

现代数学基础丛书

126

Camassa-Holm方程

郭柏灵 田立新 著
杨灵娥 殷朝阳



科学出版社

www.sciencep.com

内 容 简 介

Camassa-Holm 方程是一类十分重要而又特别的新型浅水波方程, 有广泛的应用背景. 该类方程存在一类尖峰孤立子, 并且它是完全可积的, 具有双哈密顿结构和 Lax 对. 本书给出该类方程的物理背景并阐述它的完全可积性. 对该类方程的行波解作分类, 获得多种奇异孤立波解; 给出该类方程的谱图理论和散射数据; 利用反散射方法, 给出该类方程的多孤立子解, 获得该类方程的整体强解的存在性及整体弱解的存在性; 得到该类方程柯西问题的局部适定性; 研究它们的 blow-up 问题以及尖峰孤立子解的轨道稳定性. 本书同时研究含尖峰孤立子的 Degasperis-Procesi 方程及 b 族方程, 研究前一类方程激波的形成及动力学分析, 给出 b 族方程的水波结构和非线性平衡关系, 对 Degasperis-Procesi 方程的适定性给出具体证明.

本书适合数学、物理和力学专业的研究生、教师及相关领域的科研工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

Camassa-Holm方程 / 郭柏灵等著. —北京: 科学出版社, 2008
(现代数学基础丛书; 126)
ISBN 978-7-03-021706-6

I. C … II. 郭… III. 非线性偏微分方程 IV. O175.29

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第056300号

责任编辑: 陈玉琢 房 阳 / 责任校对: 陈玉凤

责任印制: 赵德静 / 封面设计: 王 浩

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

新 蕾 印 刷 厂 印 刷

科学出版社编务公司排版制作

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年8月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2008年8月第一次印刷 印张: 16 1/2

印数: 1— 3 000 字数: 311 000

定价: 52.00元

(如有印装质量问题, 我社负责调换<新蕾>)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言,书籍与期刊起着特殊重要的作用.许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍,从中汲取营养,获得教益.

20世纪70年代后期,我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年,而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着.1978年以后,我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会.当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述.据此,科学出版社陆续推出了多套数学丛书,其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出,前者出版约40卷,后者则逾80卷.它们质量甚高,影响颇大,对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者,针对一些重要的数学领域与研究方向,作较系统的介绍.既注意该领域的基础知识,又反映其新发展,力求深入浅出,简明扼要,注重创新.

近年来,数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用,还形成了一些交叉学科.我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持,编辑人员也为其付出了艰辛的劳动.它获得了广大读者的喜爱.我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展,使它越办越好,为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献.

杨 乐

2003年8月

前 言

众所周知, 浅水波在长波、小振幅条件下可得到 KdV 方程. 实践观察、数值模拟和理论分析均证明了它属于完全可积系统, 具有孤立子光滑解. 它的波形在相互作用中几乎不变. 从 1834 年英国力学家 Russell 第一次观察到它, 虽历经沧桑, 对它的研究时起时落, 但至今已成为孤立子理论的重要模型和支柱, 对它的偏微分方程定性理论研究也已达达到崭新的阶段. 1993 年, 美国阿尔莫斯国家实验室的 Camassa 和 Holm 推导出了另一类浅水波波动方程

$$u_t + 2ku_x - u_{xxt} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}.$$

它现在被称为 Camassa-Holm 方程. Camassa 和 Holm 证明了当 $k=0$ 时, 该方程有形如

$$u = ce^{-|x-ct|}$$

的孤立波解. 这种孤立波解在波峰处不光滑, 即出现了尖点, 又称孤立尖解. 他们指出这是另一类完全可积系统. A. Constantin 等研究了该方程尖孤立子的稳定性和相互碰撞问题, 证实了这种孤立子和 KdV 方程的孤立子一样, 具有碰撞后不改变其形状和速度等性质. 之后, 相继找到了该系统的 Lax 对、无穷守恒律和散射及后演方法等. 从 1993 年 Camassa 和 Holm 找到这种连续但不光滑的新型孤立子后, 十多年来已引起了许多数学家和物理学家的关注和兴趣, 他们做了大量的理论研究工作, 其中包括建立该方程的孤立子数学理论及 A. Constantin 等从偏微分方程定性研究建立有关该方程整体弱解、光滑解的存在唯一和它的渐近性质等一整套数学理论. 我国学者也在这些方面开展了研究, 取得了一些可喜的成果.

1999 年, 意大利的 Degasperis 和 Procesi 又从 Camassa-Holm 方程发现了另一类浅水波方程

$$u_t - u_{xxt} + 4uu_x = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx}.$$

这类方程具有间断的孤立子, 它也属于完全可积系统. 这引起数学家和物理学家的震动和关注, 并正式开始做深入的研究.

