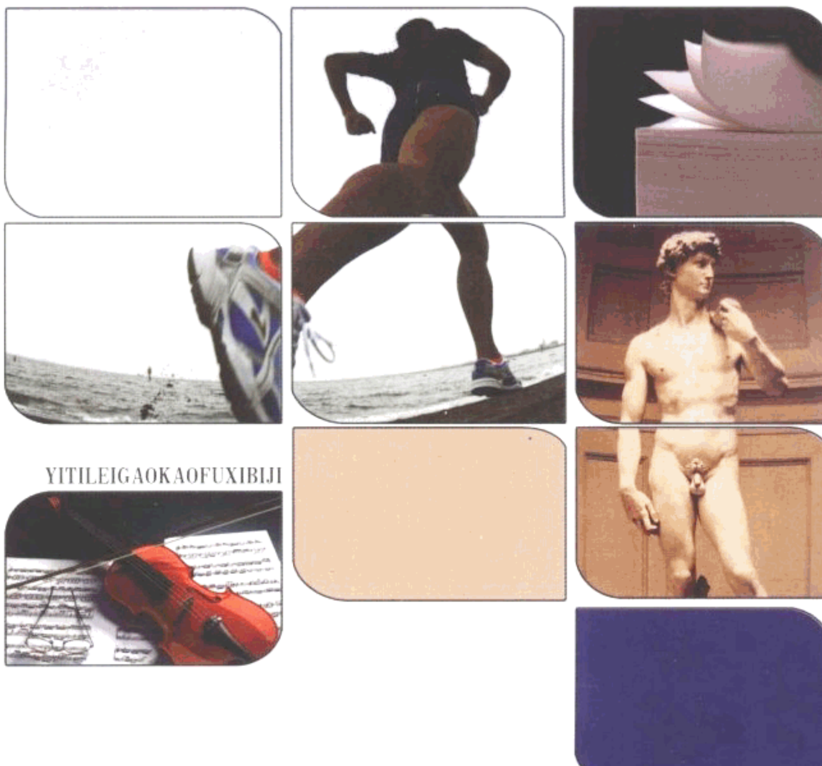
第2枪
DIERQIANG

YI TI LEI GAO KAO FU XI BI JI

艺体类高考复习笔记

YITILEIGAOKAOFUXIBIJI



YITILEIGAOKAOFUXIBIJI

YITILEIGAOKAOFUXIBIJI

数学

江西美术出版社　江西人民出版社

编 写 说 明

艺体类考生包括参加美术、音乐、舞蹈、戏剧、体育、空乘及广播、电视播音等专业高考的学生，他们是高考生中的特殊群体。

他们虽然和普通班同学站在迎考的同一条起跑线上，但复习过程凸显出两个不同的特点：

第一，他们兼顾专业和文化两项考试，犹如举枪打靶，第1枪射专业，第2枪瞄文化，承受着双重压力，而复习时间又比普通班短。

第二，时间安排不同。他们的复习分为三个时间段：9月到11月在校学习两个月文化；11月即离校攻专业，参加专业考试，时间达四个月之久；专业考试结束，到翌年3月份才重新回到学校，此时离高考仅剩三个月。

他们的文化课不能像普通班同学那样集中时间进行三轮复习，时间既短又分散，准备明显不足。

特殊的情况必定有特殊的需求。但是，目前市场上还鲜见根据艺体类考生的具体情况和需要"量身定制"的复习资料，他们使用的都是普通班的复习书籍。使用这些书籍，艺体班的老师必须再加工，或者自编复习资料；而跟着普通班复习的艺体类考生根本就无法适应，有的同学只能硬着头皮跟着上，学进多少算多少。这种状态下的复习，其效果可以想见。

以上情况说明：根据艺体类高考学生的特殊情况和艺体班老师复习指导的需要，组织编写一套针对艺体类考生的高考复习用书，是必要的，也是有需求的。如何根据艺体类考生的特点，有效地帮助他们复习迎考——来自教学一线的这个实际问题，催生了读者眼前的这套《第2枪·艺体类高考复习笔记》。

