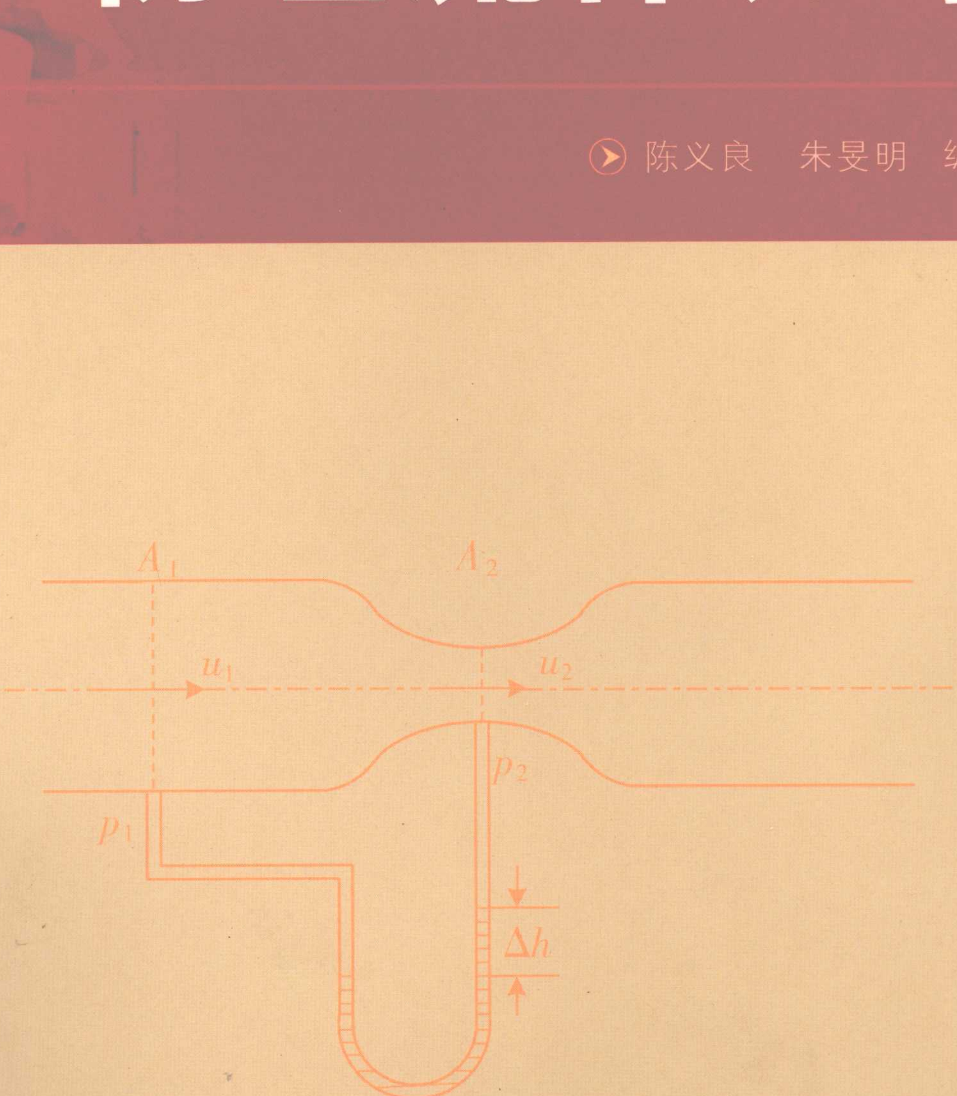
中国科学技术大学精品教材

物理流体力学

陈义良　朱旻明　编著



中国科学技术大学出版社

中国科学技术大学精品教材

物理流体力学

WULI LIUTI LIXUE

陈义良　朱旻明　编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是为中国科学技术大学热能和动力工程专业研究生开设的《高等流体力学》课程编写的教材.内容包括:流体力学基本概念和方程的推导,流体在表面力和各种体积力(如浮力,旋转坐标系中的科氏力等)作用下的流动,有自由表面的液体在重力场中的波动,流动的不稳定性和湍流.着重分析各类流动的物理过程和流动特性.

