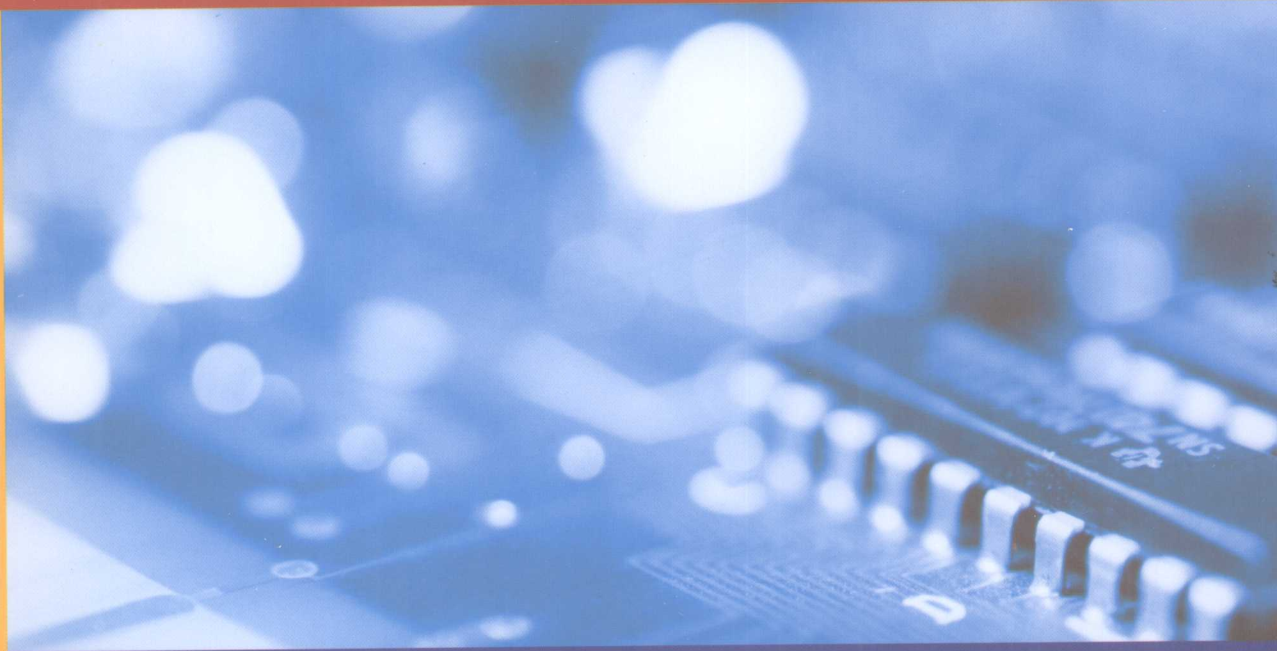
高等院校信息与通信工程系列教材

导波原理与方法



张雪霞

清华大学出版社

高等院校信息与通信工程系列教材

导波原理与方法

张雪霞

清华大学出版社
北京

内容简介

本书从理论角度分析了在金属、介质或金属和介质混合的系统中电磁波的传播、激励、散射等问题，指出了解介质边界条件的电磁问题与解导体边界条件的不同之处。

除一些经典的基本原理外，作者参阅及收集了散落在不同的专业书籍和期刊中的近代发展起来的有关内容，包括作者本人的工作，经分析、整理、加工后写入本书。

本书可供各院校电子工程系学生作为教学参考书，并可供微波、电磁场专业科技人员参考用。本书的目的是使读者学完本书后，能较顺利地看懂有关期刊及参考资料中较深入的文章，并能进行科学研究。

图书在版编目(CIP)数据

导波原理与方法/张雪霞著. —北京：清华大学出版社，2009.1
(高等院校信息与通信工程系列教材)
ISBN 978-7-302-18325-9

Ⅰ. 导… Ⅱ. 张… Ⅲ. 导波—高等学校—教材 Ⅳ. TN814

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 118315 号

责任编辑：王敏稚
责任校对：李建庄
责任印制：王秀菊
出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社　总　机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京市世界知识印刷厂
装 订 者：三河市李旗庄少明装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×260　**印　张**：18.5　**字　数**：423 千字
版　　次：2009 年 1 月第 1 版　　**印　　次**：2009 年 1 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：29.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　　产品编号：027869-01

