21世纪高等学校电子信息类规划教材

# 《数字信号处理》学习指导

那　彦　石光明　主编

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

21 世纪高等学校电子信息类规划教材

# 《数字信号处理》学习指导

郱　彦　石光明　主编

西安电子科技大学出版社

2008

## 内 容 简 介

本书是配合陆光华教授等撰写的《数字信号处理》教材的学习指导书。

本书除第8章外，每个章节均以学习要点、典型例题、习题解答为主线展开。书中介绍了时域离散时间信号与系统的数学模型，线性卷积的概念，序列的傅里叶变换与$\mathscr{Z}$变换，离散傅里叶变换，快速完成离散傅里叶变换的FFT算法，数字滤波器的设计方法，以及实现FIR、IIR数字滤波器的基本结构。为拓展学生的视野，还介绍了离散希尔伯特变换和基于DSP的数字信号处理实际系统的有关内容。

通过学习本书，读者可加深对数字信号处理基本概念和主要理论的理解，提高分析问题和解决问题的能力。

本书可作为电子工程、通信工程、计算机工程、控制工程本科生及研究生学习“数字信号处理”课程的辅导书，也可作为从事信号处理的科技人员的参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

《数字信号处理》学习指导/那彦，石光明主编．—西安：西安电子科技大学出版社，2008.6

21世纪高等学校电子信息类规划教材

ISBN 978-7-5606-2022-0

Ⅰ.数…　Ⅱ.那…　Ⅲ.数字信号—信号处理—高等学校—教学参考资料

Ⅳ.TN911.72

**中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第044975号**

责任编辑　杨宗周

出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电　　话　(029)88242885　88201467　　　邮　编　710071

http://www.xduph.com　　　E-mail:xdupfxb001@163.com

经　　销　新华书店

印刷单位　陕西天意印务有限责任公司

版　　次　2008年6月第1版　2008年6月第1次印刷

开　　本　787毫米×1092毫米　1/16　印张8.625

字　　数　196千字

印　　数　1～4000册

定　　价　12.00元

ISBN 978-7-5606-2022-0/TN·0419

**XDUP 2314001-1**

# 前　言

数字信号处理理论起源于17世纪的数值分析，它是信息科学中许多学科的基础。由于数字集成电路和计算机技术的发展，目前，数字信号处理技术已广泛应用于各种类型的电子系统中。

建立时域离散时间信号与系统的数学模型，引入线性卷积的概念，是研究数字信号处理理论过程中非常重要的一步。借助傅里叶变换与$\mathscr{Z}$变换，使得对离散时间信号与系统的分析更加方便。借助离散傅里叶变换，可获得离散信号频谱的离散形式。采用FFT算法，则可快速完成离散傅里叶变换。基于一定的技术指标，运用各种数字滤波器设计方法，可设计出满足要求的FIR或IIR数字滤波器，实现对信号成分的频率域处理。通常，数字信号处理算法可在基于DSP的数字信号处理系统或PC机上实现。

本书旨在帮助读者深入理解数字信号处理理论中的基本概念和相关知识，提高分析问题和解决问题的能力。本书除第8章外，每章均由学习要点、典型例题、习题解答三部分组成。学习要点部分注重讲解概念及理论体系，突出知识点和知识结构；典型例题部分选择若干有代表性的例题，以解题来加深对基本概念和基础理论的理解；习题解答部分则给出了原教材的习题解答，主要目的是拓展读者的思路，并对自学读者提供一个检验自学效果的工具。

与原教材相呼应，本书共分8章。那彦撰写了第1、2、4、8章，吕雁撰写了第3、5章，李军撰写了第6、7章。全书由那彦、石光明统稿。

本书的出版得到了西安电子科技大学出版社杨宗周编辑的帮助。另外，在撰写本书时，参考了多种资料；电子工程学院的多位老师和同学对本书内容提出了许多宝贵意见；陆光华老师对书稿进行了仔细审阅。邓志伟、马克江收集了部分资料。在此对以上人员一并表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中不当之处在所难免，欢迎广大读者提出宝贵意见。

