

CHUDENG SHUXUE YANJIU



HIT

数学·统计学系列

初等数学研究(I)

甘志国 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



数学·统计学系列

初等数学研究 (I)

● 甘志国 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书包括整数性质、不定方程、现行高中数学教科书 12 章内容(集合,函数与方程,数列,三角,平面向量,不等式,平面解析几何,立体几何,排列、组合与二项式定理,概率与统计,极限,导数)、数系、数学竞赛、趣味数学、问题与猜想等 18 个部分的初等数学研究方面的论文 206 篇(其中 6 篇以前曾发表过),每篇文章各自独立成立。本书注重了科学性、系统性和趣味性,可作为中学、大学师生及初等数学爱好者阅读、钻研,也可作为高三学生在数学高考复习备考时参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

初等数学研究. 1/甘志国著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008.8

ISBN 978-7-5603-2733-4

I. 初… II. 甘… III. ①初等数学-教学研究-师范大学-教材②初等数学-教学研究-高中 IV. G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 093921 号

策划编辑 刘培杰

责任编辑 唐 蕾 翟新焱

封面设计 卞秉利

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 43.75 字数 833 千字

版 次 2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-2733-4

定 价 68.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

序 言

甘志国先生的《初等数学研究(I)》即将由哈尔滨工业大学出版社出版.标号为刘培杰数学工作室的第32号产品.作为本数学工作室的主持人甘志国先生请我为其作序.虽然作序者按常理皆为高官鸿儒,最不济也得是业内巨擘,但念甘先生执意且信任,便不揣浅陋,写上几笔.

这本著作的动议出自大约10年之前,那时笔者在哈尔滨出版社任策划编辑,由于喜欢在数学刊物上发表点小文章,遂在中学数学界被人知晓,有些中学教师便投稿过来.甘志国便是其中一位.那时他刚刚在《数学通讯》等杂志发表了十几篇文章.兴致正浓,跃跃欲试,准备发表个人的作品集.但我以出版人的眼光审视其作品后,发现文笔还略显稚嫩,不宜马上结集,遂回信让其继续“修炼”,待功力纯青之后再议,一晃10年过去了,我也由哈尔滨出版社调入了哈尔滨工业大学出版社,意外的是10年后的一天,他再次将我写给他的信寄了回来要求兑现承诺,其实在这10年间我一直关注着这位年轻人在各种中学数学杂志上的表现,也感觉到这10年来甘先生的巨大进步,认为时机已经成熟,出版作品集也是水到渠成之事,其实甘先生的10年历程带给我的感受有三点:

一是坚持的重要.被誉为中国地产界思想家的冯仑说:“想在人生的路上投资并有所收益,有所回报,第一件事就是必须在一个方向上积累,连续地正向积累比什么都重要……时间决定一切……打个比方,我拿着一杯水,马上就喝了,这叫喝水;如果我举10个小时,叫行为艺术,性质就变了;如果有人举上100个小时,死在这儿,这个动作还保持着,实际上就可以做成一个雕塑;然后如果再放50年,拉根绳就可以卖票,就成文物了.所以不是行为本身,而是时间会决定一件事的性质.甘先生如同中国象棋中的小卒,一直向前拱到底线终成大器.毛泽东曾教导我们说:一个人做一件好事并不难,难的是一辈子做好事.同样的道理,一位青年数学教师写一小篇文章并不难,难的是坚持数十年,由青年而至中年,由一篇积成几百篇,这就要有一种精神了,这可能就是湖北人的韧劲.加拿大多伦多医院的谢勒博士曾得出了一个惊人的结论:数学天才是一种病态,即患上了一种名为威廉斯氏综合征.通俗地说,人类基因谱恰似一本千万字的大书,其中有20个字被印错了.甘先生不是天才,但勤奋有加.靠后天努力终成正果.