出版说明

信息与通信工程学科是信息科学与技术的重要组成部分。改革开放以来，我国在发展通信系统与信息系统方面取得了长足的进步，形成了巨大的产业与市场，如我国的电话网络规模已位居世界首位，同时该领域的一些分支学科出现了为国际认可的技术创新，得到了迅猛的发展。为满足国家对高层次人才的迫切需求，当前国内大量高等学校设有信息与通信工程学科的院系或专业，培养大量的本科生与研究生。为适应学科知识不断更新的发展态势，他们迫切需要内容新颖又符合教改要求的教材和教学参考书。此外，大量的科研人员与工程技术人员也迫切需要学习、了解、掌握信息与通信工程学科领域的基础理论与较为系统的前沿专业知识。为了满足这些读者对高质量图书的渴求，清华大学出版社组织国内信息与通信工程国家级重点学科的教学与科研骨干以及本领域的一些知名学者、学术带头人编写了这套高等院校信息与通信工程系列教材。

该套教材以本科电子信息工程、通信工程专业的专业必修课程教材为主，同时包含一些反映学科发展前沿的本科选修课程教材和研究生教学用书。为了保证教材的出版质量，清华大学出版社不仅邀请国内一流专家参与了丛书的选题规划，而且每本书在出版前都组织全国重点高校的骨干教师对作者的编写大纲和书稿进行了认真审核。

祝愿《高等院校信息与通信工程系列教材》为我国培养与造就信息与通信工程领域的高素质科技人才，推动信息科学的发展与进步做出贡献。

北京邮电大学
陈俊亮
2004 年 9 月

前　言

自麦克斯韦(Maxwell)发表了关于电磁学的论文后的一个多世纪以来，在科学技术发展及实际应用的推动下，了解及掌握电磁场理论已成为众多领域科技人员的迫切要求。而另一方面，计算机技术的进展也促进了电磁场理论的发展，使原来用解析方法难以解决的问题求得了数值解。这是电磁场学科中的一个突破性进展，连那些一直崇尚求严格解析解的人都对它刮目相看。因此，一段时间以来，似乎只要有物理模型，会用计算软件，坐在计算机前，一切问题都可以解决。这容易使人忽略了对电磁场基本原理的深究，以及根据麦克斯韦方程解问题的方法。实际上，物理模型的准确性有赖于对问题的电磁特性及物理本质的深入了解；数值解的正确性需要人去判断，解问题的计算程序需要人去编写，而正确的计算方法是建立在正确的求解方法上的。所以，作为电磁场专业的研究生，对深一步的理论及方法掌握的培养不但不能放松，相反更需要重视和加强。

本书主要讲述根据电磁场方程解导波边界值和激励、传输、散射等问题。

20 世纪中期，战争和军事的需要促进了微波技术的发展，其中主要是金属波导传输线及器件。因而对具有导体边界条件的电磁场求解问题有了很大的发展，这在很多教科书及专业书中都已经有较详细的叙述，本书在这方面不再过多地讨论。但大多数书中没有论及在一定边界条件下的不可解问题。本书重点给出了在传输线中各种波型的存在(可解)条件并加以证明。另外，由于近年来微带线、介质波导、光波导的广泛应用，需要更详细地去分析电磁场在带有介质边界条件的环境中的特性。本书对在介质边界条件下传输线中波型的划分和它们存在的条件，以及如何正确求解有关激励的问题等一些与导体边界条件不同的容易混淆的概念进行了讨论和澄清，并给出了判断准则和正确解法。

