

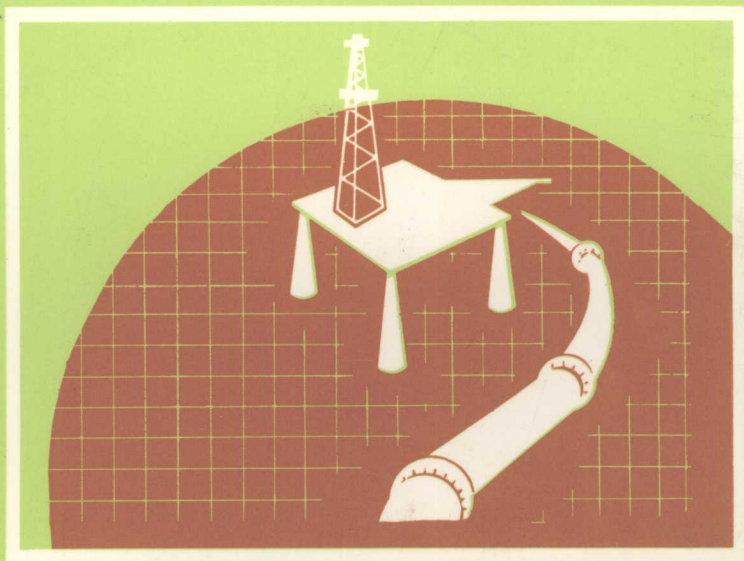
有限元素程式

—在地工力學之應用—

PROGRAMMING THE
FINITE ELEMENT METHOD
with application to geomechanics

原著者：I. M. Smith

譯述者：劉弘祥
李煜齡



科技圖書股份有限公司

PROGRAMMING THE FINITE ELEMENT METHOD

with application to geomechanics

譯述者

江苏工业学院图书馆
藏书章

科技圖書股份有限公司

本公司經新聞局核准登記
登記證局版台業字第1123號

書名：有限元素程式：在地上力學之應用

原著者：I. M. Smith

評述者：劉弘祥 李煜齡

發行人：趙國華

發行者：科技圖書股份有限公司

台北市重慶南路一段49號四樓之一

電話：3118308・3118794

郵政劃撥帳號 0015697-3

七十六年六月初版

特價新台幣180元

譯 序

近二十年來，大地工程上最重要的發展之一，無疑的，乃是成功的將有限元素法應用於解析大地工程的問題，但是能以專書介紹此方法的實不多見，而本書可說是此方面最新的好書。

誠如原作者所述“現時有許多教課書，描述有限元素法分析的原理，及其可能解析實際工程問題的範疇，唯通常其對於如何組程式，以解決實際的問題，往往付之闕如”。針對此項缺憾，本書作者特別建立一套共 64 個副程式庫，並利用該副程式的組合，提出 38 個應用程式，可用以解決實際問題。這可說是本書的最大特色所在。

本書共分為十章，第一章為說明計算機在硬體的發展與軟體的特性。第二章敘述有限元素法的基本原理。第三章介紹各個副程式的功用，以及組合的方法。第四章討論樑與平版在靜態下的平衡問題。第五章處理線性固體的靜態分析。第六章研究材料的非線性問題。第七章探討流體流動問題。第八章偶合流體與固體一併考慮。第九章解決振動問題。第十章處理樁承载力與可打擊性的問題。除了這些應用於大地力學的問題之外，本書所述的方法與程式尚可應用於其他領域，例如結構力學及水資源方面。因此，本書對於從事於土木、水利和建築的工程師而言，可說是不可或缺的工具書。

譯者不揣淺陋，在科技圖書公司趙國華先生的支持下，將本書譯為中文，期能助益於有志於此門科學却遭遇語言困難之士。本書英文版有數處筆誤，譯者儘可能予以更正，期能以完美的內容與讀者分享。本書在編譯期間承蒙游淑真小姐謄寫，校稿，及吳秀娟小姐打字，謹在此一併誌謝。本書雖已做過多次校正，恐仍有疏漏之處，尚祈識者惠予批評、指正，譯者不勝感激！

劉弘祥·李煜齡 謹識
76.2.28 于國立交通大學

誌 謝

本書編纂期間，承蒙下列同仁與學生協助：

I. A. Macleod, W. Duncan, S. Kay, R.A. Fraser, R. Boorman, P. Newton, D. Lewis, R. Hobbs, F. Molenkamp, Y.K. Chin, P.C. Suen, I. Gradwell, D.V. Griffiths, Y K. Chow, N.M. Salim, D. Coleman, K. Robins on, C. Greenough.

