为标准顺序，于是在这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后顺序与标准顺序不同时，就说这两个元素有一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数称为这个**排列的逆序数**. 例如，在排列 132 中，3 比 2 大，但 3 排在 2 前面，所以对 3 和 2 这两个元素来说有一个逆序（注意，我们规定自然数的标准顺序为由小到大的顺序，以下均同）并且排列 132 中只有这一个逆序，所以排列 132 的逆序数为 1. 又如排列312 有二个逆序，逆序数为 2，排列 321 有三个逆序，逆序数为 3.

例 1　求排列 43251 的逆序数.

解　对于排列 43251 它的逆序数的计算如下：

1 前面比 1 大的数码有四个(4,3,2,5)，故逆序数为 4；

2 前面比 2 大的数码有两个(4,3)，故逆序数为 2；

3 前面比 3 大的数码有一个(4)，故逆序数为 1；

4 前面没有数码，逆序数为 0；

5 是最大数，故逆序数为 0；

于是排列 43251 的逆序数为

$$4+2+1+0+0=7.$$

如果一个排列的逆序数是偶数，就称该排列为**偶排列**，否则称为**奇排列**. 不难验证在三个数码 1，2，3 的所有六个排列中，123，231 和 312 这三个是偶排列，其余三个是奇排列. 于是可知(1)中右端各项所带的符号是由第二个下标(列标)排列 $p_1p_2p_3$ 的奇偶性决定的. 当列标排列的逆序数为偶数时该项带正号；为奇数时该项带负号. 因此（1）式右端各项所带的正负号可以用 $(-1)^t$ 来表示，其中 t 为该项列标排列的逆序数. 于是三阶行列式

（1）可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，Σ 表示对 1, 2, 3 三个数的所有排列取和.

二、对 换

如果把一个排列里的任意两个元素进行对换，而其余元素保持不动，这样就得到一个新的排列，对于排列所施行的这种变换叫做一个**对换**. 关于对换有以下两个定理.

定理1 一个排列中任意两个元素对换，都改变排列的奇偶性.

证明 Ⅰ 先证对换相邻两个元素的情况.

设给定的排列为

$$M\ a\ b\ N, \tag{2}$$

其中 a, b 为相邻的两个元素，M 表示元素 a 前面的 m 个元素，N 表示元素 b 后面的 n 个元素. 如果将 a, b 对换，则排列（2）变换成排列

$$M\ b\ a\ N, \tag{3}$$

比较排列(2)与(3)，由于属于 M, N 的元素位置未变，所以这些元素所构成的逆序数没有改变. 同时 a、b 与 M、N 间的元素所构成的逆序数也未改变. 如果在排列（2）中 $a<b$，则 a, b 对换就增加一个逆序数. 如果 $a>b$，则 a, b 对换就减少一个逆序数. 因此，不论哪一种情况，排列的奇偶性都有改变.

Ⅱ 再证一般的情形.

设给定排列为

$$M\ a\ N\ b\ P, \tag{4}$$

即 a 与 b 之间有 n 个元素，元素 a 前有 m 个元素，P 表示元素 b 后有 p 个元素.

先让元素 a 向右移动，依次与 N 中的 n 个元素对换，这样进行了 n 次相邻两元素的对换后，（4）变为

$$M\ N\ a\ b\ P, \tag{5}$$

再让元素 b 往左移动，依次与 a 及 N 中的 n 个元素对换，这样又经过了 $n+1$ 次相邻两元素的对换后，（5）就变为

$$M\ b\ N\ a\ P, \tag{6}$$

排列（6）正是对（4）施行 a，b 对换所得到的排列. 因此，对（4）施行 a, b 对换，就相当于对（4）连续施行 $2n+1$ 次相邻元素的对换. 由Ⅰ知，每经过一次相邻两元素的对换，都改变排列的奇偶性，由于 $2n+1$ 为奇数，所以排列（4）与（6）的奇偶性相反. 于是定理证毕.

定理 2　当 $n\geqslant 2$ 时，n 个元素的奇排列与偶排列的个数相等，各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明　n 个元素的所有排列数，就等于这 n 个元素的全排列数，即为 $n!$. 下面我们来证明，n 个元素的奇排列数与偶排列数相等.