由上可以看出, 完全可积系统的内容是相当丰富和复杂的, 而对它的认识还是比较肤浅的. 同时, 也注意到从发现新的物理现象到不断研究数学问题, 数学的研究充满着勃勃生机和活力.

本书的目的在于以简洁明了、通俗易懂的形式比较全面地介绍 Camassa-Holm 方程的物理背景、完全可积性、孤立子解的稳定性以及相应的偏微分方程理论, 其中包括部分最新研究成果. 希望本书的出版能够有助于数学、物理和力学研究工作者, 特别是有些年轻的研究人员, 能从中对 camassa-Holm 方程有一个概貌性的了解. 如果对这些有兴趣, 可以查阅本书所列有关文献, 开展新的研究工作.

由于作者水平有限, 再加上当前国际国内尚未有 Camassa-Holm 方程的书, 我们是从许多文献中整理而成的, 难免有不少不足, 甚至错误, 敬请读者谅解并批评指正.

郭柏灵

2007年2月3日

目 录

《现代数学基础丛书》序

前言

第 1 章 Camassa-Holm 方程的物理背景及完全可积性	1
1.1 Camassa-Holm 方程的物理背景	1
1.2 Camassa-Holm 方程的完全可积性	7
1.3 孤立子的实验观察及应用	14
参考文献	15
第 2 章 Camassa-Holm 方程的行波解	26
2.1 引言	26
2.2 符号	27
2.3 弱形式	28
2.4 几类行波解	29
2.5 定理 2.4.1 的证明	35
2.6 参数的相关性	50
2.7 波长	54
2.8 尖峰孤立子的显式公式	57
参考文献	59
第 3 章 Camassa-Holm 方程的散射及反散射	62
3.1 Camassa-Holm 方程的散射	62
3.2 Camassa-Holm 方程的解	77
参考文献	98
第 4 章 Camassa-Holm 方程的适定性问题	100
4.1 整体强解的存在性	100
4.2 整体弱解的存在性	113
4.3 Camassa-Holm 方程的 Cauchy 问题在 $H^s \left(s > \frac{3}{2} \right)$ 中解的适定性	121
4.4 Camassa-Holm 方程的 blow-up 问题	128
4.5 尖峰解的轨道稳定性	136
参考文献	139

第 5 章 Degasperis-Procesi 方程激波的形成及动力学分析	141
5.1 引言	141
5.2 DP 方程的激波尖峰解	145
5.3 尖峰, 反尖峰和激波的形成	151
5.4 激波动力系统	161
5.5 概括说明	166
参考文献	167
第 6 章 b 族非线性浅水波方程的水波结构和非线性平衡	169
6.1 引言	169
6.2 b 方程的历史背景与一般性质	170
6.3 行波和广义函数	176
6.4 $b > 0$ 时 pulson 的相互作用	185
6.5 对任意 b 宽度 α 的尖峰	193
6.6 将尖峰动力系统加入黏性项	195
6.7 式(6.1.1)加了黏性和式(6.1.2)Burgers- $\alpha\beta$ 演化的尖峰	199
6.8 尖峰散射和初始值问题的数值结果	209
6.9 结论	212
参考文献	213
第 7 章 Degasperis-Procesi 方程	215
7.1 引言	215
7.2 局部适定性	218
7.3 强解的爆破	220
7.4 强解的整体存在性	224
7.5 弱解的整体存在性和唯一性	228
7.6 新的结果和问题	242
参考文献	248
《现代数学基础丛书》已出版书目	251

第 1 章 Camassa-Holm 方程的物理背景 及完全可积性*

1.1 Camassa-Holm 方程的物理背景

浅水波理论相当广泛地描述了弱非线性作用下的波动方程和方程组, 在波长近似和振幅小且有限的假定下, 它们均可归结为 Korteweg-de Vries(KdV)方程. 例如:

- (1) 冷离子体的磁流体波的运动;
- (2) 非谐晶格的振动;
- (3) 等离子体的离子声波;
- (4) 在弹性杆中的纵向色散波动;
- (5) 在液气混合态的压力波运动;
- (6) 在一个管底下部的流体的转动;
- (7) 在低温下非线性晶格的声子波包的热激发射.

在浅水波理论中, 不同程度的近似可以得到不同的完全可积的非线性偏微分方程. 这些方程具有孤立子解, 即它们在空间的无穷远处趋于灵活确定的常数, 相互碰撞后不见消失且波形和速度也没有或只有微弱的改变, 并显示出类似粒子的散射行为. 本节使用哈密顿方法推导一类新型的浅水波方程, 即 Camassa-Holm (CH)方程^[1,19]

$$u_t - u_{xxt} + 2\omega u_x + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \quad (1.1.1)$$

其中, u 是 x 方向上的流体速度, 或等价地是水平底部到水波自由表面的高度, ω 是一个与临界浅水波波速相关的常数, 下标表示求偏导数. 该方程含有重力影响下在自由表面水波无向运动的不可压缩 Euler 方程的小振幅展开中的高阶项(右支), 去掉这些项就能导出 Benjamin-Bona-Mahoney(BBM)方程

$$u_t + 2\omega u_x + 3uu_x - u_{xxt} = 0$$

* 作者将当前该领域中发表的相关文章作为参考文献附在本章之后,供读者参阅.