本书中还推导给出了金属和介质尖劈，顶角等物体的边界条件，即边缘边界条件及渐近公式。这在严格求解以及判断解的正确性(尤其是数值解)方面是非常重要的。

以上所述的一些内容是本书的特点，在别的书中较少或没有被包括。

本书的目的是：通过本书的学习，使学生能更快地进入文献资料的阅读及科学研究工作。

下面是各章主要内容和关键学术问题。

第 1 章讨论用位函数解电磁场边界值问题的原理及应用范围，给出了各种波型在不同的电磁场结构中存在的条件。

第 2 章介绍格林函数的几种求法，以及利用格林函数法求解边界值问题和激励问题的方法。特别讨论了在解位于电磁媒介质表面上的电流所激励的电磁场问题时，矢量位 **A** 分量的选取问题。这个问题容易弄错，而在一般书中很少提及。

第 3 章介绍保角变换法及多角形变换(许瓦兹(Schwarz)变换)方法。利用它推导给出了空气微带线分布电容的严格解。进一步介绍了惠勒(Wheeler)提出的变异保角变换

方法，推导计算出有介质分界面的实际微带线的分布电容及有效介电常数，从而求出其特性阻抗。

在第4章中主要介绍了电磁场方程的本征值问题，以及确定论问题的变分法求解。给出了它们的等价表示式；自然边界条件和强迫边界条件；如何将强迫边界条件转化为自然边界条件以及非齐次边界条件的齐次化方法。

本章还讨论了求波导中各种波型的传播常数，不同截面、不同波型的本征值大小的比较等变分法在导波中的应用问题。

第5章讲述电磁场在金属和介质楔边缘处的特性，即边缘点边界条件。在金属楔和介质楔的边缘点处，有些场分量可能变为无穷大。本章根据电磁场的能量条件推导给出了各种介质楔和金属楔的边缘点场的渐近表示式。场在边缘点的边界条件信息是很重要的，只有根据它才能得到唯一的解。另外在进行场的数值法计算时，结合场在边缘点量级关系的条件可以提高问题的收敛速度并收敛到正确值。本章内容在一般书籍中较少涉及。

第6章结合求解波导传输线中的不均匀性(如波导分支、波导膜片、波导拐弯、不同截面波导连接)等问题，以及脊波导、微带线、多层介质波导中传播常数的求解，介绍了谱域法、全波解法、模匹配法、有效介电系数法等解析法、数值法或解析与数值相结合的方法。

第7章在介绍了复变函数中关于正则性、多值函数、分支、分支点、正则分解等概念，并推导证明了相关的定理后，讲解了维纳尔-霍普(Wiener-Hopf)方法，并用此法求解了分支波导、H介质波导的激励问题。本章还推导介绍了适用于求天线远区辐射场的渐近方法鞍点法(最速下降法)。

作者

2008年10月

目　录

第 1 章 电磁位函数理论及其应用

1.1 矢量位 A 及标量位 ϕ

在电磁场中，一般利用位函数解决以下两个问题：一是借助于位函数求解由给定源所激励的场；二是在给定边界条件下求解场。

首先，我们来考虑麦克斯韦(Maxwell)方程：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{J}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

并有 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$。

对简谐场，如以 $e^{j\omega t}$ 为时间因子，则有

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-j\omega\boldsymbol{B}=-j\omega\mu\boldsymbol{H}\tag{1.1.1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=j\omega\boldsymbol{D}+\boldsymbol{J}=j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\tag{1.1.2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\tag{1.1.3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\tag{1.1.4}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-j\omega\rho\tag{1.1.5}$$

其中方程(1.1.1)和方程(1.1.2)是基本的。在简谐场中，对式(1.1.1)及式(1.1.2)取散度并利用式(1.1.5)就可以得到式(1.1.3)及式(1.1.4)，因此它们不是独立的。当 ε 和 μ 是常数时，对式(1.1.1)取旋度，并将式(1.1.2)代入，得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=-j\omega\mu\nabla\times\boldsymbol{H}=\omega^2\varepsilon\mu\boldsymbol{E}-j\omega\mu\boldsymbol{J}$$

利用矢量恒等式

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{E}-\nabla^2\boldsymbol{E}\tag{1.1.6}$$