本书也可以作为航空航天、大气物理、冶金和化工等专业的研究生和科研人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

物理流体力学/陈义良,朱旻明编著.—合肥:中国科学技术大学出版社,2008.9
(中国科学技术大学精品教材)
"十一五"国家重点图书
ISBN 978-7-312-02168-8

Ⅰ.物… Ⅱ.①陈… ②朱… Ⅲ.物理力学:流体力学—研究生—教材 Ⅳ.O35

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 158901 号

中国科学技术大学出版社出版发行
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
网址 http://press.ustc.edu.cn
合肥远东印务有限责任公司印刷
全国新华书店经销

开本:710×960 1/16 印张:15.25 插页:2 字数:290 千
2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月第 1 次印刷
印数:1-3000 册
定价:29.00 元

总　序

2008年是中国科学技术大学建校五十周年。为了反映五十年来办学理念和特色，集中展示教材建设的成果，学校决定组织编写出版代表中国科学技术大学教学水平的精品教材系列。在各方的共同努力下，共组织选题281种，经过多轮、严格的评审，最后确定50种入选精品教材系列。

1958年学校成立之时，教员大部分都来自中国科学院的各个研究所。作为各个研究所的科研人员，他们到学校后保持了教学的同时又作研究的传统。同时，根据“全院办校，所系结合”的原则，科学院各个研究所在科研第一线工作的杰出科学家也参与学校的教学，为本科生授课，将最新的科研成果融入到教学中。五十年来，外界环境和内在条件都发生了很大变化，但学校以教学为主、教学与科研相结合的方针没有变。正因为坚持了科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合的方针，并形成了优良的传统，才培养出了一批又一批高质量的人才。

学校非常重视基础课和专业基础课教学的传统，也是她特别成功的原因之一。当今社会，科技发展突飞猛进、科技成果日新月异，没有扎实的基础知识，很难在科学技术研究中作出重大贡献。建校之初，华罗庚、吴有训、严济慈等老一辈科学家、教育家就身体力行，亲自为本科生讲授基础课。他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德，带出一批又一批杰出的年轻教员，培养了一届又一届优秀学生。这次入选校庆精品教材的绝大部分是本科生基础课或专业基础课的教材，其作者大多直接或间接受到过这些老一辈科学家、教育家的教诲和影响，因此在教材中也贯穿着这些先辈的教育教学理念与科学探索精神。

改革开放之初，学校最先选派青年骨干教师赴西方国家交流、学习，他们在带回先进科学技术的同时，也把西方先进的教育理念、教学方法、教学

内容等带回到中国科学技术大学，并以极大的热情进行教学实践，使“科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合”的方针得到进一步深化，取得了非常好的效果，培养的学生得到全社会的认可。这些教学改革影响深远，直到今天仍然受到学生的欢迎，并辐射到其他高校。在入选的精品教材中，这种理念与尝试也都有充分的体现。

中国科学技术大学自建校以来就形成的又一传统是根据学生的特点，用创新的精神编写教材。五十年来，进入我校学习的都是基础扎实、学业优秀、求知欲强、勇于探索和追求的学生，针对他们的具体情况编写教材，才能更加有利于培养他们的创新精神。教师们坚持教学与科研的结合，根据自己的科研体会，借鉴目前国外相关专业有关课程的经验，注意理论与实际应用的结合，基础知识与最新发展的结合，课堂教学与课外实践的结合，精心组织材料、认真编写教材，使学生在掌握扎实的理论基础的同时，了解最新的研究方法，掌握实际应用的技术。