或 KdV 方程, (1.1.1) 是 BBM 方程的展开形式. 当 $\omega \rightarrow 0$ 时, (1.1.1) 的极限形式的孤立子解 $c \exp(|x - ct|)$ 在波峰处一阶导数是不连续的, 称之为尖峰孤立子解 (peakon). 这些尖峰孤立子影响当 $\omega = 0$ 时方程 (1.1.1) 的初值问题的解. 变化过程中光滑初始条件演化成一列尖峰孤立子的途径, 是通过在每个具有负斜率的拐点变化为具有垂直切线, 从而一阶导数不连续出现. 值得注意的是, 在完全可积有限维哈密顿系统中简单的重叠单个尖峰孤立子解, 计算它们振幅的变化和尖峰的位置, 能得到多重孤立子解.

CH 方程具有双哈密顿结构, 它能够用两种不同的哈密顿形式表示. 它的两个相容的哈密顿算子的比是一个递归算子, 因而产生无穷个守恒量. 双哈密顿属性被用来重写方程以作为线性等谱问题的相容性条件. 所以初值问题可以通过反散射变换 (IST) 解决.

无向模型 考虑非黏滞性不可压缩的具有相同密度的流体方程: Euler 方程. u 代表在 x 方向上的水平速度, w 代表 z 轴 (垂直方向) 上的速度值. 该流体受重力 g 的影响运动, 它在一个上自由表面 $z = \zeta(x, t)$ 和平坦底部 $z = -h_0$ 的水平无限域上运动. 将浅水波渐近形成的解^[1] $u = u(x, t)$, $w = -(z + h_0)u_x$ 代入到 Euler 方程的守恒量 (动力 + 位势) 中, 对 z 积分得到能量

$$H_{GN} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\eta u^2 + \frac{1}{3} \eta^3 u_x^3 + g(\eta - h_0)^2 \right] dx,$$

其中, $\eta = \zeta + h_0$ 是水波距离底部的高度. 将同样的解代入到 Euler 方程中, 在垂直坐标上积分, 得到 Green-Naghdi (GN) 方程^[2]. GN 方程关于能量 H_{GN} 守恒. 事实上, 它们可以用哈密顿形式表示为^[3]

$$\begin{pmatrix} m_t \\ \eta_t \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial m + m \partial & \eta \partial \\ \partial \eta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta H_{GN} / \delta m \\ \delta H_{GN} / \delta \eta \end{pmatrix}, \quad (1.1.2)$$

其中, 动量密度 m 定义为 $m = \delta H_{GN} / \delta u$. GN 方程无法在深度与波长比出的小参数 ε 上作一个薄域展开. 在这样的展开中, H_{GN} 中垂直方向 ($\sim \eta^3 u_x^2$) 上运动的动量为 $O(\varepsilon^2)$. 浅水波理论作出更进一步的小振幅假设, 形式为 $\eta = h_0 + O(\alpha)$, $\alpha \ll 1$ 和平衡量 $\alpha = O(\varepsilon^2)$. 与之相反, 哈密顿量 H_{GN} 保留了在这样的展开式中较高阶的非主要项 (如 ζ^3). 由 GN 方程, 作进一步的小振幅渐近性和限制到临界波速 $c_0 = \sqrt{gh_0}$ 附近的无向传播, 这时产生 KdV 方程^[4]

$$u_t + c_0 u_x + \frac{3}{2} u u_x + \frac{1}{6} c_0 h_0^2 u_{xxx} = 0,$$

或者在小区域展开中取相同阶数, 成为 BBM 方程^[5]

$$u_t + c_0 u_x + \frac{3}{2} u u_x - \frac{1}{6} h_0^2 u_{xxx} = 0.$$

与对运动方程作渐近展开不同, 在(1.1.1)的推导过程中, 在 GN 系统中作与 m 及 η 相关的无向近似, 并且保留它的哈密顿结构(1.1.2)的动量部分. 为了这个目的, 设 $\eta = h_0 \sqrt{m/(h_0 c_0)}$. 由于当 $|x| \rightarrow \infty$ 时 $\eta \rightarrow h_0$, 所以 m 上的边界条件可以假设为当 $|x| \rightarrow \infty$ 时 $m \rightarrow h_0 c_0$, 函数 $C = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{m} dx$ 是哈密顿算子 $(m\partial + \partial m)$ 的开西米尔 (Casimir), 所以称该不变流形为(1.1.2)的开西米尔流形. 接下来在哈密顿函数 H_{GN} 上换算 $u \rightarrow \alpha u$, 寻找 m , 使 $m = h_0 c_0 + \alpha m_1 + \alpha^2 m_2 + \alpha^3 m_3 + \dots$, 并因此展开 H_{GN} . 由该换算和展开, 定义 m 为关于 u 的哈密顿函数的变分导数, 平衡阶 $O(\alpha^2)^{[6]}$ 则有 $m_1 = 2(h_0 u - h_0^3 u_{xx}/3)$. 因此哈密顿函数可以重新写为 $H_{GN} = H_{1D} + O(\alpha^3)$, 这里

$$H_{1D} = \frac{\alpha^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} m_1 u dx + \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} m_1 c_0 dx,$$

其中, 因子 1/2 是由限制到子流形而产生的^[7].