当 ε 为常数时，可得 $\boldsymbol{E}$ 的方程如下：

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+k^2\boldsymbol{E}=j\omega\mu\boldsymbol{J}+\frac{\nabla\rho}{\varepsilon}\tag{1.1.7}$$

式中，$k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$。

同样可得 $\boldsymbol{H}$ 的方程

$$\nabla^2\boldsymbol{H}+k^2\boldsymbol{H}=-\nabla\times\boldsymbol{J}\tag{1.1.8}$$

解方程(1.1.7)和方程(1.1.8),可以得到 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{H}$。但方程(1.1.7)和方程(1.1.8)右边的项分别是给定源 ρ 和 $\boldsymbol{J}$ 的梯度与旋度,解它们较复杂,因此需引入辅助位函数,以简化问题的求解。

由性质 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$,引入辅助矢量位函数 $\boldsymbol{A}$。令

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

代入式(1.1.1)得

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\,\nabla\times\boldsymbol{A}$$

比较上式左、右两边,得

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}-\nabla\phi$$

这里 ϕ 是任一标量函数,称为标量位函数。

将 $\boldsymbol{H}=\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}-\nabla\phi$ 代入式(1.1.2),可得

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}+k^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\varepsilon\mu\,\nabla\phi \tag{1.1.9}$$

将 $\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}-\nabla\phi$ 代入式(1.1.4),当 ε 为常数时,有

$$\nabla^2\phi+\mathrm{j}\omega\,\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{1.1.10}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 的任意性($\boldsymbol{A}$ 中可加一个任意无旋量),我们可规定一个 $\boldsymbol{A}$ 与 ϕ 的关系以简化方程(1.1.9)及方程(1.1.10)。令

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\mathrm{j}\omega\varepsilon\mu\phi \tag{1.1.11}$$

方程(1.1.9)变为

$$\nabla^2\boldsymbol{A}+k^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J} \tag{1.1.12}$$

方程(1.1.10)变为

$$\nabla^2\phi+k^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{1.1.13}$$

关系式(1.1.11)称为罗伦兹规范。将它代入 $\boldsymbol{E}$ 的表示式中,有

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}-\nabla\phi=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}+\frac{\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}}{\mathrm{j}\omega\varepsilon\mu} \tag{1.1.14}$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{1.1.15}$$

在一定的边界条件下解式(1.1.12)的 $\boldsymbol{A}$,便可求出 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 来。

罗伦兹规范不是唯一的条件,也可以有其他的限制条件。例如令 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$(称为库仑规范),则 $\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 所满足的方程是

$$\nabla^2\boldsymbol{A}+k^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\varepsilon\mu\,\nabla\phi \tag{1.1.16}$$

$$\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{1.1.17}$$

此时不能再用罗伦兹规范式(1.1.11)而得 $\phi=0$。故 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的表示式仍为

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}-\nabla\phi \tag{1.1.18}$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{1.1.19}$$

这里,$\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 满足方程(1.1.16)和方程(1.1.17)。但在 $\rho=0$ 时(此时应有 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\mathrm{j}\omega\rho=0$),

可以取式(1.1.17)中的 $\phi=0$,代入式(1.1.14),得

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A} \tag{1.1.20}$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{1.1.21}$$

式中,$\boldsymbol{A}$ 是如下方程的解:

$$\nabla^2\boldsymbol{A}+k^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}$$

这里$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0,\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$。

在研究辐射和绕射等问题中,常引入等效磁流密度的概念,此时方程(1.1.1)变为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}-\boldsymbol{J}^m \tag{1.1.22}$$

根据麦克斯韦方程组的对偶性,立即可写出由磁流密度 $\boldsymbol{J}^m$ 所产生的场

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{A}^m \tag{1.1.23}$$

$$\boldsymbol{H}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}+\frac{\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}^m}{\mathrm{j}\omega\varepsilon\mu} \tag{1.1.24}$$

对 $\boldsymbol{A}^m$ 同样有罗伦兹规范$\nabla\cdot\boldsymbol{A}^m=-\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\phi^m$。在此规范下,有

$$\nabla^2\boldsymbol{A}^m+k^2\boldsymbol{A}^m=-\varepsilon\boldsymbol{J}^m \tag{1.1.25}$$