二是定位的自觉.搞研究者定位十分重要,它决定着将来学问的规模,层次与格调,有些人眼高手低,非世界难题不搞,结果与自身能力不相匹配,终落得“壮志未酬身先死”.单墀教授曾有比喻,二流人才搞三流问题,结果必是一流的,而二流人才搞一流问题,其结果必是三流的.甘先生定位准确,结合本职工作,立足岗位成才,主攻初等数学研究.其实这里的初等数学是一个模糊概念,用首都师范大学数学科学学院周春荔教授的话说:它也是个发展中的概念,有人认为是算术、代数与几何的统称,也有人认为就是中小学数学范围内的问题,其实这些表述都不够准确.事实上,由于新课标的实施,高中引入了微积分和概率、向量和逻辑代数等,其中遇到的问题是初等数学问题还是高等数学问题?答案应是“亦此亦彼!”不能搞“非此即彼!”正如梅向明教授所说:“初等数学是高等数学的基础,它为高等数学的发展提供思想方法,同时又为抽象的高等数学提供具体的模型.”初等是相对的.1950年美籍挪威数学家塞尔伯格(Selberg, Atle 1917—)获第二次世界大战后首次菲尔兹(Fields)奖.原因是他于1949年利用塞尔伯格不等式给出了素数定理的初等证明,使数学界受到很大震动.之前法国数学家阿达玛(Hadamard, Jacques 1865—1963)于1896年应用 ξ 函数的性质,证明了素数定理,而他则被称为使用了高等方法——复分析.所以这里的初等二字意味着只用微积分而不用复分析.

I·里查兹在《今日数学》(这是一本目的在于向有才智的非数学家转述数学概念的一些性质、发展和应用的一本文集)中评价指出:

他们(指阿达玛与 V·普洼松(de la Vallée Poussin))的证明(都基于黎曼的著作)所用的方法非常间接,这些方法来自复变函数论,事实上阿达玛在作上述突破时,已发展了复变函数的某些新技巧,这些技巧后来用于无线电波理论,以证明用来消除讯号干扰的滤波器不会抹掉有用的信息.

从科学发展的观点来看,这一切都很不错.但有些数学家感到大失所望.素数定理的证明,转弯抹角,没有人真能懂得.每个步骤都可以弄懂——它是正确的——但和素数有什么关系,似乎很不明显.多少年来人们寻求“初等的”证明,即仅用素数的基本性质,避免复变函数和波分析这些深奥的方法.这一方面的发展也需要很长的时间,但终于在 1948 年由 A·塞尔伯格和 P·爱尔特希找到了所要的证明.然而新方法和老方法一样的难懂.“初等”方法的意思是每个步骤都是初等的,但步骤太多,过程过于繁复,不能一目了然.或许这是不可避免的.似乎有一条“困难守恒”原理,说困难就是困难,不管你怎样去解决它.([美]L·A·斯蒂恩主编,马继芳译.上海:上海科学技术出版社,1982.)

初等数学小天地但可以有作为,如周春荔教授所指出:今天看来,我们所谓的初等数论,一般是指用大学基础数学范围内的知识、方法和工具可以尝试研究的,为研究者所感兴趣的数学课题.所谓的初等数论研究一般是指大家对上述类型课题的研究,有些问题初等数学工作者和职业数学家都在研究.如阿佩尔(Apéry)数的同余性质.在梁宗巨先生的《世界数学通史(下册)》(辽宁教育出版社)第 22 章“20 世纪数学”中列为初等数学前沿课题.1978 年在芬兰赫尔辛基召开的国际数学家大会(ICM)上,法国数学家阿佩尔宣布他证明了 $\xi(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 是无理数.在他的证明中他引入了以他名字命名的阿佩尔数 a_n .由于阿佩尔数的巨大威力.一时间研究阿佩尔数成为热门,数论专家 Chowla 1980 年在《数论杂志》(Jour of Number Theory 1980 年 12 月号,188~190 页)中专门讨论了阿佩尔数的性质,并提出了四个猜想:

- (1) $a_{2n} \equiv 1 \pmod{8}, a_{2n+1} \equiv 5 \pmod{8}$;
- (2) $a_{2n} \equiv 1 \pmod{3}, a_{2n+1} \equiv 2 \pmod{3}$;
- (3) 当 $p > 5$ 且 p 是素数时, $a_p \equiv 5 \pmod{p^3}$;
- (4) 当 p 是奇素数时, $a_p \equiv 0 \pmod{5}$.

这些猜想 1983 年都被山东大学的楼世拓和姚琦解决.阿佩尔、Chowla、楼世拓、姚琦都是职业数学家.所以此问题从这个角度看并不初等.

有的高考数学试题或数学竞赛试题,就是命题科研成果中的一个引理,比

如 2007 年全国高中数学联赛的加试第三题：“设集合 $p = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 对任意 $k \in p$ 和正整数 m , 记 $f(m, k) = \sum_{i=1}^5 [m\sqrt{\frac{k+1}{i+1}}]$, 其中 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数. 求证: 对任意正整数 n . 存在 $k \in p$ 和正整数 m , 使得 $f(m, k) = n$ ”据说, 就来自命题者的科研论文(周春荔“对‘初数’研究的一点感言”《中学教学研究》2008 年第 2 期).