这次入选的50种精品教材，既是教学一线教师长期教学积累的成果，也是学校五十年教学传统的体现，反映了中国科学技术大学的教学理念、教学特色和教学改革成果。该系列精品教材的出版，既是向学校50周年校庆的献礼，也是对那些在学校发展历史中留下宝贵财富的老一代科学家、教育家的最好纪念。

侯建国

2008年8月

前　言

本教材是根据作者在中国科学技术大学为热能和动力工程专业研究生开设的《高等流体力学》课程的讲稿整理而成.热能的产生、传递以及热能和其他形式能量之间的转换都是在流体的流动中完成的.流动的特性关系到热能产生和传递的速率,也决定了能量的转换效率.流体力学是热能和动力工程专业知识结构中重要的组成部分.

热能和动力工程领域涉及的流动问题,由于包含了热能和物质的传递,且大多数是内流,对分子输运、湍流和湍流引起的输运特别关注.有很多流动的流场结构与流场中的温度分布有关,甚至完全决定于温度分布(如自然对流).另外,在动力工程领域,旋转机械内的流动、波浪的运动及波浪能的利用也是很重要的组成内容.在选材上,本书除保持课程的系统性之外,还尽量兼顾到热能和动力工程领域的一些特殊要求.由于在大气物理、冶金、化工工程等领域中的流动,也都涉及热过程,因此,我们希望本教材对其他专业的学生也有参考价值.

流体力学的控制方程是一组非线性的偏微分方程,对流体力学方程的特性和求解的方法进行研究,这是应用数学的问题.从工程应用角度看,我们可以用数值求解或实验的方法,得出某个特定流场中各种有用的信息.本课程主要用物理观点来分析流动的各种特性,讨论流体力学中如下两类问题:一类是在不同外力作用下流体流动的特征.首先是无体积力影响的流动;然后是在重力场中,因温度或成分变化导致流体密度有变化的流动,或称有浮力影响的流动;第三是地球大气层或旋转机械中气体的流动;最后是液体有自由界面的流动——波浪的运动.另一类是因为流体流动的控制方程是非线性的偏微分方程,流体的流动有一个稳定性问题.原来处于平衡状态的流场,当条件改变时,在扰动的作用下,原有的流动状态会被破坏,变成其他形态的流动,或继续发生不稳定,并最终变成湍流.在自然界和工程中的流动绝大多数是湍流.因此本课程中,我们也将对流动稳定性和湍流作简要的讨论.

为了从复杂的流体力学方程出发，对上述两类问题进行分析，给出简明的结论，我们需要作出假定，对流动系统进行简化.本课程中采用的主要简化方法有：

(1) 假定流体是不可压的，即流体的密度不随时间和空间变化，流体满足牛顿粘性应力定律，且物性(如 μ，λ 和 c_p)是常数.

(2) 对流体力学方程进行量纲分析，定义各种不同的无量纲参数.根据无量纲参数的大小，对流场进行分类，并简化方程，然后对某个给定的无量纲参数数值范围的流场特性进行分析.这是本课程中用的最多的一种简化方法.如第2章中，根据Reynolds的大小，把流动分成无粘流和有粘流，并分别进行分析，第3章中对Grashof数 $Gr\gg1$ 的流动进行分析，第4章对Rossby数 $Ro\ll1$ 的流动进行分析等等.

(3) 在分析波动和流动稳定性问题时，经常采用线性化的简化方法，即假定参数数值不大，非线性项是一个高阶小量，可以忽略不计.

(4) 当流场在流动方向的长度尺度比其他方向的长度尺度大很多时，我们往往采用自相似性假定.即如果用当地的特征参数和特征长度进行无量纲化，则无量纲参数在横向无量纲坐标中的分布与流动方向的坐标无关.如果各地的特征参数和特征长度是常数，则自相似性假定退化为完全发展的条件，即参数在流动方向的梯度等于零.

为了突出主要的影响因素，分析流场的几何结构一般都比较简单.