作　者

2008.3

于西安电子科技大学

# 目　　录

# 第一章 时间离散信号与系统

## 1.1 引 言

本章介绍有关时域离散信号和系统的几个基本定义，并讨论时域离散系统和信号的频域表示。

在讨论有关系统的基本概念时，介绍了几个重要的系统性质，其中包括因果性、稳定性、时不变性和线性等概念。研究了用卷积和来表示和定义线性非移变系统的方法。在离散信号和系统的频域分析中，介绍了系统对于复指数输入的响应，以及系统频率响应的概念和理论。

## 1.2 学 习 要 点

### 1.2.1 时间离散信号——序列

**1. 时间离散信号的概念**

在数字信号处理中，一般用 $x(n)$ 表示时间离散信号(序列)，它是一个实数或复数的数字序列。

注意，序列 $x(n)$ 是一个离散函数，$n$ 为整数。$n$ 可以是取整数值的时间，也可以是取整数值的其他量(如位移)，因此可以把 $n$ 单纯看做是数字序列的下标。当 $n\neq$ 整数时，$x(n)$ 无定义，切勿随便将其解读为零。

**2. 常用序列**

1）单位采样序列

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases} \tag{1.1}$$

2）单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases} \tag{1.2}$$

3）矩形序列

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\leqslant n\leqslant N-1\\0 & \text{其他}\end{cases}\tag{1.3}$$

4）实指数序列

$$x(n)=a^n\tag{1.4}$$

5）正弦序列

$$x(n)=A\sin(\omega n+\phi)\tag{1.5}$$

6）复指数序列

$$x(n)=\mathrm{e}^{(\delta+\mathrm{j}\omega)n}\tag{1.6}$$

单位采样序列、单位阶跃序列和复指数序列是三个重要的离散时间信号，任何复杂的信号都可以用它们来表示。

**3. 序列的周期性**

如果对于所有 $n$，具有一个最小的正整数 $N$，使 $x(n)=x(n+N)$，则 $x(n)$为周期序列，周期为 $N$。

注意，周期应为最小的正整数 $N$。周期序列的定义只有一点与模拟信号定义不同，即周期序列的自变量 $n$ 和周期 $N$ 只能是整数。所以，某些模拟周期信号离散化以后就不一定是周期序列。

**4. 序列的能量**

序列 $x(n)$的能量 $E$ 定义为所有序列值的平方和

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2\tag{1.7}$$

**5. 任意序列的 $\delta(n)$表示**

任何序列 $x(n)$都可以表示成具有不同延迟（或位移）单位采样序列的幅度加权和，即

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)\tag{1.8}$$

### 1.2.2 线性移不变系统

**1. 离散时间系统的定义**

离散时间系统是把输入序列 $x(n)$转换成输出序列 $y(n)$的一种运算或变换，常用 $T[\cdot]$表示，即

$$y(n)=T[x(n)]\tag{1.9}$$

**2. 线性系统**

满足线性叠加原理的系统称为线性系统。叠加原理的数学描述如下：

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]\tag{1.10}$$

若

$$y_1(n)=T[x_1(n)],\quad y_2(n)=T[x_2(n)]$$

则

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n) \tag{1.11}$$

即满足齐次性和可加性。

**3. 移不变系统**

当系统输入 $x(n)$产生位移 $k$ 时，系统的输出响应 $y(n)$也产生相同的位移 $k$。

如果

$$T[x(n)]=y(n)$$

则

$$T[x(n-n_0)]=y(n-n_0) \tag{1.12}$$

**4. 线性移不变系统**

同时兼具线性与移不变特性的系统，若输入为 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_kx(n-k)$，则响应将是 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_ky(n-k)$。为此，我们引入一个新的变量 $h(n)$，称做单位采样响应，即

$$h(n)=T[\delta(n)] \tag{1.13}$$

对于线性移不变系统，其输入可表示为

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)$$

于是系统的输出为

$$\begin{aligned}y(n)&=T\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)\Big]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)T[\delta(n-k)]\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)=x(n)*h(n)\end{aligned} \tag{1.14}$$

即所谓线性卷积关系式。

线性卷积计算满足交换律、结合律和加法分配律(见教材中习题 1.2)。

**5. 线性移不变系统的组合与等效**

两个线性移不变系统的级联，仍是一个线性移不变系统，其单位采样响应为原先两个单位采样响应的卷积。两个线性移不变系统的并联也可等效为一个系统，其单位采样响应则为原来两个系统的单位采样响应的和。