另外有些问题外表初等但实际上却与数学前沿直接相通.

例如 1981 年在美国举行的第 22 届 IMO 上, 芬兰提供了一个试题.

函数 $f(x, y)$ 对所有的自然数 x, y 满足:

- (1) $f(0, y) = y + 1$;
- (2) $f(x + 1, 0) = f(x, 1)$;
- (3) $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$.

试确定 $f(4, 1981)$.

这个貌似初等的问题, 其背景实际上就是德国大数学家希尔伯特(Hilbert)的高足阿克曼(Friedrich Wilhelm Ackermann)提出的一个重要的递归函数. 阿克曼生于德国的苏涅贝克, 曾在冈斯特任教授, 主要研究数理逻辑, 与希尔伯特合作写了专著《理论逻辑基础》, 被译成多种文字. 1920 ~ 1930 年间他还和希尔伯特一起研究了希尔伯特的证明论.

近年来人们发现它与著名的哥德尔不完全性定理有关. 所谓哥德尔不完全性定理就是说: “在一个比自然数理论更广的形式化的数学体系中, 必定存在着关于自然数的既不能肯定也不能否定的命题.” 亦即“包含着皮亚诺(Peano)自然数理论的形式化体系都是不完全的体系.”

20 世纪 80 年代, 杰夫·帕里斯(Jeff Paris)和利奥·哈林顿(Leo Harrington)在组合问题中取得了一个增加趋势远远超过阿克曼函数的函数, 它的某些性质就表现出了在皮亚诺体系中的不可判定性, 后来, 哈维·弗里德曼(Harvey Friedman)同样在有限组合问题中又找到了一个比帕里斯-哈林顿更高级的函数, 这个函数的某些性质也表现出了皮亚诺体系中的不可判定的某些事实. 对此 1982 年 11 月的《科学》(Science)杂志上专有一篇题为《哥德尔定理对数学有关系吗?》(Does Godel's Theorem Matter to Mathematics?)的简短文章, 对此进行了报导.

三是对事业热爱. 曾国藩曾在其家书中告诫自己的后代, 交友一定要交有嗜好有癖之人, 后代不解, 追问没有嗜好没有癖的人有何不可, 曾国藩说: 其没

有深情也！对某项事业某种物件某位佳人一往情深是一个人幸福的基础，也是事业成功的必要条件。甘志国先生就是一位对初等数学情有独钟，嗜数如命的青年教师。曾经贫穷过，曾经疾病过，但都不改初衷，坚持钻研，并从中得到了乐趣。法国数学家泊松(Poisson Simeon-Denis Baron, 1781—1840)有一句名言：人生最大的乐趣有二，一为数学的发现，一为数学的教学。甘先生兼而有之，想必人生充满乐趣。

一位教育专家曾说。教师有两种类型：一类是“为生存而教育”，一类是“为教育而生存”。甘先生显然是后者。

现在随着国家对教育的重视，中学教师特别是数语外教师靠自己的知识和劳动也跻身于中产阶级行列。享受生活成为了这一阶层的生活核心，如 C·赖特·密斯瓦所说：中产阶级气质意味着对自己的生活感到满意，意味着形而上的情思的枯竭，意味着人生的终极关怀的丧失，意味着探索精神之路的断绝。”我们很高兴看到甘志国式的青年教师有追求有理想有成果。1996年美国“数学与美国未来全国委员会”发表了引发转折的标志性报告《至关重要：美国未来的数学》。其中提出“高胜任教师”(highly qualified teacher)概念。可以断言只有不断钻研初等数学的中学数学教师才能是新时代的高胜任教师。

20多年前的一个星期日的清晨，刚刚走上教学岗位的笔者突然醒来，辗转反侧，难以入睡，蹬自行车到了学校。伴着晨光写了一篇小文章《Vandermonde 行列式与 USAMO 试题》，不久便发表在《湖南数学通讯》上。笔者也由此从市政工程学院调入哈师专数学系开始了数学竞赛的研究与教学。今天甘志国的这部专著比之我当年的小文章不知厚重多少倍，愿它的出版将甘先生带到一个新的平台，这即是心理学中的共情，也表达了一个曾经在数学战线但现在却临阵退缩了的“逃兵”对初等数学研究的眷恋与对现在仍“奋战”在一线的勇气的敬佩。