全书内容分为三部分：

第1章，在扼要介绍流体力学的基本概念以后，详细推导出流体力学的控制方程，并用具体例子说明流体力学方程的某些应用.

第2章至第5章介绍流体在各种不同外力作用下，产生流动的流场特征.第2章讨论由压力梯度或因物体相对运动而产生的流体流动的特性.物体在流体中运动时，因为应力使它周围的流体产生运动.应力(包括压强)是流体中的一种表面力，在这一章讨论的流动中，假定体积力的影响很小，可以忽略.在不可压缩流动中，表征流场特性的无量纲参数是Reynolds数.第3章讨论流场中由于温度或浓度的变化导致流体密度的变化，因而流体微团所受的重力有差别而产生的流动.在这一章中，我们通常引进一个参考的密度值或重力，任一流体微团所受的重力与参考重力之差称为浮力，所以，这类流动也称为浮力产生的流动.在浮力产生的流动中，重要的无量纲参数有Grashof数、Prandtl数和Rayleigh数.第4章讨论旋转坐标系中流体流动的特征.当坐标系作匀速旋转时，流体微团受科氏力和离心力的

作用，由于科氏力的方向与流动的方向垂直，这类流动有很多新的特征．在分析大气运动和旋转机械内的流动时，要考虑科氏力的影响．重要的无量纲参数有 Rossby 数和 Ekman 数．第 5 章讨论水面重力波的运动．在波浪运动中，重力的影响比粘性的影响大，波浪运动又是无旋的，可以用线性的速度势方程描述．但表征水面运动的边界条件仍是非线性的，分析很困难．在这一章中，我们仅介绍波浪运动的一些基础知识．

第 6 章和第 7 章介绍流动的不稳定性和湍流．流动不稳定性问题的分析是很复杂的，我们在第 6 章中仅介绍了线性的稳定性理论．首先讨论非线性常微分方程(Lorenz 方程)的稳定性问题，然后用谐波方法推广到流体力学非线性偏微分方程的分析．层流到湍流的转捩是一个尚未解决的问题，我们仅介绍 Lorenz 方程数值求解的结果，并指出剪切流中有多种可能的转捩途径．第 7 章对湍流作了简单的介绍，首先讨论湍流的模型理论，然后介绍均匀各向同性湍流、自由剪切湍流和壁面湍流，最后给出湍流在谱空间的动力学方程．

需要强调指出，在工程实践中，遇到的流动往往是很复杂的，产生流动的多种原因可能同时存在，除表面力之外，同时有重力和科氏力的影响．这时就需根据所学的知识，对各种因素影响的大小进行分析，可以首先抓住最主要的影响因素进行分析，然后再考虑其他次要因素引起的修正．

全书的课程内容由陈义良编写；朱旻明博士编写了各章习题，绘制了全书插图，并对全书内容提出了许多修改意见；历届的研究生也对课程内容提出了不少有益的建议；郄贵苏同志负责全书的输入和校对工作．

由于时间仓促，书中肯定有不少不妥的地方，恳请读者批评指正．

编著者
2008 年

目 次

第 1 章　流体力学的基本概念和控制方程

1.1　流体力学的一些基本概念

1.1.1　流体质点和连续介质

流体，无论是液体或气体，都是由分子组成的，分子有一定的大小，分子和分子之间有很大的距离，分子在分子群中作随机的运动. 一个运动的分子只有和其他分子相碰撞时，才会改变运动的方向. 在经典力学中，表征分子运动状态的参数有分子的质量、分子运动的速度和分子运动的自由程(分子连续两次碰撞间隔中走过的距离).

用连续介质的方法描述流体的运动时，我们不是去研究单独一个个分子运动的规律，而是把流体看作一个连续的整体，对分子运动的参数进行统计，定义出流体的宏观参数，如流体的密度、压强、温度和速度等.