设 n 个元素的奇排列共有 p 个，偶排列共有 q 个. 对这 p 个奇排列每一个都对换头两个元素，则由定理 1，我们就得到 p 个偶排列，显然这 p 个偶排列是各不相同的. 而我们前面假设共有偶排列为 q 个，所以 $p\leqslant q$. 同样，对 q 个偶排列每一个都对换头两个元素，就得 q 个不同的奇排列由假设共有 p 个奇排列，所以 $q\leqslant p$，因此必有 $p=q$，即奇排列与偶排列的总数相等，又因两种排

列共有 $n!$ 个，而 $n\geqslant 2$，所以 $n!$ 是一偶数．因此奇排列与偶排列的个数各为$\frac{n!}{2}$．证毕．

三、n 阶行列式

定义 设有 n^2 个数 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$，把它们排列成 n 行、n 列的表，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 n 阶行列式，它是所有满足以下条件的各项的代数和：

1．每一项都是 n 个元素的乘积，这 n 个元素来自行列式的不同行及不同列，因此每项可以写成下面的一般形式

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中第一个下标是按 $1, 2, \cdots, n$ 顺序排列，第二个下标 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的某一个排列．

2．每项的符号为$(-1)^t$，其中 t 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，即当 $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列时该项带正号，当 $p_1p_2\cdots p_n$ 为奇排列时该项带负号．

3．因为 n 个数字的所有排列共有 $n!$ 个，所以这样的项共有 $n!$ 个，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}, \qquad (7)$$

其中"Σ"为对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和，数 $a_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为行列式的元素.

显然 n 阶行列式正是前面所说的二阶和三阶行列式的推广，特别地，当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a_{11}|$ 就是数 a_{11} 本身.

定义中的一般项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 也可以改写成 $a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$，即第一下标 $q_1q_2\cdots q_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 而第二下标为自然数标准顺序 $1,2,\cdots,n$. 此时该项的符号为 $(-1)^t$，其中 t 为排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数. 因此，n 阶行列式也可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}, \qquad (8)$$

其中"Σ"是对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 求和.

例 1 试计算

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}.$$

解 D 是一个四阶行列式，按定义 D 是一个 $4!=24$ 项的代数和，然而在这 24 项里除了 $acfh$, $adeh$, $bdeg$, $bcfg$ 这四项外，其余的项都至少有一个因子为 0. 与上面四项对应的排列依次是 1234，1324，4321，4231 它们的排列逆序数分别为 0，1，6，5 所以

$$D=(-1)^0acfh+(-1)^1adeh+(-1)^6befg+(-1)^5bcfg$$
$$=acfh-adeh+befg-bcfg.$$

例 2 证明三角形行列式（其中未标示的元素都是零）

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ & a_{22}\cdots a_{2n} \\ & \ddots \quad \vdots \\ & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};\ D_2=\begin{vmatrix} & & a_{1n} \\ & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

证明 因为 D_1 只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项，其余的项全为零，所以

$$D_1=(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

其中 t 为 $123\cdots n$ 排列的逆序数，故为 0。

D_2 也只有 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 这一项，所以

$D_2=(-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$（其中 t 为 $n(n-1)\cdots 21$ 排列的逆序数）

$$=(-1)^{1+2+\cdots+(n-1)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

证毕。

§1.3 行列式的基本性质

上节已经给出了 n 阶行列式的定义，根据定义，当然可以计算 n 阶行列式的值，但是直接根据定义来计算 n 阶行列式的值是非常麻烦的，一般都不采用，这节我们来讨论 n 阶行列式的基本性质，利用这些性质，可以简化行列式的计算。

我们将行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行列互换而不改变各行、各列的顺序，得到的行列式

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{n2} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为**行列式 D 的转置行列式**（D 的转置行列式也常记成 D^T）。

性质 1　行列式与它的转置行列式相等。

证明　记 D 的转置行列式

$$D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots b_{nn} \end{vmatrix},$$

即　$b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，按定义

$$D'=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

其中 t 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数。

又由 §1.2中（8）式有

$$D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

故

$$D'=D.$$

性质 2　交换行列式的两行（列），行列式只改变符号.

证明　设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 D 交换第 i，j 两行后得到的，即当 $k\neq i$，$k\neq j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}(p=1,2,\cdots,n)$；当 $k=i,j$ 时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$（$p=$

$1,2,\cdots,n$)。于是

$$D_1=\sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}$$
$$=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}$$
$$=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n},$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为按标准顺序排列的，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数。又设排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1 则有 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$，所以

$$D_1=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}$$
$$=-\sum(-1)^{t_1} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}$$
$$=-D.$$

因此 D 与 D_1 的符号相反，证毕。

交换行列式两列的情形，可以利用性质 1 归结到交换两行的情形。

由性质 1 可知，凡是行列式对于行成立的性质，对于列也成立，反过来也如此。因此对以下的性质，我们只对行来加以证明就够了。

推论 1　如果一个行列式有两行（列）完全相同，则这个行列式等于零。

证明　把这相等的两行交换，则由性质 2 得 $D=-D$，故 $D=0$，证毕。

性质 3　行列式的某一行（列）的所有元素乘以某个数 k，等于用数 k 乘这个行列式。

证明　设 D_1 是行列式 D 的第 i 行的所有元素乘以 k 后得到的行列式。则

$$D_1=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots(ka_{ip_i})\cdots a_{np_n}$$
$$=k\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$
$$=kD.$$