将式(1.1.23)~式(1.1.25)与式(1.1.14)、式(1.1.15)和式(1.1.12)合起来,得

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}+\frac{\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}}{\mathrm{j}\omega\varepsilon\mu}-\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{A}^m \tag{1.1.26}$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}^m+\frac{\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}^m}{\mathrm{j}\omega\varepsilon\mu} \tag{1.1.27}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}+k^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}^m+k^2\boldsymbol{A}^m=-\varepsilon\boldsymbol{J}^m$$

辅助位函数 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^m$ 通常用来解激励问题,即已知场源求场。

在 $\boldsymbol{J}$ 及 ρ 都为零的区域中,需要解决的问题是根据一定的边界条件求场,亦即边界值问题。

在无源区解边界值问题,通常用赫兹位函数$\boldsymbol{\Pi}$。

1.2　赫兹矢量

在无源均匀介质中$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$,所以可取

$$\boldsymbol{E}=-\mu\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{\Pi}^m}{\partial t} \tag{1.2.1}$$

对时谐场

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\nabla\times\boldsymbol{\Pi}^m$$

代入式(1.1.2),并考虑到 $\boldsymbol{J}=0$,得

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=k^2\nabla\times\boldsymbol{\Pi}^m$$

所以

$$\boldsymbol{H}=k^2\boldsymbol{\Pi}^m+\nabla\phi^m$$

ϕ^m 是任意标量函数,将上面的 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{H}$ 表示式代入式(1.1.1),得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Pi}^m\equiv\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}^m-\nabla^2\boldsymbol{\Pi}^m=k^2\boldsymbol{\Pi}^m+\nabla\phi^m \tag{1.2.2}$$

同上节所述 $\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 间的关系一样，可取罗伦兹条件将$\boldsymbol{\Pi}^m$及 ϕ^m 联系起来，即取 $\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}^m=\phi^m$，则得

$$\nabla^2\boldsymbol{\Pi}^m+k^2\boldsymbol{\Pi}^m=0$$

由$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 可求得 ϕ^m 的方程

$$\nabla^2\phi^m+k^2\phi^m=0$$

所以，由$\boldsymbol{\Pi}^m$所表达的场如下：

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\ \nabla\times\boldsymbol{\Pi}^m \tag{1.2.3}$$

$$\boldsymbol{H}=-k^2\boldsymbol{\Pi}^m+\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}^m=\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Pi}^m \tag{1.2.4}$$

同理，由关系$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$，可取

$$\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\ \nabla\times\boldsymbol{\Pi}^e \tag{1.2.5}$$

可得

$$\boldsymbol{E}=k^2\boldsymbol{\Pi}^e+\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}^e=\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Pi}^e \tag{1.2.6}$$

$\boldsymbol{\Pi}^e$满足的方程是

$$\nabla^2\boldsymbol{\Pi}^e+k^2\boldsymbol{\Pi}^e=0$$

最后我们得到，在 ε 和 μ 为常数的无源区域中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=k^2\boldsymbol{\Pi}^e+\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}^e-\mathrm{j}\omega\mu\ \nabla\times\boldsymbol{\Pi}^m\\&=\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Pi}^e-\mathrm{j}\omega\mu\ \nabla\times\boldsymbol{\Pi}^m\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=k^2\boldsymbol{\Pi}^m+\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}^m+\mathrm{j}\omega\varepsilon\ \nabla\times\boldsymbol{\Pi}^e\\&=\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Pi}^m+\mathrm{j}\omega\varepsilon\ \nabla\times\boldsymbol{\Pi}^e\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{\Pi}^e+k^2\boldsymbol{\Pi}^e=0 \tag{1.2.9}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{\Pi}^m+k^2\boldsymbol{\Pi}^m=0 \tag{1.2.10}$$