因此, 在开西米尔流形上关于 m 的 $O(\alpha)$ 阶运动方程为

$$\begin{aligned} m_t &= \frac{-(m\partial + \partial m)\delta H_{1D}}{\delta m} \\ &= -\left(\frac{\alpha}{2}\right)(m\partial + \partial m)u - \left(\frac{c_0}{2}\right)m_x, \end{aligned}$$

或者关于 u 的方程为

$$u_t - \frac{1}{3} h_0^2 u_{xxx} + c_0 u_x + \frac{3}{2} \alpha u u_x - \frac{1}{6} h_0^2 c_0 u_{xxx} = \frac{1}{3} \alpha h_0^2 u_x u_{xx} + \frac{1}{6} \alpha h_0^2 u u_{xxx}. \quad (1.1.3)$$

去掉这个方程的右边得到 BBM 方程或将模型中 u_{xxx} 换成 $-c_0 u_{xxx}$ ^[4], 成为 KdV 方程, 则(1.1.3)可以看作是 BBM 方程关于小振幅参数 α 的渐近展开通过保留高阶项而得到. 限制在开西米尔流形等同于一般的由 Boussinesq 系统^[4,8]导出 KdV 模型和 BBM 模型的通常导数中的 $O(\alpha)$ 阶无向假设 $\zeta = \sqrt{\frac{h_0}{g}} u + O(\alpha)$. 实际上,

$\zeta = \sqrt{\frac{h_0}{g}} (u - h_0^2/6 u_{xx}) + O(\alpha)$ 且在小区域的逼近中, 展开式中二阶导数项要求 ε^2 因子.

重新换算(1.1.3), 去掉 α , 取 $\omega = \frac{c_0}{4}$ 时, 产生标准形式(1.1.1). 注意到(1.1.1)和 BBM 类似, 但不是伽利略(Galilean)不变的, 如在 $u \rightarrow u + \omega, t \rightarrow t, x \rightarrow x + \omega t$ 下不是不变的. 因此, 方程(1.1.1)被视为在伽利略坐标下速度 ω 决定的一族方程里的一员.

使用恒等式 $(1 - \partial^2)e^{-|x|} = 2\delta(x)$, 并令 $K[v] = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp(-|x-y|)v(y)$, 将方程(1.1.1)表示成为一个非局部形式

$$u_t + uu_x + \omega K[u_y] = -K\left[uu_y + \frac{1}{2}u_y u_{yy}\right],$$

去掉方程右端的二次项, 得到由 Fornberg 和 Whitham^[9]研究的方程. Fornberg 和 Whitham 证明该截断方程的行波解有尖峰极限形式. 进一步地, 具有两个拐点的不对称的初值也可以在有限时间内发展成垂直的斜率.

下面将研究 $\omega = 0$ 时的极限情形. 方程(1.1.1)成为

$$u_t - u_{xxt} = -3uu_x + 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \quad (1.1.4)$$

其中, u 在实数线上有界且使得哈密顿函数 $H_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + u_x^2) dx$ 有界. 由(1.1.3),

通过 $m = u - u_{xx}, m_t = -(m\partial + \partial m) \frac{\delta H_1}{\delta m}$, H_1 产生流(1.1.4).

在拐点处陡化——考虑一个在 $x = \bar{x}$ 取最大值的具有拐点的初始条件, 该点在最大值的右边且在该点的每边迅速衰减为零, 这时 H_1 是有限的. 定义依赖时间 t 的在拐点处的斜率 $s(t) = u_x(\bar{x}(t), t)$. 因此, (1.1.4)的非局部形式和标准的 Sobolev 估计得到关于 s 的微分不等式 $\frac{ds}{dt} \leq -\frac{1}{2}s^2 + H_1$. 因此, 只要斜率在初始时完全小于 0, 则斜率在有限时间里变为垂直. 若初始条件反对称, 由于(1.1.4)的对称 $u(x, t) \rightarrow (-u, -x)$, 则在 $u = 0$ 时的拐点是不动点且 $\frac{d\bar{x}}{dt} = 0$. 在这种情况下, 不管 $|s(0)|$ 多小, 在有限时间里, 垂直现象都会产生. 因为拐点随时间不是稳定的, 这个陡化性质说明, (1.1.4)的行波解不具有常见的钟形结构. 实际上, 行波解由 $u(x, t) = c \exp(-|x - ct|)$ 给出. 该波按速度 c 运动, 在高度取 c 时的波峰处有一个隅角(corner).