並感謝 SERC, Computer Board 與 British 等機關慷慨提供計算機時間與學生支援。

工業先進給予的支援與鼓勵，在此一併誌謝。

計算機程式

本書所敘述之全部程式，已由作者建立在磁帶上，並且一部分程可從 NAG 有限公司取得，其地址為 7, Banbury Road, Oxford, OX2 6NN。

有限元素程式：在地工力學之應用

目 錄

誌 謝

譯 序

第一章 前言：計算機策略

1.0 緒 論	1
1.1 計算機硬體	2
1.2 指令格式	3
1.3 運算方式	3
1.4 儲存處理	4
1.5 “迷你”計算機	5
1.6 向量與陣列處理器	6
1.7 軟 體	7
1.8 “副程式”或“程式式”的方便性	10
1.9 程式庫	13
1.10 結構化程式	14
1.11 其他語言	16
1.12 結 論	17
1.13 參考文獻	18

第二章 以有限元素法離散空間

2.0 緒 論	20
2.1 桿件元素	20
2.2 慣性矩陣	23
2.3 特徵值方程式	24

2 有限元素程式：在地工力學之應用

2.4	樑元素	25
2.5	樑的慣性矩陣	27
2.6	受軸向力的樑	28
2.7	在彈性基礎上的樑	29
2.8	離散過程通論	29
2.9	元素勁度的另一導證法	30
2.10	二維元素：平面應力與應變	32
2.11	能量導論	37
2.12	平面元素的慣性矩陣	38
2.13	軸對稱的應力與應變	38
2.14	三維的應力與應變	39
2.15	平版彎曲元素	41
2.16	固體元素方程式總結	45
2.17	層流：穩定狀態	46
2.18	能量推導	46
2.19	流體流動：時變狀態	47
2.20	具有水平對流之流體流動	48
2.21	耦合的方程式：拜爾特壓密	49
2.22	結 論	51
2.23	參考文獻	51

第三章 有限元素計算的程式

3.0	緒 論	53
3.1	局部座標	53
3.2	數值積分	56
3.3	組合元素	57
3.4	結合邊界條件	60
3.5	使用建立區的程式	62
3.6	黑盒子常式	63
3.7	特殊目的常式	65

3.8	平衡方程式的解	81
3.9	特徵值與特徵向量的計算	82
3.10	一階時間相依問題的解	85
3.11	偶合時變問題的解	86
3.12	二階時間相依問題的解	89
3.13	結 論	96
3.14	參考文獻	97

第四章 平版與樑的靜態平衡

4.0	緒 論	98
4.1	程式 4.0	98
4.2	程式 4.1	105
4.3	程式 4.2	109
4.4	程式 4.3	113
4.5	程式 4.4	117
4.6	程式 4.5	120
4.7	應用於地工力學	125
4.8	緒 論	125
4.9	參考文獻	126

第五章 線彈性體的靜態分析

5.0	緒 論	127
5.1	程式 5.0	127
5.2	程式 5.1	137
5.3	程式 5.2	141
5.4	程式 5.3	145
5.5	程式 5.4	153
5.6	程式 5.5	157
5.7	地工力學的應用	163
5.8	參考文獻	164

第六章 非線性材料

6.0 緒論	166
6.1 彈塑性	168
6.2 程式 6.0	171
6.3 程式 6.1	180
6.4 莫爾 - 庫倫塑性	186
6.5 DPL 的數值計算	190
6.6 屈服與勢能表面的角隅	192
6.7 程式 6.2	192
6.8 黏塑性	199
6.9 程式 6.3	200
6.10 不排水問題	208
6.11 程式 6.4	209
6.12 地工力學的應用	216
6.13 參考文獻	217