中国式的文章要想一贯正确缺少不了一个句式，那就是“虽然……但是”。我们说虽然甘先生的大作内容丰富、角度独特、可读性强，但是我也要提两点不足。一是选题要有深度，避免出现如同爱因斯坦所说的那样：“在一块薄板上钻很多眼”。第二个要少而精，重质不重量。据陈哲三先生回忆当年在请不请尚在国外的陈寅恪来清华大学任导师，梁启超先生与曹云祥校长发生了意见分歧。曹校长说陈既不是博士又没有著作，难以聘用。梁启超先生说：“我梁某也不是博士，著作算是等身了，但总共还不如陈先生寥寥数百字有价值。”(黄延复著。《清华逸事》。沈阳：辽海出版社，1998：15.)

英国《泰晤士报》曾刊发过一篇题为《未来是橙色的》的署名文章.其中介绍了一个奇特的现象,那就是北纬 53 度“盛产”数学家.据安德鲁斯大学研究人员计算得出.过去 400 年中 54% 的数学家出生在北纬 53 度的地方.这个国外的研究结论在中国是否适用不得而知.但中国有句俗语:“天上九头鸟,地上湖北佬”.湖北人聪明勤奋,数学自然不弱,读完甘先生大作相信你一定会有这样的感觉:唯楚有才!

刘培杰

2008 年 6 月 17 日于哈尔滨

前 言

笔者在读小学时,就喜欢上数学课,喜欢做数学题(喜欢的原因很简单:学习数学只需一张纸、一支笔和一个不太聪明的大脑就行了),从做题中也体验到了成功的喜悦;到了读中学时,这种兴趣就更强烈了,每天除了完成学习任务之外,就是到学校图书室去借阅各种数学习题集做,也翻阅《数学通报》、《数学通讯》等数学杂志;又到了参加工作时,更是酷爱“数学”这门科学了,一边进行数学教学,一边攻读大学数学课程和数学研究生课程,还利用一切业余时间进行初等数学研究,并尝试着总结自己的研究成果,写成论文,准备投稿发表,终于在1994年2月,全国创刊最早(1933年)的中等数学期刊《数学通讯》的“专题写作”栏发表了笔者的论文《 $\{R(n^m)\}$ 的周期性》.时至今日,笔者已在多种刊、书、报(几乎遍及全国各省、市)上发表了论文270篇(总计35万字),可谓殚精竭虑,笔耕不辍.

数学论文绝不是文字、符号的简单拼凑、组合,必须阐述的是新成果、新观点,因而应言之有物、论证严密、有条理、逻辑性强.写数学论文的关键是研究深入,“七分研究三分写”就是这个道理.真正有价值的论文,其基础必须是一个好的研究成果,没有坚实的科学研究成果,决不可能写出好的论文来,初等数学研究包括以下内容.

(1)教材研究:包括对教材内容及其教学方法的研究。

(2)竞赛研究:包括对赛题的解法、赛题结论的推广和赛题的编制等。

(3)解题研究:包括一题多解,多题一解,数学题型的归类,寻找解题技巧,数学题结论的推广,数学命题的发现及编制等。

(4)专题研究:指对数学中的某个专题作深入细致的研究,这种论文价值较大,但研究的难度也很大,并且难出成果,所得结论必须是前人未曾得到过的深刻结论。

(5)文献研究:对刊、书、报上别人发表的文献中的结论加以改进、加强、推广,解决其中的问题和猜想等。

(6)课外活动研究:数学课外活动是数学课堂的延续和补充,也是学生学习数学知识,及教师传播数学知识的重要形式,数学课外活动开展得好,可以提高学生对数学的学习兴趣,让他们积极主动的钻研数学,使教师教得轻松,学生学得容易,所以此项研究也很重要。

(7)跨学科研究:各学科之间的联系越来越紧密(所以各种边缘学科不断产生),数学、物理、化学、生物、地理之间更是密不可分,因数学研究这些学科的研究就是跨学科研究。

在日常生活中,只要多留心、多思考,万物皆是数学研究的对象,数学论文的素材、数学知识的运用,研究的方法也多种多样。总之,生活处处皆数学。华罗庚先生也曾说过:宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,无处不用数学。