比较式(1.2.7)和式(1.2.8)与式(1.1.26)和式(1.1.27)可看出，$\boldsymbol{\Pi}^e=\dfrac{\boldsymbol{A}}{\mathrm{j}\omega\varepsilon\mu}$，$\boldsymbol{\Pi}^m=\dfrac{\boldsymbol{A}^m}{\mathrm{j}\omega\varepsilon\mu}$。实际上，对时谐场来讲，矢量位 $\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{A}^m$ 与赫兹位$\boldsymbol{\Pi}^e$和$\boldsymbol{\Pi}^m$是没有本质区别的，只不过传统上对解有源问题利用 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^m)$，而解无源问题习惯上用$\boldsymbol{\Pi}$ ($\boldsymbol{\Pi}^e$,$\boldsymbol{\Pi}^m$)。下面我们还可以看到，在解一些边界值问题中，对辅助位函数的取法还有更简便的方法。

在 1.1 节中已经分析过，对于无源区域，可以取 $\phi=0$，因此 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 可以用一个矢量位 $\boldsymbol{A}$ 来表达($\boldsymbol{A}^m$ 的导出只是由于在某些情况下，用电流密度 $\boldsymbol{J}$ 求解问题较复杂而引入了等效磁流的概念的缘故)，并且根据罗伦兹规范，还有关系$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，也就是说，只需要 $\boldsymbol{A}$ 的两个独立分量就可把 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 表示出来。同样在以$\boldsymbol{\Pi}^e$及$\boldsymbol{\Pi}^m$所表达的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的式(1.2.7)和式(1.2.8)中，也可以只取两个合适分量。取$\boldsymbol{\Pi}^e$和$\boldsymbol{\Pi}^m$的哪个分量作为两个独立的辅助分量来求场，其原则是由矢量亥姆霍兹(Helmholtz)方程(1.2.9)和方程(1.2.10)所分解出来的该两个分量的标量方程是易解的。实际上，从后面的分析可以看出，列出$\boldsymbol{\Pi}^e$及$\boldsymbol{\Pi}^m$两个赫兹矢量，主要就为了可以区分 TE 波及 TM 波。

现在来看一下矢量算符$\nabla^2\boldsymbol{\Pi}$在各坐标系下的分解。已知矢量恒等式

$$\nabla^2\boldsymbol{\Pi}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Pi} \tag{1.2.11}$$

在直角坐标系(x,y,z)中，

$$\nabla^2\boldsymbol{\Pi}=\boldsymbol{e}_x\ \nabla^2\Pi_x+\boldsymbol{e}_y\ \nabla^2\Pi_y+\boldsymbol{e}_z\ \nabla^2\Pi_z \tag{1.2.12}$$

在圆柱坐标系(ρ,φ,z)中,

$$\nabla^2\boldsymbol{\Pi}=\boldsymbol{e}_\rho\left(\nabla^2\Pi_\rho-\frac{\Pi_\rho}{\rho^2}-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial\Pi_\varphi}{\partial\varphi}\right)+\boldsymbol{e}_\varphi\left(\nabla^2\Pi_\varphi-\frac{\Pi_\varphi}{\rho^2}+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial\Pi_\rho}{\partial\varphi}\right)+\boldsymbol{e}_z\nabla^2\Pi_z \tag{1.2.13}$$

在球坐标系(r,θ,φ)中,

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{\Pi}=&\boldsymbol{e}_r\left\{\nabla^2\Pi_r-\frac{2}{r^2}\left[\Pi_r+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\Pi_\theta)\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Pi_\varphi}{\partial\varphi}\right]\right\}\\&+\boldsymbol{e}_\theta\left\{\nabla^2\Pi_\theta+\frac{2}{r^2}\left[\frac{\partial\Pi_r}{\partial\theta}-\frac{\Pi_\theta}{2\sin\theta}-\cot\theta\frac{\partial\Pi_\varphi}{\partial\varphi}\right]\right\}\\&+\boldsymbol{e}_\varphi\left\{\nabla^2\Pi_\varphi+\frac{2}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial\Pi_r}{\partial\varphi}-\cot\theta\frac{\partial\Pi_\theta}{\partial\varphi}-\frac{\Pi_\varphi}{2\sin\theta}\right]\right\}\end{aligned} \tag{1.2.14}$$