本套"笔记"包括语文、数学、英语、政治、历史、地理等六本。围绕这六本书，编写者和编辑都朝着以下两个目标努力：

一、确定编写思想：服务考生、依据考纲、紧扣考点、面对考卷

1.服务考生。本套书专为艺体类考生特制，根据他们复习分为专业考试前、中、后三段的实际情况，分三个时间段编写，与他们复习迎考的时间一致，方便实用。

2.依据考纲。考纲是国家制定的高考指导性文件，也是编写复习资料和规范学生复习的依据，本书力求全面准确理解考纲，体现考纲精神。

3.紧扣考点。考纲规定的考点一个不少，以使艺体类考生对高考知能了解全面，心中有数，考试有序。

4.面对考卷。复习的效果最后就看一张考卷。我们要求把自己放在考生的位置上，研究近年的考卷，考虑编写内容的轻重、详略，安排多种题型的训练，使学生复习如在考场，实战实训，培养适应考场的本领，提高解决问题的能力。

二、突出编写特色：三段五块、全真全新

1.三段结构。根据复习时间段的安排，本书编写分三个时间段，形成"一根扁担、两个桶"的结构。两头以文化复习为主，是重点；中间是专业准备及考试时间，但不是文化复习

的空白时间，只是复习地点外移，仍然是文化复习的一个重要的有机组成部分。三个时间段的具体任务是：

第一时间段：考点扫描——过筛复习考点，了解考题，明晰解题思路。

第二时间段：识记过关——利用专业备考的空隙，记读必背考试内容。

第三时间段：真题实训——真题训练，掌握考试内容，熟悉高考题型。

2．五个模块。本书在“考点扫描”中，设计了五个模块：

考纲导读——解读高考指导性文件，明确考试范围和要求；

考点精讲——全面而有重点地介绍、讲解高考考查点；

考题解析——了解命题方向和形式，明确解题思路，掌握答题方法；

复习小结——梳理考点，把握重点；

同步练习——即时练习，加快消化，巩固复习成果。

3．真题为主。第三时间段训练以高考真题为主。通过真题训练：第一，运用科学的复习方法，牢固掌握知识；第二，熟悉考试题型，使学生平时如考试，临考心不慌；第三，掌握考试方法，熟练考试技巧，在考场上就能够既沉着冷静，又灵活应变。

4．体例全新。为了充分挖掘学生复习的潜力和发挥学习的积极主动性，本书采取了以下全新的编排形式：(1)第一时间段“考点扫描”采取学习笔记的形式，每一页都留有边空，学生可以随手记下自己的复习心得，标注重难点，标明需要说明的事项；(2)第二时间段(11 月到翌年 3 月)采用的“识记过关”是一个很薄的活页，学生在离校攻专业的四个月时间里，可以随身携带，每天只要花一小时，就能够全面把握六门文化课中必记、必背的内容，最大程度地提高考试得分率。

艺体类高考复习资料的编写是一个新项目、新工程，在这一项目的探索中，我们得到江西师大附中、南昌三中、南昌市实验中学、南昌市当代艺术学校、南昌十六中以及全国有关学校的领导、老师的支持和帮助，使得这一工程在短时间里得以推进。在此表示真诚的感谢！

本项目由徐建国、陈政提出，彭新元、刘杨组织实施。在邀请教学一线领导和老师论证后，由涂明、黄润祥、李伍强具体策划并开展编辑工作。“从来创新艰难多”，毕竟这是一个出版的新工程，编写无所依傍，错漏在所难免，敬请老师、同学、家长帮助指正，以利本书的修订和质量的提高。

本套书的工作进展到今天，最后得以出版，包含了作者和江西美术出版社、江西人民出版社领导及相关人员的辛勤劳动。我们付出，心愿只有一个，希望艺体类考生：

复习高效率，考试好成绩！

数学卷编写：周芳、刘道胜、董世清。

2008 年 9 月

目 录

第一时间段　考点扫描(9 月—11 月)

第一章　集合与简易逻辑

第二章　函　数

第三章　数　列

第四章　三角函数

第五章　平面向量

第六章　不等式

第七章　直线和圆的方程

第八章　圆锥曲线方程

第九章　直线、平面、简单的几何体

第十章　排列、组合与概率

第十一章　统　计

第十二章　导　数

第二时间段　识记过关（11月—翌年3月）

第三时间段　真题实训（3月—6月）

［附录］

第一章　集合与简易逻辑

考纲导读

本章考查分集合与简易逻辑两部分．集合部分的能力要求是概念的理解和知识的简单应用，考查以选择题和填空题为主，为必考内容，考题难度属于容易题；逻辑部分中，命题的四种形式及原命题与逆否命题的等价性属理解层次要求，“充分必要条件”的判定属掌握层次要求，这种题在考卷中经常出现．考查内容有：