N 孤立子解——受行波解形式的启发, 拟设 N 个相互作用的尖峰解 $u(x, t) = \sum_{i=1}^N p_i(t) \exp[-|x - q_i(t)|]$, 将它代入方程(1.1.4)产生关于 q_i 和 p_i 的发展方程, 它们是哈密顿标准方程. 哈密顿量 H_A 通过将上述拟设代入 H_1 的积分中得到

$$H_A = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N p_i p_j \exp(-|q_i - q_j|).$$

这一形式的哈密顿量描述测地线运动. 尖峰位置 $q_i(t)$ 被具有逆度量张量

$g^{ij}(q) = \exp(-|q_i - q_j|)$, $q \in \mathbf{R}^n$ 的 N 维表面上的质点的测地线运动控制. 当 $q_i = q_j$ 时, 该度量张量奇异.

2 孤立子动态——考虑两个初始时完全分离的孤立子的散射, 它们具有速度 c_1 和 c_2 , 这里 $c_1 > c_2$, $c_1 > 0$ 且使它们发生碰撞. 控制这个碰撞的哈密顿系统拥有两个运动常数, $H_0 = p_1 + p_2 = c_1 + c_2$ 以及 $H_A = \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)$. 注意到在碰撞时产生 $q_1 - q_2 = 0$, 在尖峰发生交叠时 p 出现分歧, 否则, 将会存在一个矛盾 $2H_A = c_1^2 + c_2^2 = (c_1 + c_2)^2$.

当 $N=2$ 时, 相应于哈密顿量 H_A 的哈密顿标准方程的解由

$$q_1 - q_2 = -\ln \left| \frac{4(c_1 - c_2)^2 \gamma e^{(c_1 - c_2)t}}{(\gamma e^{(c_1 - c_2)t} + 4c_1^2)(\gamma e^{(c_1 - c_2)t} + 4c_2^2)} \right|, \quad (1.1.5)$$

$$p_1 - p_2 = \pm (c_1 - c_2) \frac{\gamma e^{-(c_1 - c_2)t} - 4c_1 c_2}{\gamma e^{(c_1 - c_2)t} + 4c_1 c_2}$$

和 $p_1 + p_2$ 的守恒律给出, 其中, γ 是一个确定尖峰初始分离的常数, c_1 和 c_2 是 $t \rightarrow \pm\infty$ 时波速或振幅的渐近值. 只有当 c_1 和 c_2 具有相反符号, 方程(1.1.5)中关于孤立子交叠的 p_1 和 p_2 的发散性才会发生, 即只有“正面”的碰撞才能够产生交叠的尖峰(图 1.1 中 $c_1 = -c_2 = c$ 时“孤立子-反孤立子”情形).

孤立子解(1.1.5)决定了“相移”, 即当 $t \rightarrow \infty$ 时渐近位置的移动, 相互作用后孤立子出现. 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 孤立子未遭破坏, 再度出现, 速度快的(大的)孤立子在慢的(小的)前面. 定义快孤立子的相移 $\Delta q_f = q_2(+\infty) - q_1(-\infty)$, 慢孤立子的相移为 $\Delta q_s \equiv q_1(+\infty) - q_2(-\infty)$, 产生 $\Delta q_f = \ln \left[\frac{c_1^2}{(c_1 - c_2)^2} \right]$ 和 $\Delta q_s = \ln \left[(c_1 - c_2)^2 / c_2^2 \right]$. 这些公式说明当 $c_1 / c_2 > 2$ 时, 两个孤立子均出现一个向前的移动; 当 $1 < c_1 / c_2 < 2$ 时, 快的孤立子向前移动而慢的向后; 当 $c_1 / c_2 = 2$ 时, 对较慢的孤立子而言没有移动出现.

双哈密顿结构——方程(1.1.4)也可以由一个与速度位势有关的运动原理出发得到. 这一运动原理导出新的守恒量 $H_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (u^3 + uu_x^2) dx$ 和另一个哈密顿算子 $\partial - \partial^3$. 方程(1.1.4)可以写成两种不同的哈密顿形式

$$m_t = -(\partial - \partial^3) \frac{\delta H_2}{\delta m} = -(m\partial + \partial m) \frac{\delta H_1}{\delta m}.$$

两个哈密顿算子 $B_1 = (\partial - \partial^3)$ 和 $B_2 = m\partial + \partial m$ 形成一个哈密顿函数对. 这时, 它们的和仍然是一个哈密顿算子^[10]. 因此, 方程(1.1.4)是双哈密顿, 并具有无穷