由式(1.2.12)可看出,在直角坐标系中,3 个分量 Π_x、Π_y 和 Π_z 均满足标量亥姆霍兹方程,任取其中一个(例如取$\boldsymbol{\Pi}=\boldsymbol{e}_z\Pi_z$),而令其余两个分量为零,矢量方程$\nabla^2\boldsymbol{\Pi}+k^2\boldsymbol{\Pi}=0$即变为一个标量的亥姆霍兹方程$\nabla^2\Pi_z+k^2\Pi_z=0$。根据一定的边界条件(由$\boldsymbol{\Pi}$所表达的场的边界条件定出)即可解出 Π_z,代入式(1.2.7)和式(1.2.8)便可求得 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$。

在圆柱坐标系中,如取$\boldsymbol{\Pi}=\boldsymbol{e}_z\Pi_z$,$\Pi_\rho=\Pi_\varphi=0$,则由式(1.2.13)可看出,矢量方程$\nabla^2\boldsymbol{\Pi}+k^2\boldsymbol{\Pi}=0$也变为一个标量方程$\nabla^2\Pi_z+k^2\Pi_z=0$,此时标量拉普拉斯(Laplace)算子$\nabla^2$应在圆柱坐标系中展开。但如取$\boldsymbol{\Pi}=\boldsymbol{e}_\rho\Pi_\rho$,$\Pi_\varphi=\Pi_z=0$,代入式(1.2.13)中,可以得到以下两个方程:

$$\nabla^2\Pi_\rho-\frac{\Pi_\rho}{\rho^2}+k^2\Pi_\rho=0$$

$$\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial\Pi_\rho}{\partial\varphi}=0$$

联立解以上两个方程,必然有 $\Pi_\rho=0$ 或$\dfrac{\partial\Pi_\rho}{\partial\varphi}=0$,这只能反映$\dfrac{\partial}{\partial\varphi}=0$ 的场,并且上述方程也不好解。如取$\boldsymbol{\Pi}=\boldsymbol{e}_\varphi\Pi_\varphi$,$\Pi_\rho=\Pi_z=0$,同样有

$$\nabla^2\Pi_\varphi-\frac{\Pi_\varphi}{\rho^2}+k^2\Pi_\varphi=0$$

$$\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial\Pi_\varphi}{\partial\varphi}=0$$

解这两个方程也牵涉到与取 Π_ρ 分量同样的问题。因此在圆柱坐标系中,只有选 Π_z 分量是合适的。

对于球坐标系,则无论选哪个分量都不能反映一般的场(见式(1.2.14))。在 1.4 节中我们将看到,若不用罗伦兹规范而改用别的关系并作一些变换,则可将球坐标系中的$\boldsymbol{\Pi}$分量所满足的方程化为亥姆霍兹方程。当然,此时 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{H}$ 和$\boldsymbol{\Pi}^e$,$\boldsymbol{\Pi}^m$的关系不再遵循式(1.2.7)和式(1.2.8)而变为别的关系。

综上所述,在直角坐标系和圆柱坐标系中,我们可取 Π_z^e 和 Π_z^m 分量作为两个必要的独立分量,由它们就可以把矢量场 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{H}$ 完全表示出来。实际上 z 轴就是波导传输线的轴向,因而对任意截面的柱状波导(不一定是圆截面)仍可取其轴向分量 Π_z^e 和 Π_z^m 作为辅助赫兹位分量来求场。

从以上分析可以看出,作为辅助位函数的引入,对时谐场来说,矢量位 $\boldsymbol{A}$ 和赫兹位$\boldsymbol{\Pi}$

本身没有原则区别。但由于研究问题的重点不同，在无源时，对 $\boldsymbol{A}$ 可以取 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ 的规范，因此 $\boldsymbol{A}$ 的独立分量只有两个。对 $\boldsymbol{\Pi}$ 我们没有取 $\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}=0$ 的关系，而是用两个独立分量 Π_z^e 和 Π_z^m 来表达场，这实质上是同一个问题的两种不同表现形式。