为了定义宏观参数，首先需定义流体质点. **流体质点**是由大量分子所组成的一个流体微团，对流体质点内所有分子运动的参数进行统计平均，即可定义该流体微团运动的宏观参数. 如流体微团的密度、速度、压强和温度等与流体微团内分子运动参数之间的关系为

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{N} m_i \\ \boldsymbol{u} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{v}_i \\ p_x &= \rho\,\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_{ix}^2 = \frac{1}{3}\rho\,\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{v}_i^2 \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

$$T = \frac{\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\dfrac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_i^2}{\dfrac{3}{2}k}$$

其中,N 为流体质点内的分子数,τ 为流体质点的体积,m_i 和 $\boldsymbol{v}_i$ 分别为第 i 个分子的质量和速度,k 为玻尔兹曼常数.为了使式(1.1)定义的参数有确切的数值,流体质点内的分子数应该足够的多.这就给流体质点的尺度提出了要求:流场的尺度要比分子运动的平均自由程大很多,同时流场的体积又要比流体质点的体积大很多,这样才能在一个流场中定义出很多包含有大量分子的流体质点.为了在连续介质中引进微分的算子,则对流场的尺度提出了更严格的要求.连续介质假定对流场尺度的要求,我们可以用不等式

$$L \gg l \gg \bar{\xi} \tag{1.2}$$

表示,其中 L,l 和 $\bar{\xi}$ 分别表示流场、流体质点和分子平均自由程的尺度.

但是对流场尺度的要求是相对的.比如在高空,气体很稀薄,能采用连续介质假定的流场尺度要求很大;但在地面,常温常压下的气体在毫米量级的管子中的流场仍可用连续介质方法描述.当然尺寸再缩小时,就需仔细分析了.经验表明,当数 $K_n = \bar{\xi}/l < 10^{-2}$ 时,可以采用连续介质假定,其中 K_n 称为**努森数**.

1.1.2 流体中的物质导数

所有的物理规律(如质量守恒定律、牛顿第二定律、热力学第一定律等)都是以确定的物质作为体系来表述的,因此在描述流体运动的规律时,经常涉及流体质点的物理量随时间的变化率,如流体质点的加速度表示为 $\boldsymbol{a} = \mathrm{D}\boldsymbol{u}/\mathrm{D}t$,它不同于这些物理量在固定空间上的时间导数.我们将流体质点物理量随时间的变化率称为该物理量的**物质导数**,而将固定空间上物理量的时间导数称为流场的**局部变化率**.

流体质点在流场中是运动的,它的空间位置随时间不断变化,因此流体质点的物理量是时间和空间位置的函数,即可以写成 $\Phi[t, x_j(t)]$,因此它的物质导数可以写成

$$\frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + u_j\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\Phi \tag{1.3}$$

其中 $\nabla\Phi$ 为物理量的梯度.流体质点速度的物质导数同样可以写成

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{1.4}$$

1.1.3　流体线和流体面的保持性定理

流场中同一时刻由确定的一组连续排列的流体质点组成的线称为**流体线**.**连续流体线的保持性**是指:连续可微的流体线在运动过程中始终保持为连续可微的流体线,并且其上流体质点的排列顺序不随时间变化.

设 t_0 时刻有一连续的流体线,其拉格朗日坐标可以用参数方程

$$\left.\begin{aligned} a &= f_a(\lambda) \\ b &= f_b(\lambda) \\ c &= f_c(\lambda) \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

表示,其中 λ 为表征流体线上流体质点的参数. a,b,c 可以是 t_0 时刻流体质点所在位置的三个坐标.因为这是一条连续流体线,a,b,c 是 λ 的连续可微函数.流体质点在以后任意时刻的空间位置,将是拉格朗日坐标 a,b,c 和时间 t 的函数,因此有

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(f_a(\lambda),f_b(\lambda),f_c(\lambda),t) \\ x_2 &= x_2(f_a(\lambda),f_b(\lambda),f_c(\lambda),t) \\ x_3 &= x_3(f_a(\lambda),f_b(\lambda),f_c(\lambda),t) \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

根据连续介质的假定和连续流体线的定义,x_1,x_2,x_3 是 a,b,c,t 的连续函数,a,b,c 又是 λ 的连续函数,所以 x_1,x_2,x_3 是 λ 和 t 的连续函数.因此,t_0 时刻的连续流体线在 t 时仍是连续流体线.流体线的质点排列顺序取决于参数 λ,而 λ 不随时间 t 变化,所以流体线上的质点排列顺序也不随时间变化.