第七章 流體流動的分析

7.0 緒論	219
7.1 程式 7.0	219
7.2 程式 7.1	226
7.3 程式 7.2	226
7.4 程式 7.3	233
7.5 程式 7.4	239
7.6 程式 7.5	242
7.7 程式 7.6	248
7.8 程式 7.7	255
7.9 地工力學的應用	260
7.10 參考文獻	260

第八章 耦合的固體 / 流體分析

8.0 緒論	262
8.1 程式 8.0	262
8.2 程式 8.1	273
8.3 於地工力學耦合壓密的應用	278
8.4 參考文獻	278

第九章 振動分析

9.0 緒論	279
9.1 程式 9.0	279
9.2 程式 9.1	284
9.3 程式 9.2	288
9.4 強迫振動分析	288
9.5 程式 9.3	291
9.6 程式 9.4	297
9.7 程式 9.5	305
9.8 程式 9.6	310
9.9 對時間顯積分	317
9.10 程式 9.7	325
9.11 地工力學的應用	326
9.12 參考文獻	327

第十章 樁的承载力與可打擊性

10.0 緒論	328
10.1 程式 10.0	328
10.2 程式 10.1	335
10.3 程式 10.2	344
10.4 地工力學上單樁分析的應用	350
10.5 參考文獻	352

6 有限元素程式：在地工力學之應用

附錄一 建立區副程式

附錄二 特殊目的常式

附錄三 程式使用的變數名稱

附錄四 Fortran IV 與 Algol 68 語言的完整程式

第一章 前言：計算機策略

1.0 緒 論

許多教科書均有敘述有限元素法分析的原理，並廣泛應用於解決實際工程問題。但往往很少注意計算機程式建立的方法與實際產生的數值結果，這是因為教科書假設讀者已接觸過既有的程式（也許是較複雜的套裝軟體，例如 NASTRAN），或是讀者具有寫程式的能力。但對於該領域沒有多年經驗的人，其在瞭解如何寫程式的原理與實際寫程式之間的鴻溝仍然很大。

本書嘗試為此鴻溝之橋樑。其目的是協助讀者組合自己擁有之計算機程式，並解決個人特殊的工程問題；藉著運用建立區（building block）的方式，經由有限元素的技巧達成運算。作者真正所要描述的並不是一個‘程式’或一組程式；而是如何整理所搜集的程式庫（library）與副程式，該程式可執行某些功能，例如標準函數（SIN、SQRT、ABS等），該程式是以有效之科學語言寫在永久程式庫內（permanent library）。因為有限元素的公式化矩陣結構，以致其中大部分建立區常式與矩陣運算有關。

寫程式的目的，在於容易瞭解而不是祈求超效率。然而，所有建立區的程式（個數大約為 60）與全部測試程式（個數大約為 40）均可為 CDC、IBM、ICL、GEC 和 PRIME 等各類機器所採用。我們確信這些機器具有相當的效率且擁有很好的編譯器。為了選定高階語言（FORTRAN IV）與程式書寫方式，我們需要回顧計算機構造（architecture）發展歷史，與過去二十年間已寫好程式的關係。

2 有限元素程式：在地工力學之應用

1.1 計算機硬體

有限元素法應用於工程問題的分析與計算，需要使用“很大的”數值計算機。依目前標準而言，計算機意味著必須擁有 128 組指令或更多命令，且平均指令時間小於微秒 (microsecond)，而主儲存體需大於 64 K 字元 (words)，此主儲存體是由至少 32、48 位元或更多的二進位制的位元 (binary bits) 所組成。其可聯接的周邊設備包括顯示幕、繪圖機等。

目前 (1979) 可用的商業計算機，均符合這些標準，包括 Burroughs 6000/7000、CDC 6600/7600/Cyber 203, Cray I、Honeywell 6000、IBM 360/370、ICL 1900/2900 和 Univac 1100 系列。雖然這些系統彼此相似，但值得注意的是，在硬體設計師所設計的最佳計算機構造與系統程序特性，這些在過去均無一致性。而此特徵影響到高階程式語言結構 (軟體)，該軟體可能影響開發機種的品質，而在實際情況中，適合高階語言的機種才有競爭力。例如，FORTRAN IV、ALGOL 60 或 PL/1。