笔者进行初等数学研究已有二十余年了(初等数学研究必将伴随笔者一生,甚至是笔者一生工作、学习、生活的重要组成部分),选择部分研究成果汇集成书是笔者多年的夙愿。感谢哈尔滨工业大学出版社的高瞻,才使得本书终于出版发行。在成书的过程中,笔者对以前的研究又作了仔细的推敲,对每一点内容都是本着近乎苛刻的态度进行重新审读,力求简洁完美,准确无误后才定稿的。但书中难免仍有疏忽和纰漏之处,所以希望广大读者在研读本书时能指出它们,并能与笔者联系(E-mail: ganzhiguo1971@163.com),也欢迎与笔者讨论其他数学问题。

正值本书出版之机,笔者还要向笔者在初数研究的道路上给予关心、支持、鼓励和指导的众多老师(笔者至今还珍藏着我们之间的书信)致以崇高的敬意!是你们的无私帮助才使笔者能取得一些初数研究成果。另外,哈尔滨工业大学出版社为本书快速、高质量的出版给予了极大的支持,特别是刘培杰先生为本书的出版付出了很多心血,在此一并表示深切的谢意!

本书的出版对笔者的初数研究又是一个极大的鼓舞,笔者将更加认真深入地进行初数研究,一定会接着让更丰硕的成果《初等数学研究(Ⅱ)》、《初等数学研究(Ⅲ)》……早日问世.

《初等数学研究(Ⅰ)》是不是一个成功的尝试,自然留待历史去评说,更有待于有识之士的批评鉴定,若本书中叙及的结论、方法能为读者在初数研究的道路上起到一粒铺路石子的作用,笔者就心满意足了.

甘志国

于湖北省十堰市东风高级中学

2008年6月

目 录

整数性质

正整数的一个奇异性质	3
正整数幂的一种奇妙性质	5
p 变换黑洞	11
也谈周长为定值的整边三角形的个数	13
基本重数问题与伪素数问题的联系	15
“和为定值的两个自然数之积的性质”的推广	21
k 个周长相等的基本勾股形有无穷组	22
正 Fibonacci 数的标准分解式中诸素因数的指数	25
“Lucas 数的标准分解式中诸素因数的指数”研究	29
K 数及其对偶数 Z 数的构造	34
whc 7 的初步解决	38
K 变换的合理定义及 $p = 2$ 时 whc 12 的解决	42
p 进制下的三个数学黑洞问题—— whc 3, 4, 5 的初步解决	46
否定一个定理的逆命题	51
已知面积的(本原)海伦三角形三边的求法	54
能表示成两个正整数的平方和的数	56
$p \mid C_{p-1}^k - (-1)^k$ 时 p 的性质的研究	59
贝尔数的递推公式及一条新性质	62
一边为定值的勾股形的个数及求法	65
已知一边范围的整边三角形的个数	70
求 t 除 a^n 的余数	72
浅探循环节长度对应的素数	75
Fibonacci 数的一条整除性质	79
$\{R_k(a^n)\}$ 的一个周期	82
$\{R_t(n^m)\}$ 的周期性	83

关于 $\underbrace{0 \cdots 0}_{(n-1)\uparrow 0} 1$ 及 $\underbrace{0 \cdots 0}_{(n-1)\uparrow 0} 2$ 的 K 变换	84
$0_n 1_n 2_{n(3)}$ 的 $K_{3,3n}$ 变换的部分结论	90
广义平方 m 的重连整数	92
$2q$ 进制平方 m 重连整数	95
“一条小定理”的推广	100
研究 Fibonacci 三角形猜想的一种方法	102
用等距平行线把平行四边形涂成阴影的线段条数及总长度	108
应区分完全平方式与完全平方数	114
素数与二元平方和数的整除性	116

不定方程

推广的安道什猜想的全相等的解	125
安道什猜想的类似的推广的全相等正整数解	128
方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ 的正整数解的组数	129
方程 $x^2 - 3y^2 = -1$ 没有整数解的简短证明	131
不定方程 $ax^2 + bxy + cz^2 = \lambda z^n$ 的部分整数解	134
不定方程 $x^2 + \sum_{k=1}^n d_k x_k^2 = y^2 (d_k \in \mathbf{Q})$ 的部分整数解	138
不定方程 $ax^2 + by^2 = cz^n$ 的部分整数解	140
用复数模的性质求不定方程 $x^2 + dy^2 = z^n (d \in \mathbf{Q}, n \in \mathbf{N}^*)$ 的部分整数解	143
一类不定方程的两种解法	145
两个不定方程(组)的解	148
不定方程 $x^4 + y^2 = 2z^4$ 的正整数解	153
也谈不定方程 $x^4 + y^4 + (x+y)^4 = z^4 + w^4 + (z+w)^4$ 的全部整数解	157
不定方程 $x^3 - y^3 = n$ 的整数解的求法	160
广义勾股数组的求法	163
把分数表示成两个单位分数的和与差	166
一个引理的证明	170
所有的金蝉脱壳数的求法	172
浅探四个问题	177