光滑流体面的保持性是指:光滑流体面在连续运动过程中,始终保持为光滑流体面,并且流体质点的排列顺序不随时间变化.

若在 t 时刻,流体面的方程为 $x_3=f(x_1,x_2,t)$,在流体面上任取一点 M,其坐标为 x_{1M},x_{2M} 和 x_{3M}.占据此空间的流体质点的拉格朗日坐标为 a_M,b_M,c_M.若在 M 点上,偏导数 $\partial f/\partial x_1$ 和 $\partial f/\partial x_2$ 分别是流体线

$$x_3^1 = f(x_1,x_{2M},t) \text{ 和 } x_3^2 = f(x_{1M},x_2,t) \tag{1.7}$$

的斜率.这两条流体线交点上的流体质点为 a_M,b_M,c_M.

若在 t_0 时刻,流体面在 M 点光滑,则上述两条流体线在此点连续可微.根据连续流体线保持性定理,在其他时刻,这两条流体线在该点上仍保持连续可微,于是可以得出结论,t 时刻流体线(1.7)在 M 点连续可微.故流体面在 M 点光滑.

根据光滑流体面的保持性定理,可以写出流体面必须满足的微分方程.设光滑流体面的方程为

$$F(x_1, x_2, x_3, t) = x_3 - f(x_1, x_2, t) = 0 \tag{1.8}$$

在 $t + \mathrm{d}t$ 时刻,任一流体质点运动到新的位置 $x_i + u_i\mathrm{d}t$,这时流体面形状为

$$F(x_1 + u_1\mathrm{d}t, x_2 + u_2\mathrm{d}t, x_3 + u_3\mathrm{d}t, t) = 0 \tag{1.9}$$

用泰勒级数展开,并略去二阶以上的高阶小量,可得

$$F(x_1, x_2, x_3, t) + \frac{\partial F}{\partial x_1}u_1\mathrm{d}t + \frac{\partial F}{\partial x_2}u_2\mathrm{d}t + \frac{\partial F}{\partial x_3}u_3\mathrm{d}t + \frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t = 0$$

代入式(1.8),得

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial F}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial F}{\partial x_3} = 0 \tag{1.10}$$

此即光滑流体面必须满足的微分方程.

1.1.4 速度分解定理

设流场中 P 点和在它邻域内任一 Q 点的位置向径分别为 $\boldsymbol{r} = x_i$ 和 $\boldsymbol{r}' = x'_i$(如图 1.1 所示).在同一时刻,处在 P 点和 Q 点流体微团的速度分别为 $\boldsymbol{u} = u_i$ 和 $\boldsymbol{u}' = u'_i$.若 Q 点很靠近 P 点,利用泰勒级数展开可得

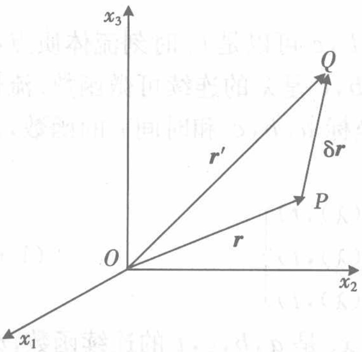


图 1.1 P 点邻域的速度场

$$u'_i - u_i = \delta u_i \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta x_j \tag{1.11}$$

其中 $\partial u_i/\partial x_j$ 为 P 点的速度梯度,表征了 P 点速度变化的大小.它是一个二阶张量

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

$\delta x_j = x'_j - x_j$ 是 Q 点对 P 点的相对位置向径.