多个互相之间通过 $B_1 \frac{\delta H_n}{\delta m} = B_2 \frac{\delta H_{n-1}}{\delta m} \equiv -m_i^{(n+1)}, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 递归的守恒量. 从 H_1 或 H_2 开始, 这个关系式产生守恒量的一个无穷序列, 如

$$H_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} m dx, \quad H_{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{m} dx, \quad H_{-2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{m_x^2}{4m^{5/2}} - \frac{2}{\sqrt{m}} \right] dx.$$

相反地, 递归算子 $\mathcal{R} = B_2 B_1^{-1}$ 产生一个交换流的谱系, 定义为

$$m_i^{(n+1)} = K_{n+1}[m] = \mathcal{R}K_n[m], \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

谱系中最初的几个流为

$$m_i^0 = -(\partial - \partial^3)(2\sqrt{m})^{-1}, \quad m_i^{(1)} = 0, \quad m_i^{(2)} = -m_x, \quad m_i^{(3)} = -(m\partial + \partial m)u.$$

最后的一个是方程(1.1.4), 第一个是可积 Dym 方程的延拓^[11]. 在这谱系中的所有流都是等谱的, 因此是完全可积的.

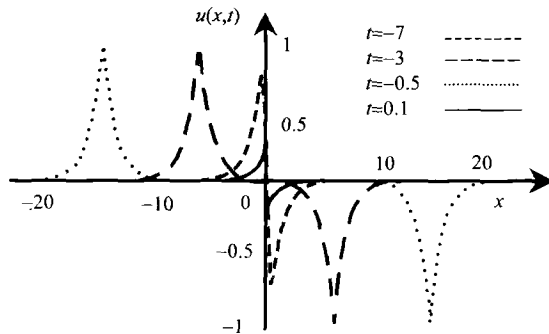


图1.1 重新建立方程(1.1.5)的孤立子-反孤立子解 u

$$u(x,t) = \frac{c \left(\exp \left[-\left| x - \frac{1}{2} q(t) \right| \right] - \exp \left[\left| x + \frac{1}{2} q(t) \right| \right] \right)}{\tanh(ct)}$$

这个解显示了书中讨论的陡化行为. 斜率变为垂直的, 在交叠处解的振幅为零. 后来尖峰重新出现. 对称地,

$$(u,t) \rightarrow (-u,-t) \text{ 重新分开.}$$

等谱问题 为了寻找方程的等谱问题, 按照 Gel'fand 和 Dorfmann^[12]考虑反对称谱问题的方法, $(\lambda B_1 - B_2)\phi = 0$. 这个问题的一类解由 $\phi = \psi^2$ 和二阶的对称谱问题的 ψ 相联系. 由等谱性, $\lambda_i = 0$, 方程(1.1.1)可由 $\psi(x,t)$ 系统的相容性条件 $\psi_{xxt} = \psi_{ttx}$ 得到

$$\psi_{xx} = \left[\frac{1}{4} - \frac{m(x,t) + \omega}{2\lambda} \right] \psi, \quad (1.1.6)$$

$$\psi_t = -(\lambda + u)\psi_x + \frac{1}{2}u_x\psi.$$

这就是要寻找的等谱问题. 系统(1.1.6)提供了一种利用完全线性反散射变换技术来解决(1.1.1)的初值问题的思路^[11]. 例如, 若 m 的边界条件在 $x = \pm\infty$ (足够快)的时候趋于 0, 则当 $\omega = 0$ 时, 由于当 $|x| \rightarrow \infty$ 时 $\psi(x) \rightarrow \exp(\pm x/2)$, (1.1.6)的谱问题有一个完全离散的谱. 这时, 特征函数在无穷远处以指数次衰减. 例如, 若初值条件 $u(x,0)$ 被选取, 使得 $u(x,0) = A \left[(\pi/2)e^x - 2 \sinh x \arctan(e^x) - 1 \right]$ 且 $m(x,0) = A \operatorname{sech}^2(x)$, 对于任意常数 A , 则容易得到(1.1.6)的特征值 λ 为 $\lambda_n = 2 \frac{A}{(2n+1)(2n+3)}, n=0,1,2,\dots$ ^[13]. 这个公式表明了 $\lambda = 0$ 是离散谱的聚点且当

$n \rightarrow \infty$ 时, 特征值按 $1/n^2$, $n \rightarrow \infty$ 收敛到该聚点. 一般地, 任意初值都在无穷远处按指数迅速衰减. 方程(1.1.6)还说明具有哈密顿函数 H_A 的 N 孤立子的力学系统是完全可以积的^[6]. 当 $\omega \neq 0$ 时, 如(1.1.1)中的一个方程, 当 $|x| \rightarrow \infty$ 时 ψ 的极限行为变成 $\psi(x) \rightarrow \exp\left(\pm x \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\omega}{2\lambda}}\right)$; 当 $|x| \rightarrow \infty$ 时, 在区间 $0 \leq \lambda \leq 2\omega$ 产生了连续谱.