集 合

一类集合的元素个数	185
集合 R_n^2 与完全平方数	189

函数与方程

多项式 $S_k(x)$ 的一条性质	193
一元二次多项式连贯性的研究	197
求一元丢番图方程有理根的又一种方法	209
应区别函数图象的两种轴对称	211
广义连贯多项式	213
whc 82 的解决	216
对数学问题 1677 的推广	218
对《对用最小公倍数法求周期的质疑及扩充》一文的再质疑	221
又四类抽象函数的周期性	224
也谈用判别式法求一类函数的值域	226
也谈二元二次多项式的因式分解	229
也谈二元多项式的因式分解	232
函数 $y = k\sqrt{ax+b} + l\sqrt{cx+d}$ 的单调区间及值域	234
函数 $y = kx \pm \sqrt{ax^2 + bx + c}$ 的单调区间及值域	238
函数 $f(x) = \sqrt{(x-a)^2 + b^2} \pm \sqrt{(x-p)^2 + q^2}$ 的单调区间及值域	244
方程 $a^x = \log_a x$ 解的个数及一类新型极限	248
三次方程根的情况的简明结论	257
方程 $x^x = x$ 的实数解的简洁解法	261
两道题的完整解答	263

数 列

$\sum_{i=1}^n i^k (k \in \mathbf{N}^*)$ 的一个求和公式及其他	269
求 $S_k(n)$ 表达式的较好方法	274
正整数方幂和的求法及性质	280
一道复习参考题的变式	287

看一个递推数列通项的求法	289
$n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$ 的推广	291
两类分式递推数列通项的又一初等求法	292
一类数列通项的求法与三道高考题	296
对一道联考压轴题的研究	299
对 2003 年全国高考卷理科数学压轴题的研究	301
二阶递归数列通项的初等求法	305
已知等比数列中的任意两项求通项	308
一类二元二次方程的解与一类二阶递归数列的项的联系	311
Fibonacci 数列的几条性质的推广	315
一个递归数列的性质	318
首项不是 3 的素数等差数列的公差必是 6 的倍数	323
等差数列的前 n 项和为完全平方数的条件	325
正整数方幂的累进和概念的推广	328
用课本求解 $\sum_{i=1}^n i(i+1)\cdots(i+m)$	329
k 阶递归数列通项的初等求法	331
等差中的“=0”为何变成了等比中的“=1”?	335
whc 102 的解决	337
也谈正整数的等比分拆	340
公差为 2 的正整数的等差分拆	342
全体奇合数组成的数列的一个通项公式	345

三 角

“十年苦琢白玉璧，一朝竟放紫罗兰”——数学问题 1539 的恒等式解法	349
在 $\triangle ABC$ 中 $\sum \sin(A - \alpha)$ 的值域	351
多边形的余弦定理及一个面积公式	358
浅探给定三边长度的四边形的最大面积	367
一类三角函数的最值	370
满足“边边角”条件的两个三角形全等的判定	372

平面向量

一道课本复习参考题的推广	377
四面体的对棱所成角的向量求法	378

不等式

用以直代曲法证一个不等式	381
从加权平均值不等式到另几个重要不等式	384
也谈一类条件最值问题	389
一个不等式命题的推广	394
对几个猜想的探究	396
对几个猜想的再研究	401
对一个猜想的研究	405
运用均值不等式求几个无理函数的最值	410
一个最值定理的推广	412
一道课本习题的变形、加强及推广	415
一个不等式的高维推广	417
浅探一类函数的最值	419
函数 $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$ 的最值	427
一个最值问题的初等解决	430
一个三角不等式的再推广	432
用函数的单调性统一一类不等式	437
对一个不等式的再研究	439
一个代数不等式的推广	441
对一个不等式的思考	445
一个定理的再推广及产生的新问题	447
一类不等式的最值问题	449
也谈一个不等式的推广	453
用 Cauchy 不等式的两个推论证题	456
求 $[\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}}]$ 的几个简明结论	458
三角形的面积、周长、内切圆半径、外接圆半径之间的一些大小关系	460