### 1.2.3 系统的稳定性与因果性

**1. 稳定系统**

对于每个有界输入都产生有界输出的系统称为稳定系统。也就是说，当稳定系统的输入$|x(n)|\leqslant M$ 时，系统的输出$|y(n)|\leqslant\infty$。此处 $M$ 是任一正常数。

线性移不变系统稳定的充分必要条件是该系统的单位采样响应绝对可和，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty \tag{1.15}$$

**2. 因果系统**

输出变化不会在输入变化之前的系统称为因果系统。即因果系统的输出只取决于现在

和过去的输入，而与未来的输入无关。

线性移不变系统是因果系统的充分必要条件为

$$h(n)=0 \quad n<0 \tag{1.16}$$

### 1.2.4 线性常系数差分方程

线性移不变系统的输入 $x(n)$ 和输出 $y(n)$ 满足下列线性常系数差分方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \tag{1.17}$$

系统特性完全由差分方程的系数决定。由于 $a_k$ 和 $b_r$ 均为常数(不随 $n$ 变化)，在 $N=0$ 和 $M=\infty$ 时，式(1.17)与因果条件下的式(1.14)可以等效。

还可以将式(1.17)表示成输入与输出之间的显式关系，即

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y(n-k)+\sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_0} x(n-r) \tag{1.18}$$

从系统单位采样响应的长度考虑，$h(n)$ 为有限长序列的系统，常称为有限冲激响应(Finite Impulse Response，FIR)系统；$h(n)$ 为无限长序列的系统，常称为无限冲激响应(Infinite Impulse Response，IIR)系统。

### 1.2.5 离散时间系统与信号的频域表示

**1. 离散时间信号的傅里叶变换的定义**

离散时间信号 $x(n)$ 的傅里叶变换定义为

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \tag{1.19}$$

$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 的傅里叶逆变换定义为

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega \tag{1.20}$$

**2. 离散时间系统的频率响应**

系统的单位采样响应 $h(n)$ 的傅里叶变换为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \tag{1.21}$$

它常被称为该系统的频率响应或频率特性。$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 一般为复数，可表示为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=H_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})+\mathrm{j}H_{\mathrm{I}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

或

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arg[H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]} \tag{1.22}$$

其中，$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$ 称为系统的幅度响应或幅频特性，$\arg[H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]$ 称为系统的相位响应或相频特性。

注意：

(1) 系统的频率响应 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 是角频率 $\omega$ 的连续函数，同时 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 还是 $\omega$ 的以 $2\pi$ 为周期的周期函数。

(2) 若 $h(n)$ 为实数，系统的幅度响应在 $0\leqslant\omega\leqslant 2\pi$ 内将是偶对称的，而其相位响应则是奇对称的。

(3) 如果系统是稳定的，则因其单位采样响应 $h(n)$ 绝对可和，故系统的频率响应总是收敛的。

另外，如果一个序列绝对可和，那么它的能量也是有限的。

**3. 离散时间系统的输出**

在线性移不变系统中，叠加原理的作用可以使该系统对于复指数的响应完全由其频率响应 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 得到，即有

$$y(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\,\mathrm{d}\omega \tag{1.23}$$