1．理解集合、子集、交集、补集、空集、全集等概念的意义；2．集合的三个特性：确定性、互异性、无序性；3．理解元素与集合的属于关系，集合与集合的包含、相等的意义；4．能正确表示简单的集合，会使用集合的有关术语和符号；5．会解含绝对值的不等式、一元二次不等式，并写出解集；6．理解逻辑结构词“或”、“且”、“非”的含义；7．理解四种命题及其相互关系；8．掌握充要条件的正确判定．

本章复习要重视数学语言的使用和数形结合思想在解题中的应用．

第一节　集合的概念与运算

考点精讲

本节考查内容：求两集合的交集，并集、补集；求子集的个数；已知两个集合，求参数的取值范围，求参数值；以及运算的表达式，题型多为选择题和填空题．

1．集合有关概念：

（1）一组确定对象的全体形成一个集合，它有三大特征：确定性、互异性、无序性．

（2）元素与集合之间是属于关系，用“$\in$”或“$\notin$”表示；集合与集合之间是包含关系，用“$\subseteq$”或“$\not\supseteq$”表示．

2．集合的表示法：

（1）列举法，将集合中的元素一一列举出来．

（2）描述法，将集合中的元素的共同属性表示出来．

（3）有的集合还可以用韦恩图表示．

这三种表示方法各有优劣，用什么方法表示具体问题具体分析．

（4）常见的数集表示符号如下：

$\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathbf{N}^+$ 表示正整数集，$\mathbf{Z}$ 表示整数集，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$\mathbf{R}$ 表示实数集，$\mathbf{C}$ 表示复数集，$\mathbf{Q}^+$ 表示正有理数集，$\mathbf{R}^-$ 表示负实数集，$\varnothing$ 表示空集．

3．集合之间的包含关系和交、并、补的运算．

（1）子集：对于任意元素 x，若 $x\in A$，且 $x\in B$．则 $A\subseteq B$，即 A 是 B 的子集．$A\subseteq B$ 可分：A 是空集，即 $A=\varnothing$；A 是 B 的真子集，即 $A\subsetneqq B$；$A=B$ 这三种情形．对于含有 n 个元素的集合的子集个数为 2^n，真子集个数为 2^n-1．

（2）交集：$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$，即由 A 与 B 中的公共元素组成的集合，且有 $A\cap B=B\cap A$；$A\cap B\subseteq A$；$A\cap B\subseteq B$；若 $A\cap B=A$，则 $A\subseteq B$．

（3）并集：$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$，即由 A 中的元素与 B 中的元素组成的集

笔记栏

合，且有 $A\cup B=B\cup A$；$A\cap B\subseteq A\cup B$；$A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$；若 $A\cup B=A$，则 $B\subseteq A$.

(4)补集：设 I 为全集，$A\subseteq I$，则 $\complement_I A=\{x\mid x\in I$ 且 $x\notin A\}$，即全集中所有不属于 A 的元素组成的集合，$A\cup\complement_I A=I$，$A\cap\complement_I A=\varnothing$.

4. 集合运算中常用结论.

(1) $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$；$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

(2) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$，$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$.

(3)由 n 个元素所组成的集合，其子集个数为 2^n 个，即 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$.

(4)空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$，这个结论在解决集合问题时容易忽略.

结论(1)(2)常常是作为"等价转化"的依据，如若已知 $A\cap B=A$，则 $A\subseteq B$.

例 1. 若关于 x 的不等式 $(1+k^2)x\leqslant k^4+4$ 的解集是 M，则对任意实数 k，总有 (　　)

A. $2\in M,0\in M$　　B. $2\notin M,0\notin M$　　C. $2\in M,0\notin M$　　D. $2\notin M,0\in M$

【解法 1】 代入判断法，将 $x=2$，$x=0$ 分别代入不等式中，判断关于 k 的不等式解集是否为 $\mathbf{R}$.

【解法 2】 求出不等式的解集：$(1+k^2)x\leqslant k^4+4$，$\therefore x\leqslant\dfrac{k^4+4}{k^2+1}=(k^2+1)+\dfrac{5}{k^2+1}-2$，$\therefore x\leqslant\left[(k^2+1)+\dfrac{5}{k^2+1}-2\right]_{\min}=2\sqrt{5}-2$，由 $2\leqslant2\sqrt{5}-2$，$0\leqslant2\sqrt{5}-2$ 得 $2\in M$，$0\in M$，故选 A.