取 $\boldsymbol{\Pi}^e$ 和 $\boldsymbol{\Pi}^m$ 的各一个同样的分量来表达场，在微波传输线中，即可将场分类为电型场和磁型场。

设有柱坐标 (u_1,u_2,u_3)，其拉梅系数为 h_1,h_2,h_3。取 $u_3=z$，即为 (u_1,u_2,z)，故拉梅系数 $h_3=1$。由于 u_3 是纵向轴，故一般有 $\dfrac{\partial}{\partial u_3}(h_1)=0,\dfrac{\partial}{\partial u_3}(h_2)=0$。令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Pi}^e&=\boldsymbol{e}_z\Pi_z^e,\quad \Pi_{u_1}^e=\Pi_{u_2}^e=0\\ \boldsymbol{\Pi}^m&=\boldsymbol{e}_z\Pi_z^m,\quad \Pi_{u_1}^m=\Pi_{u_2}^m=0\end{aligned}$$

代入式(1.2.7)和式(1.2.8)中，可得

$$\left.\begin{aligned}E_1&=\frac{1}{h_1}\frac{\partial^2\Pi_z^e}{\partial u_1\partial z}-\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{h_2}\frac{\partial\Pi_z^m}{\partial u_2}\\ E_2&=\frac{1}{h_2}\frac{\partial^2\Pi_z^e}{\partial u_2\partial z}+\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{h_1}\frac{\partial\Pi_z^m}{\partial u_1}\\ E_z&=\frac{\partial^2\Pi_z^e}{\partial z^2}+k^2\Pi_z^e=\frac{-1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial\Pi_z^e}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial\Pi_z^e}{\partial u_2}\right)\right]\\ H_1&=\frac{1}{h_2}\frac{\partial^2\Pi_z^m}{\partial u_1\partial z}+\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{h_2}\frac{\partial\Pi_z^e}{\partial u_2}\\ H_2&=\frac{1}{h_2}\frac{\partial^2\Pi_z^m}{\partial u_2\partial z}-\frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{h_1}\frac{\partial\Pi_z^e}{\partial u_1}\\ H_z&=\frac{\partial^2\Pi_z^m}{\partial z^2}+k^2\Pi_z^m=-\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial\Pi_z^m}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial\Pi_z^m}{\partial u_2}\right)\right]\\ &\nabla^2\Pi_z^e+k^2\Pi_z^e=0\\ &\nabla^2\Pi_z^m+k^2\Pi_z^m=0\end{aligned}\right\}\tag{1.2.15}$$

其中 E_z 和 H_z 的表达式中的第二个等号可由最后两个方程得出。

在式(1.2.15)中如取 $\Pi_z^e=0$，则 $E_z=0$，即为 TE 波。取 $\Pi_z^m=0$，则 $H_z=0$，即为 TM 波。

式(1.2.15)可写成更简洁的形式。设波沿 z 轴传播，其因子为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$。用下标 t 代表横向分量，则有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}_t&=-\mathrm{j}\beta\,\nabla_t\Pi_z^e-\mathrm{j}\omega\mu\,\nabla_t\Pi_z^m\times\boldsymbol{e}_z\\ E_z&=(k^2-\beta^2)\Pi_z^e\\ \boldsymbol{H}_t&=-\mathrm{j}\beta\,\nabla_t\Pi_z^m+\mathrm{j}\omega\varepsilon\,\nabla_t\Pi_z^e\times\boldsymbol{e}_z\\ H_z&=(k^2-\beta^2)\Pi_z^m\\ &\nabla^2\Pi_z^e+k^2\Pi_z^e=0\\ &\nabla^2\Pi_z^m+k^2\Pi_z^m=0\end{aligned}\right\}\tag{1.2.16}$$

1.3 电型位函数和磁型位函数

本节我们用另一方法推导出场表示式，将之推广到更一般化的应用。

设有正交曲线坐标 (u_1,u_2,u_3)，其拉梅系数是 h_1,h_2,h_3。将无源麦克斯韦方程