而输出信号的傅里叶变换

$$Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \tag{1.24}$$

### 1.2.6 傅里叶变换的一些对称性质

表 1.1 列出了傅里叶变换的一些对称性。表 1.2 列出了离散时间信号的傅里叶变换的性质。

**表 1.1 傅里叶变换的一些对称性**

| 序　列 | 傅里叶变换 |
|---|---|
| 1. $x(n)$ | $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ |
| 2. $x^*(n)$ | $X^*(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})$ |
| 3. $x^*(-n)$ | $X^*(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ |
| 4. $\mathrm{Re}[x(n)]$ | $X_e(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$　[$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$的共轭对称分量] |
| 5. $\mathrm{Im}[x(n)]$ | $X_o(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$　[$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$的共轭反对称分量] |
| 6. $x_e(n)$　[$x(n)$的共轭对称分量] | $\mathrm{Re}[X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]$ |
| 7. $x_o(n)$　[$x(n)$的共轭反对称分量] | $\mathrm{Im}[X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]$ |
| 以下性质仅适用于 $x(n)$ 为实序列 | |
| 8. 任意实序列 $x(n)$ | $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=X^*(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})$　(傅里叶变换共轭对称)<br>$\mathrm{Re}[X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]=\mathrm{Re}[X(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})]$　(实部为偶函数)<br>$\mathrm{Im}[X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]=-\mathrm{Im}[X(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})]$　(虚部为奇函数)<br>$\lvert X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\rvert=\lvert X(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\rvert$　(幅度为偶函数)<br>$\arg[X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]=-\arg[X(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})]$　(相位为奇函数) |

**表 1.2　离散时间信号的傅里叶变换的性质**

| 序号 | 性质 | 信　号 | 傅里叶变换 |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 线性 | $ax_1(n)+bx_2(n)$ | $aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$ |
| 2 | 移位 | $x(n-k)$ | $e^{-j\omega k}X(e^{j\omega})$ |
| 3 | 调制 | $e^{j\omega_0 n}x(n)$ | $X(e^{j(\omega-\omega_0)})$ |
| 4 | 折叠 | $x(-n)$ | $X(e^{-j\omega})$ |
| 5 | 乘以 $n$ | $nx(n)$ | $j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$ |
| 6 | 复共轭 | $x^*(n)$ | $X^*(e^{-j\omega})$ |
|  |  | $x^*(-n)$ | $X^*(e^{j\omega})$ |
| 7 | 卷积 | $x(n)*y(n)$ | $X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$ |
| 8 | 相乘 | $x(n)y(n)$ | $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta$ |

## 1.2.7　时间连续信号的采样

### 1. 采样序列与原信号的频谱关系

序列 $x(n)$ 通常是由原信号 $x_a(t)$ 的周期性采样值 $x_a(nT)$ 得到的，$T$ 为采样周期。$x(n)$ 的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$，$x_a(t)$ 的傅里叶变换为 $X_a(j\Omega)$，此时

$$x(n)=x_a(nT)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega)e^{j\Omega nT}\,d\Omega \tag{1.25}$$

而序列 $x(n)$ 的傅里叶表示式为

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega \tag{1.26}$$

通过比较式(1.25)和式(1.26)可得

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[X_a\left(j\frac{\omega}{T}+j\frac{2\pi r}{T}\right)\right] \tag{1.27}$$

或者

$$X(e^{j\Omega T})=\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[X_a\left(j\Omega+j\frac{2\pi r}{T}\right)\right] \tag{1.28}$$

式(1.27)与式(1.28)表明了时间连续信号的傅里叶变换与该信号的采样序列的傅里叶变换之间的对应关系——理想采样信号的频谱函数是模拟信号频谱函数的周期延拓函数，延拓周期为 $\Omega_s=2\pi/T$。

### 2. 奈奎斯特采样率

设模拟信号 $x_a(t)$ 的最高频率成分为 $f_0$，只有当采样频率 $f_s\geqslant 2f_0$ 时，经过采样后才不丢失 $x_a(t)$ 的信息。这时，可以用相关的内插公式，从采样信号 $x_a(nT)$ 恢复出原信号 $x_a(t)$。

### 3. 内插公式

如果采样信号的频率不存在混叠，那么就可以利用内插公式，无失真地恢复出原模拟

信号来。从采样信号 $x_a(nT)$ 恢复出原信号 $x_a(t)$ 的内插公式为

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(t-kT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t-kT)} \tag{1.29}$$

注意，上式仅对带限信号成立，而且采样周期 $T$ 要选得足够小，以保证采样后的频谱不产生混叠。

## 1.3 典 型 例 题

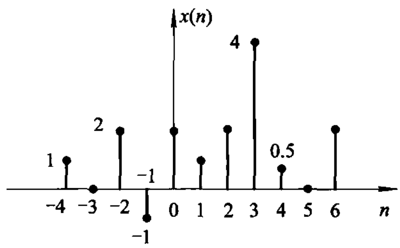
**例 1.1** 判断下列序列是否是周期序列。若是，请确定它的最小周期。

(1) $x(n)=A\cos\left(\frac{5\pi}{8}n+\frac{\pi}{6}\right)$ (2) $x(n)=\exp\left[\mathrm{j}\left(\frac{1}{8}n-\pi\right)\right]$