同样, 当 $\omega \neq 0$ 时, (1.1.1)的孤立子解是 C^∞ , 即波峰处不会产生导数不连续; 在极限 $\omega \rightarrow 0$ 时连续谱消失. 这一奇异特征可以发现是由于谱问题(1.1.6)中有常数 $1/4$, 由它生成 B_1 中的一阶导数算子.

数值模拟证实这里的分析^[14], 并且能说明尖峰孤立子解有鲁棒性. 这些模拟明确地说明了拐点机制, 一个局部正定的初始条件爆破成为高阶的尖峰孤立子序列向右, 最高的在最前面.

1.2 Camassa-Holm 方程的完全可积性

考察 Camassa-Holm 方程(1.1.1), 在 1.1 节得到方程的守恒量及相应的哈密顿算子如下:

$$H_1 = \frac{1}{2} \int (u^2 + u_x^2) dx, \quad H_2 = \frac{1}{2} \int (u^3 + uu_x^2 + ku^2) dx,$$

$$B_2 = \partial_x(m + \omega) + (m + \omega)\partial_x, \quad B_1 = \partial_x - \partial_x^3,$$

$$m_t = B_2 \frac{\delta H_1}{\delta m} = B_1 \frac{\delta H_2}{\delta m}, \quad (1.2.1)$$

方程有 Lax 对

$$\psi_{xx} - \frac{1}{4}\psi_x - \lambda m\psi = 0, \quad \psi_t = -(\lambda + u)\psi_x + \frac{1}{2}u_x\psi.$$

定义 1.2.1^[15] 若哈密顿方程(1.2.1)存在无穷多个独立实值泛函 W_0, W_1, W_2, \dots ,

且它们是相互对合的守恒量, 则称方程在 Liouville 意义下完全可积.

注 1.2.1 在定义 1.2.1 下, 如果哈密顿方程(1.2.1)有 Lax 对、哈密顿结构和递归算子(等谱), 通常称(1.2.1)是完全可积的. 本节证明 Camassa-Holm 方程是完全可积的.

定理 1.2.1^[16] 可积方程的一系列高阶局部对称可由递归算子或换位运算得出.

得到偏微分方程的对称约化的传统方法是利用李群法的无穷小变换, 然而这种方法繁琐且不容易处理, 符号法的引入避免了这样的计算. 符号法最早由 Gel'fand 和 Dikii 引入, 而后进一步发展. 方法的基本思想是替换 u_i , i 是 ξ^i 的指数(在这里表示导数的阶数), ξ 是一个符号. 导数的基本运算 u_i 到 u_{i+1} 现在只乘以 ξ 即可, 方法类似于傅里叶变换理论. 对高阶多重项 u 's, 利用不同的符号来定义微分. 例如, 不可交换的二项式 $u_i u_j$ 可表示为 $\xi_i^i \xi_2^j$; 对可交换的情形, $u_i u_j$ 与 $u_j u_i$ 有相同的符号表示. 在所有的可积发展方程中, 方程的右边在适当的加权形式下是齐次微分多项式. 利用微分多项式的符号表示, 把高阶齐次偏微分方程的分类简化成非常特殊的符号多项式的因式分解, 这种方法可用数论方法得到证明.

假定有一个偏微分发展方程

$$u_t = F(u_n, \dots, u_1, u_0), \quad n \geq 2, \quad (1.2.2)$$

其中, $u_0 = u(x, t), u_1 = u_x(x, t), u_2 = u_{xx}(x, t), \dots, u_n = \partial_x^n u(x, t)$. 方程(1.2.2)可以表示成两个相应的无穷维动力系统

$$u_{0x} = u_1, \quad u_{1x} = u_2, \quad \dots, \quad u_{mx} = u_{m+1}, \quad \dots,$$

$$u_{0t} = F_0, \quad u_{1t} = F_1, \quad \dots, \quad u_{mt} = F_m, \quad \dots,$$

其中, $F_k(u_{n+k}, \dots, u_1, u_0) = D^k(F(u_n, \dots, u_1, u_0))$. 线性微分算子

$$D = u_1 \frac{\partial}{\partial u_0} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_3 \frac{\partial}{\partial u_2} + \dots.$$

定义 1.2.2 形式序列 $\wedge = l_m D^m + l_{m-1} D^{m-1} + \dots + l_0 + l_{-1} D^{-1} + l_{-2} D^{-2} + \dots$, $l_k \in \mathcal{F}(u, D)$ 称作方程(1.2.2)的形式递归算子, 如果

$$D_t(\wedge) = F_* \circ \wedge - \wedge \circ F_*, \quad (1.2.3)$$

形式递归算子也称作方程(1.2.2)的形式对称.

命题 1.2.1^[17] 如果方程(1.2.2)有一个高阶对称的无穷谱, 那么存在一个形式递归算子.