Bell 與 Newell (1971) 將機器設計分為四個等級，如表 1.1 所示。當我們敘述工程計算程式時，只需注意下表中之之前二級，也就是將代數與邏輯指令，經由說明或編譯轉換成機器指令 (具有不同程度的效率)，隨伴主程式的資料經由計算機的處理，特別與使用記憶裝置的各種等級有關。(再度具有不同程度效率)。

表 1.1 等級：計算機結構

等級	型 式	特 徵
4	處理器—記憶—轉換	記憶與程式的構造
3	程式製作	主程式、副程式、指令組、編輯程式
2	邏輯設計	數學、邏輯單元等
1	迴路	擴大器、繼電器、轉換器等

1.2 指令格式

下述的計算式子，將做為探討硬體特性的範例：

$$a*b+c*d \quad (1.1)$$

其將結果設定給左邊變數 x 。計算上式所需之記憶空間，因各種機器而有所不同，如表 1.2 所示：

表 1.2 處理器構造的特性

型 式、	字元 長度	位 址	需 要 記憶元	儲存處理： 虛構儲存否？
Burroughs 6000/7000	48	0	112	是
CDC 6600/7600	60	3	195	否
Honeywell 6000	36	1	252	是
IBM 360/370	32	2	176	是
ICL 1900/2900	24/64	1	168/96	是
Univac 1100	36	1	252	否

在計算式 (1.1) 時，所需最大與最小的記憶空間比為 2.5（若不需整數字元時，將由編譯程式設定為零或部分字元）。當然，目的碼大小僅僅衡量計算機指令格式的效率，而且主儲存運算方式與呼叫指令數可作為另一種標準。而各種不同型式的機種與各種等級的硬體，均是本書所強調的重點。

1.3 運算方式

有限元素法的程式可處理陣列型式的數據結構，該陣列具有問題的物理意義。假定目前我們已有一個計算機，並具有足夠容納所有資料的大主儲存體。當所處理的元素為一大陣列，則運算位址的範圍顯然很大，相反均，必須以一程序處理局部變數，或從指數寄存器（Base

4 有限元素程式：在地工力學之應用

register) 中分出的次迴圈等。這些差異性可由計算機的構造反映出。當高階語言呼叫次迴圈或某一程序——尤其是使用 ALGOL 與 PL/1 語言時，須假設處於“動態”(dynamic) 儲存結構。局部變數需考慮其相對於指數寄存器的位址，而一種特殊記錄器稱之為堆積指示器(stack pointer)，並且它可用在儲存體中的工作區。例如許多程序使用多變的工作區，但在此程序完成時，即不再使用此工作區。而可調整堆積的效果就是指示器可在儲存體內移動，此動作如同程序進入與離開。因此我們可獲得兩個結論，第一是局部位址是由指數寄存器所分出的小分支，並且只需要簡短的指令；第二是如同 ALGOL 或 PL/1 程式可在儲存體中的增減，數個程式可立刻在執行路徑上——此種特性我們稱之為程序復編法(multiprogramming)。

1.4 儲存處理

在前面部分，我們假設對於程式執行與數據儲存，可經由充分之主儲存體來完成。然而，在非常大的有限元素計算中，陣列處理的大小可為 10,000 乘 200。於是計算機勢必要有 2×10^6 字元以保有這些資料。該資料大小至少比目前典型之“大的”計算機所能提供的快速儲存還大。對此情況主要考慮的是費用，CDC 7600 的 32 K 快速磁蕊需花費一百萬英鎊。然而對於最新的機器均考慮大的主儲存體，例如 CDC Cyber 203 和 Cray I 的容量已將儲存體大小設計為五十萬至四百萬字元。

計算機製造者使用兩種不同的策略，以迴避受制隨機使用磁蕊的問題。首先(最簡單的與最早的)是由不同的備份儲存裝置，例如程式設計者所配置的磁鼓、磁碟和磁帶，將資料轉換至磁蕊。如 CDC 7600 此摩登計算機依然採用這個策略。程式可在 32 K 或 64 K 字元的低速儲存體內執行，然而數據可儲存在 100 K 或 200 K 中速之“大的記憶體”內。更進一步，在大的磁碟上可獲得備份儲存，但是當程式設計者決定在磁碟間傳送資料時，中心處理器將可能“當機”。一個工作要求磁碟轉換，也就是如同一個暫時措施將自動地在快速記憶