**解** (1) 对照正弦型序列的一般公式 $x(n)=A\sin(\omega n+\phi)$，得出 $\omega=\frac{5\pi}{8}$。因此$\frac{2\pi}{\omega}=\frac{16}{5}$是有理数，所以该序列是周期序列。最小周期为 $N=\frac{16}{5}k=16$（$k$ 取 5）。

(2) 对照复指数序列的一般公式 $x(n)=\mathrm{e}^{(\delta+\mathrm{j}\omega)n}$，得出 $\omega=\frac{1}{8}$。因此$\frac{2\pi}{\omega}=16\pi$ 是无理数，所以该序列不是周期序列。

**例 1.2** 用单位采样序列 $\delta(n)$ 及其加权和表示例 1.2 图所示的序列。




例 1.2 图

**解** 根据式(1.8)，对照例 1.2 图得

$$\begin{aligned} x(n) = {} & \delta(n+4)+2\delta(n+2)-\delta(n+1)+2\delta(n)+\delta(n-1) \\ & +2\delta(n-2)+4\delta(n-3)+0.5\delta(n-4)+2\delta(n-6) \end{aligned}$$

**例 1.3** 判断下列系统是否为线性移不变系统。

(1) $y(n)=x(n-n_0)$，$n_0$ 为整常数 (2) $y(n)=x^2(n)$

(3) $y(n)=\sum_{m=0}^{n}x(m)$ (4) $y(n)=x(n)\sin\left[\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\right]$

**解**

(1) $T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ax_1(n-n_0)+bx_2(n-n_0)$

$$=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

所以该系统是线性系统。

令输入为 $x(n-n_1)$，则输出 $y'(n)=x(n-n_1-n_0)$，因为

$$y(n-n_1)=x(n-n_1-n_0)=y'(n)$$

故该系统是移不变系统。其实，这是一个延时器，延时器是一个线性移不变系统。

(2) $T[ax_1(n)+bx_2(n)]=[ax_1(n)+bx_2(n)]^2$

$$\neq aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$
$$=ax_1^2(n)+bx_2^2(n)$$

所以该系统是非线性系统。

令输入为 $x(n-n_0)$，则输出 $y'(n)=x^2(n-n_0)$，因为

$$y(n-n_0)=x^2(n-n_0)=y'(n)$$

故该系统是移不变系统。

(3) $T[ax_1(n)+bx_2(n)]=\sum\limits_{m=0}^{n}(ax_1(m)+bx_2(m)$

$$=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

所以该系统是线性系统。

令输入为 $x(n-n_0)$，则输出 $y'(n)=\sum\limits_{m=0}^{n}x(m-n_0)$，因为

$$y(n-n_0)=\sum_{m=0}^{n-n_0}x(m)\neq y'(n)$$

故该系统是移变系统。

(4) $T[ax_1(n)+bx_2(n)]=[ax_1(n)+bx_2(n)]\sin\left[\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\right]$

$$=ax_1(n)\sin\left[\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\right]+bx_2(n)\sin\left[\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\right]$$
$$=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

所以该系统是线性系统。

令输入为 $x(n-n_0)$，则输出 $y'(n)=x(n-n_0)\sin\left[\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}\right]$，因为

$$y(n-n_0)=x(n-n_0)\sin\left[\frac{2\pi}{3}(n-n_0)+\frac{\pi}{6}\right]\neq y'(n)$$

故该系统是移变系统。

**例 1.4** 设线性移不变系统的单位采样响应 $h(n)$和输入 $x(n)$分别有以下两种情况，试求其输出 $y(n)$。

(1) $h(n)=R_4(n)$，$x(n)=R_5(n)$；

(2) $h(n)=2R_4(n)$，$x(n)=\delta(n)-\delta(n-2)$。

**解**

(1) $y(n)=x(n)*h(n)=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}R_4(m)R_5(n-m)$

先确定求和域，由 $R_4(m)$和 $R_5(n-m)$确定 $y(n)$对于 $m$ 的非零区间如下：

$$0\leqslant m\leqslant 3，0\leqslant(n-m)\leqslant 4 \text{ 即 } n-4\leqslant m\leqslant n$$