速度梯度 $\partial u_i/\partial x_j$ 可以分解成两部分

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = S_{ij} + \gamma_{ij} \tag{1.13}$$

我们分别称

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.14}$$

为流场的**应变率张量**和**旋转张量**. 于是式(1.11)可以写成

$$\delta u_i = S_{ij}\delta x_j + \gamma_{ij}\delta x_j \tag{1.15}$$

即 P 点邻域内的速度变化由应变率张量和旋转张量两部分组成.

应变率张量

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

是一个对称的二阶张量 $S_{12} = S_{21}$，$S_{13} = S_{31}$，$S_{23} = S_{32}$. 下面分析应变率张量中各分量的物理意义. 在图 1.1 中，P 点和 Q 点之间流体线的长度为

$$(\delta S)^2 = \delta x_i^2 \tag{1.17}$$

两端对时间求导数得

$$2(\delta S)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta S) = 2\delta x_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x_i) = 2\delta x_i \delta\left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right) = 2\delta x_i \delta u_i \tag{1.18}$$

两端同除以 $2(\delta S)^2$，并利用式(1.11)，可得

$$\frac{1}{\delta S}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta S) = \frac{\delta x_i}{\delta S}\frac{\delta u_i}{\delta S} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\delta x_i}{\delta S}\frac{\delta x_j}{\delta S} \tag{1.19}$$

其中 $\delta x_i/\delta S$ 为流体线 PQ 和三个坐标轴夹角的余弦. $(\delta x_i/\delta S)(\delta x_j/\delta S)$ 为一个对称的二阶张量，它和反对称张量 γ_{ij} 的标量积等于零，因此式(1.19)又可以写成

$$\frac{1}{\delta S}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta S) = S_{ij}\frac{\delta x_i}{\delta S}\frac{\delta x_j}{\delta S} \tag{1.20}$$

若流体线 PQ 与 x_1 轴平行，则有 $\delta x_1/\delta S_1 = 1$，$\delta x_2/\delta S_1 = \delta x_3/\delta S_1 = 0$，则有

$$S_{11} = \frac{1}{\delta S_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta S_1) \tag{1.21}$$

即应变量张量中，S_{11}表征了与 x_1 轴平行的流体线长度的相对变化率. 同样，S_{22}和S_{33}分别表征与 x_2 和 x_3 轴平行的流体线长度的相对变化率.

若在 P 点附近，有一个三边分别和三个坐标轴平行的长方体流体微团，三边的长度分别为 δS_1，δS_2 和 δS_3，该长方体的体积为

$$\delta V = \delta S_1 \cdot \delta S_2 \cdot \delta S_3 \tag{1.22}$$

两端对时间求导数，并除以体积可得

$$\frac{1}{\delta V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta V) = \frac{1}{\delta S_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta S_1) + \frac{1}{\delta S_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta S_2) + \frac{1}{\delta S_3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta S_3)$$

$$= S_{11} + S_{22} + S_{33}$$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \tag{1.23}$$

即应变率张量中，主对角线上三个分量的和表征了流体微团体积的相对变化率.实际上，任意位置和任意形状的流体微团都有同样的性质.我们将应变率张量中主对角线上三个分量的和称为速度场的**散度**，并用符号

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\delta V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta V) \tag{1.24}$$

表示.