體外交換，並由下一個待命的工作所替代。

第二個策略是在硬體與軟體的系統中，在使用者的控制與賦予下移除儲存處理的方法。程式設計者僅須瞭解一個非常大的儲存容量中的單一範圍，且他的資料由備份儲存體移至磁蕊中，並再度由監視器移出，或者經由機器所安排的工作流程執行程式。這個非常大的“虛構”磁蕊觀念，首先在1961年由ICL ATLAS提出。我們可由表1.2看出，除了CDC外主要的製造者均使用此儲存處理的策略，而事實上計劃的CDC Cyber 203也將成為虛構的機器。ATLAS和大多數此型的後續機器，也允許於任何時間在磁蕊中，同時執行數個完整程式的程序復編法（multiprogramming）。而這些系統的目的就是保持硬體（CPU、周邊設備等）可充分利用。

顯然的，系統必須能使變數由虛構位置轉換到磁蕊的真實位置。此種轉換通常包含一個複雜小型的運算，稱之為“頁面”（paging）。虛構儲存可劃分成片段或固定的頁數，或者可由頁數表參考變數的大小，並且程式監視器試著由一種方式“學習”，而該方式即使用者經由他的數據，以使用預設的方式處理儲存體。然而儲存處理從未在使用者控制下整個移除。我們必須假設，程式設計者正以一個合理的邏輯方式運作，並依次（以行或列，如同由編譯器所組織）執行陣列元素。假如使用者以任意方式執行一個 10^6 字元的虛構儲存體時，由於頁面的要求，將很快地確定很少會發生在程式執行時。

1.5 “迷你”計算機

在最近幾年，計算機技術已快速發展，以致於小型機器就具有處理小到中型有限元素程式的能力。在此領域的典型機器有DEC PDP 10/11，GEC 4070/4080和PRIME 300/400系列。這些當中，GEC和PRIME視為虛構機器，大致而言，像此種“迷你”型的執行速度約為最大型機器的 $\frac{1}{30}$ 。因此一件工作在大機器執行需要10分鐘，而在小機器執行可能需要5小時。有些公司選擇以迷你計算機徹夜執行有限元素工作，但是一般而言，在迷你計算機的合理執行時間

可能為半小時，因此較大的工作勢必送至大機器執行。假如僅在程式的發展與測試模式下，在迷你計算機三十分鐘的執行時間（相當於在大機器的一分鐘），仍然能夠處理許多工作。在本書中所敘述的程式已在 GEC 4080 和 PRIME 400 等機器測試過，所以可利用這些機器。作者在著此書時，像這些具備完善硬體的計算機，需花費十萬英磅（二十三萬美金）的價格，但是目前一般公司執行有限元素計算時很少考慮這種花費。然而，朝向更便宜且多功能的“小”計算機是一種趨勢，因此打算以個人計算機處理有限元素工作不是空想的。

1.6 向量與陣列處理器

在往後章節中，我們將看到大部分由矩陣和向量所組成的有限元素計算——彼此相乘、相加、轉置、反轉等等。因此，提供特殊硬體在高速度下執行向量和矩陣運算，似乎這件事專屬於計算機製造商。這硬體可能以中心處理向量記錄器的型式出現，例如 Cray 和 CDC Cyber 203 或以周邊型式，例如 ICL 2900 DAP 的觀念。又小又便宜的陣列處理器能如同周邊設備與迷你計算機連接，例如浮點系統（Floating Pint Systems）AP 120 B，似乎這是未來發展的趨勢。

此類特殊硬體相聯結的缺點，往往需要特殊的程式相配合，此將減損程式的攜帶性與機器的獨立性。然而在最近，軟體可被寫成預處理的標準高階語言碼，其能夠重組以配合特殊機器之向量儲存容量的最佳使用。

在此方面的未來趨勢是很難預料的。終究，陣列處理可能變得非常快且便宜，甚致對於非常大的陣列亦是如此，其中有許多目前已寫好的特殊目的軟體，例如處理各種少見型式的陣列。然而，此一趨勢與本書的原理完全符合，僅需要改變一個重點即可。在下節軟體中，我們僅考慮一個標準且非常方便的高階語言。