根据非零区间，将 $n$ 分成四种情况求解：

① $n<0$，$y(n)=0$

② $0\leqslant n\leqslant 3$，$y(n)=\sum\limits_{m=0}^{n}1=n+1$

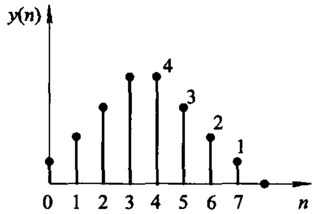
③ $n>7$，$y(n)=\sum\limits_{m=n-4}^{3}1=8-n$

④ $n>7$，$y(n)=0$

最终结果为

$$y(n)=\begin{cases}0 & n<0,\ n>7\\ n+1 & 0\leqslant n\leqslant 3\\ 8-n & 4\leqslant n\leqslant 7\end{cases}$$

$y(n)$波形如例 1.4 解图 1 所示。

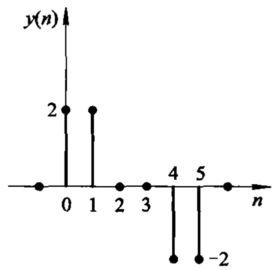



例 1.4 解图 1

(2) $y(n)=2R_4(n)*[\delta(n)-\delta(n-2)]=2R_4(n)-2R_4(n-2)$

$=2[\delta(n)+\delta(n-1)-\delta(n-4)-\delta(n-5)]$

$y(n)$波形如例 1.4 解图 2 所示。




例 1.4 解图 2

**例 1.5** 讨论下列各线性移不变系统的因果性与稳定性。

(1) $h(n)=-a^n u(-n-1)$　　(2) $h(n)=\delta(n+n_0)$，$n_0>0$

(3) $h(n)=2^n u(-n)$　　(4) $h(n)=\dfrac{1}{n}u(n)$

**解**

(1) 因为 $n<0$ 时，$h(n)\neq 0$，故该系统不是因果系统。

因为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{-1}|a^n|$$

故该系统只有在$|a|>1$时才是稳定系统。

(2) 因为 $n<0$ 时，$h(n)\neq 0$，故该系统不是因果系统。

因为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\delta(n+n_0)|=1<\infty$$

故该系统是稳定系统。

(3) 因为 $n<0$ 时，$h(n)=2^n\neq 0$，故该系统不是因果系统。

因为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{0}|2^n|=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}<\infty$$

故该系统是稳定系统。

(4) 因为 $n<0$ 时，$h(n)=\frac{1}{n}u(n)=0$，故该系统是因果系统。

因为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{n}u(n)\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$$

所以该系统不是稳定系统。

**例 1.6** 给定下述系统的差分方程，试判定系统是否是因果、稳定系统，并说明理由。

(1) $y(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x(n-k)$ (2) $y(n)=e^{x(n)}$

**解**

(1) 当 $N\geqslant 1$ 时，该系统是因果系统，因为此时输出只与 $n$ 时刻的输入以及 $n$ 时刻以前的输入有关。如果 $|x(n)|\leqslant M$，则 $|y(n)|\leqslant M<\infty$，因此该系统是稳定系统。

(2) 系统是因果系统。由于系统的输出不取决于 $x(n)$ 的未来值。如果 $|x(n)|\leqslant M$，则 $|y(n)|=|e^{x(n)}|\leqslant e^{|x(n)|}\leqslant e^M<\infty$，因此系统是稳定系统。

**例 1.7** 设系统由下面的差分方程描述：

$$y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)$$

该系统是因果的，利用递推法求系统的单位采样响应。

**解** 令 $x(n)=\delta(n)$

$$h(n)=\frac{1}{2}h(n-1)+\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n-1)$$

$$n=0,\ h(0)=\frac{1}{2}h(-1)+\delta(0)+\frac{1}{2}\delta(-1)=1$$

$$n=1,\ h(1)=\frac{1}{2}h(0)+\delta(1)+\frac{1}{2}\delta(0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$n=2,\ h(2)=\frac{1}{2}h(1)=\frac{1}{2}$$

$$n=3,\ h(3)=\frac{1}{2}h(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

归纳后结果为

$$h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)+\delta(n)$$