现研究如下非线性发展方程:

$$u_t - u_{txx} + \partial_x g[u] = \nu u_x u_{xx} + \gamma u u_{xxx}, \quad (1.2.4)$$

其中,

$$g[u] = ku + \alpha u^2 + \beta u^3, \quad \alpha, \beta, \gamma, k, \nu, \text{ 是常数.} \quad (1.2.5)$$

当 $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = 0$, $\nu = 2\gamma = 2$ 时, 方程(1.2.4)为 CH 方程(1.1.1).

接下来将证明方程(1.1.1)是完全可积的.

本节将利用文献[17~19]中可积性方法进行分析, 考虑偏微分发展方程

$$u_t = F_1[u] + F_2[u] + F_3[u] + \dots \quad (1.2.6)$$

$F_k[u]$ 为齐次微分多项式, 且是复数系数变量 $u, u_x, u_{xx}, \dots, \partial_x^n u$ 组成的多项式, 满足条件 $F_k[\lambda u] = \lambda^k F_k[u]$, $\lambda \in \mathbf{C}$, 线性部分为 $F_1[u] = L(u)$, L 是二阶或高阶的线性微分算子.

下面引入符号表示简化方程的形式. 符号表示是对 u_n 的傅里叶形式定义和规则的简化.

令 $\hat{u}(k, t)$ 定义为 $u(x, t)$ 的傅里叶变换

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k, t) \exp(ikx) dk,$$

那么有下述对应关系: $u_0 \rightarrow \hat{u}, u_1 \rightarrow ik\hat{u}, \dots, u_m \rightarrow (ik)^m \hat{u}, \dots$. 单项式 $u_m u_n$ 的傅里叶变换可以表示为

$$u_m u_n = \iiint \delta(k_1 + k_2 - k) (ik_1)^n (ik_2)^m \hat{u}(k_1, t) \hat{u}(k_2, t) \exp(ikx) dk_1 dk_2 dk.$$

因此

$$u_m u_n \rightarrow \delta(k_1 + k_2 - k) \frac{[(ik_1)^n (ik_2)^m + (ik_2)^n (ik_1)^m]}{2} \hat{u}(k_1, t) \hat{u}(k_2, t).$$

可以简化定义, 用 ε_n 代替 ik_n , $u_n u_m$ 代替 $\hat{u}(k_1, t) \hat{u}(k_2, t)$.

因此, 可以把单项式 $u_m u_n$ 写为符号 $u^2 a(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, 其中,

$$a(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{[\varepsilon_1^n \varepsilon_2^m + \varepsilon_2^n \varepsilon_1^m]}{2}$$

是它的自变数的对称多项式. 用此规则可改写其他的微分单项式 $u_0^{n_0} u_1^{n_1} \cdots u_q^{n_q}$ 为下述形式:

$$u_0^{n_0} u_1^{n_1} \cdots u_q^{n_q} \rightarrow u^m \langle \varepsilon_1^0 \cdots \varepsilon_{n_0}^0 \varepsilon_{n_0+1}^1 \cdots \varepsilon_{n_0+n_1}^1 \varepsilon_{n_0+n_1+1}^2 \cdots \varepsilon_{n_0+n_1+n_2}^2 \cdots \varepsilon_m^q \rangle,$$

其中, $m = n_0 + n_1 + \cdots + n_q$, 符号 $\langle \rangle$ 代表对所有自变数取对称化(如关于 ε_m 中元素 m 的排列族的对称化)

$$\langle f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m) \rangle = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \Sigma_m} f(\sigma(\varepsilon_1), \sigma(\varepsilon_2), \cdots, \sigma(\varepsilon_m)).$$

例如,

$$u_n \rightarrow u \varepsilon_1^n, \quad u_3^2 \rightarrow u^2 \varepsilon_1^3 \varepsilon_2^3, \quad u^3 u_2 \rightarrow u^4 \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2}{4}.$$

利用上述变换, 表达式(1.2.6)可以写成下面形式的符号算子:

$$u_t = u \omega(\varepsilon_1) + \frac{u^2}{2} a_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \frac{u^3}{3} a_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) + \cdots = F. \quad (1.2.7)$$

$\omega(\varepsilon_1)$ 为二次或高次多项式, $a_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{k+1})$ 为对称多项式. 每一个多项式和相应的 $F_k[u]$ 的傅里叶像相关.

同样地, 对任意函数 F , 存在一个形式上的递归算子

$$\wedge = \eta + u \phi_1(\varepsilon_1, \eta) + u^2 \phi_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta) + \cdots. \quad (1.2.8)$$

因此可以决定递归的系数 $\phi_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m, \eta)$, 即

$$\phi_1 = N^\omega(\varepsilon_1, \eta) \varepsilon_1 a_1(\varepsilon_1, \eta),$$

$$\begin{aligned} & \phi_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m, \eta) \\ &= N^\omega(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m, \eta) \left\{ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_m) a_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m, \eta) \right\} \end{aligned}$$