下面再分析应变率张量 S_{ij} 中非对角线上的分量.若从 P 点引两条不同方向的流体线 PQ 和 PR，相对于 P 点的位置向径分别为 $\delta\boldsymbol{r}'$ 和 $\delta\boldsymbol{r}''$，它们之间的夹角为 θ.则两个位置向径的标量积

$$\delta\boldsymbol{r}' \cdot \delta\boldsymbol{r}'' = \delta S' \cdot \delta S'' \cos\theta \tag{1.25}$$

其中 $\delta S'$ 和 $\delta S''$ 分别为 PQ 和 PR 流体线的长度.在式(1.25)的左端代入 $\delta\boldsymbol{r}' = \delta x_j' = (x_j' - x_j)$ 和 $\delta\boldsymbol{r}'' = \delta x_j'' = x_j'' - x_j$，并对时间求导数得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x_j' \cdot \delta x_j'') &= \delta x_j' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x_j'') + \delta x_j'' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x_j') \\ &= \delta x_j' \delta u_j'' + \delta x_j'' \delta u_j' \\ &= \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\delta x_i'' \delta x_j' + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\delta x_j'' \delta x_i'\end{aligned} \tag{1.26}$$

在最后一个等式中，利用了速度梯度是 P 点值的条件.利用求和下标可以替换的原则，上式可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x_j' \cdot \delta x_j'') = 2S_{ij}\delta x_i' \cdot \delta x_j'' \tag{1.27}$$

式(1.25)右端对时间求导数得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta S' \cdot \delta S'' \cdot \cos\theta) = \cos\theta\left[\delta S' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta S'') + \delta S'' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta S')\right] - \delta S' \cdot \delta S'' \sin\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1.28}$$

令式(1.27)和(1.28)的右端相等，并除以 $\delta S' \cdot \delta S''$，可得

$$2S_{ij}\frac{\delta x_i'}{\delta S'}\frac{\delta x_j''}{\delta S''} = \cos\theta\left[\frac{1}{\delta S''}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta S'') + \frac{1}{\delta S'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta S')\right] - \sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1.29}$$

若令流体线 PQ 和 x_1 轴平行，流体线 PR 和 x_2 轴平行，则有 $\delta x_i'/\delta S' = \delta_{i1}$，$\delta x_j''/\delta S'' = \delta_{j2}$，$\theta = \pi/2$，代入式(1.29)得

$$S_{12} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1.30}$$

式(1.30)表示，在流场中过 P 点引两条与 x_1 和 x_2 轴平行的流体线，则应变率张量 S_{12} 表示该两条流体线之间夹角在单位时间内减小值的一半. 与此类似，应变率分量 S_{13} 和 S_{23} 也有同样的物理意义. 因此，应变率张量中非对角线分量也称为**剪切应变**，如图 1.2 所示.

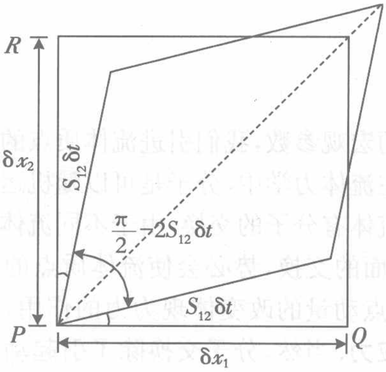


图 1.2　剪切应变示意图

下面再讨论旋转张量的物理意义，在旋转张量

$$\gamma_{ij}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{1.31}$$

中，主对角线上的三个分量等于零，以主对角线作对称轴，对称的两个分量大小相等，方向相反，是一个反对称张量. 旋转张量中只有三个分量是独立的. 我们将该三个独立分量的两倍，定义为流场在 P 点的旋度分量，即

$$\omega_3=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2},\quad \omega_2=\frac{\partial u_3}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_3},\quad \omega_1=\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \tag{1.32}$$

利用置换张量的性质，可得

$$\gamma_{ij}=-\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_k \tag{1.33}$$

将式(1.33)代入式(1.15)得

$$\delta u_i=S_{ij}\delta x_j-\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_k\delta x_j \tag{1.34}$$

其中第二项为旋度和相对位置向径的矢量积. 在物理中，我们知道绕某固定轴旋转时，刚体上任一点的速度为