【解析】 本题考查集合和元素的关系及分析解决问题的能力，用代入判断法比较容易，在用解法 2 时千万要注意 k 是否为任意实数这个问题.

例 2. 设集合 $A=\{x\mid |x-2|\leqslant2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=-x^2,-1\leqslant x\leqslant2\}$，则 $C_R(A\cap B)=$ (　　)

A. $\mathbf{R}$　　B. $\{x\mid x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq0\}$　　C. $\{0\}$　　D. $\varnothing$

【解法 1】 求出解集：$\because |x-2|\leqslant2$，$\therefore 0\leqslant x\leqslant4$ 即 $A=[0,4]$. $\because y=-x^2$，$-1\leqslant x\leqslant2$. $\therefore y\in[-4,0]$，即 $B=[-4,0]$. $\therefore A\cap B=[0,4]\cap[-4,0]=\{0\}$. $\therefore C_R(A\cap B)=\{x\mid x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq0\}$，选 B.

【解法 2】 排除法，把 0 代入可排去 A 和 C，再分析 B 和 D，只能选 B.

【解析】 本题在考查集合知识的同时还考查与绝对值不等式的解法，二次函数的值域等，是综合能力的考查，本题用排除法比较容易，在用排除法时特别要注意用好特殊值，这是解题的关键.

例 3. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+mx-y+2=0\}$，$B=\{(x,y)\mid x-y+1=0,0\leqslant x\leqslant2\}$，如果 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

【解法】 由 $\begin{cases}x^2+mx-y+2=0\\x-y+1=0\end{cases}$ 得 $x^2+(m-1)x+1=0$……①，$\because A\cap B\neq\varnothing$，$\therefore$ 方程①在区间 $[0,2]$ 上至少有一个实数解，首先，由 $\Delta=(m-1)^2-4\geqslant0$，得 $m\geqslant3$ 或 $m\leqslant-1$，当 $m\geqslant3$ 时，由 $x_1+x_2=-(m-1)<0$ 及 $x_1x_2=1>0$ 可知，方程①只有负根，不符合要求；当 $m\leqslant-1$ 时，由 $x_1+x_2=-(m-1)>0$ 及 $x_1x_2=1>0$ 可知，方程①有两个互为倒数的正根，故必有一根在区间 $(0,1]$ 内，从而方程①至少有一个根在区间 $[0,2]$ 内，综上所述，所求 m 的取值范围是 $(-\infty,-1]$.

【解析】 本题在考查集合知识的同时，还考查与抛物线和线段的公共点问题，在解这样的题时一定要分步讨论，不能有遗漏如果遗漏就很容易出现错误.

同步练习

A 组题

1. 设集合 $I=\{x||x|<3,x\in\mathbf{Z}\}$，$A=\{1,2\}$，$B=\{-2,-1,2\}$，则 $A\cup(C_IB)=$ ( )

A. $\{1\}$ B. $\{1,2\}$ C. $\{2\}$ D. $\{0,1,2\}$

2. 已知集合 $P=\{x|x(x-1)\geqslant 0\}$，$Q=\{x|\frac{1}{x-1}>0\}$，则 $P\cap Q=$ ( )

A. $\varnothing$ B. $\{x|x\geqslant 1\}$ C. $\{x|x>1\}$ D. $\{x|x\geqslant 1$ 或 $x<0\}$

3. 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{2,4,5,7\}$，$B=\{3,4,5\}$，则 $(C_UA)\cup(C_UB)=$ ( )

A. $\{1,6\}$ B. $\{4,5\}$ C. $\{2,3,4,5,7\}$ D. $\{1,2,3,6,7\}$

4. 设集合 $m=\{x|x^2-x<0\}$，$N=\{x||x|<2\}$，则( )

A. $M\cap N=\varnothing$ B. $M\cap N=M$ C. $M\cup N=M$ D. $M\cup N=\mathbf{R}$

5. 已知集合 $M=\{(x,y)|y-1=k(x-1),x,y\in\mathbf{R}\}$，集合 $N=\{(x,y)|x^2+y^2-2y=0,x,y\in\mathbf{R}\}$，那么 $M\cap N$ 中( )

A. 不可能有两个元素 B. 至多有一个元素

C. 不可能只有一个元素 D. 必含有无数个元素

6. 集合 $A=\{(x,y)|y=a|x|\}$，$B=\{(x,y)|y=x+a\}$，$C=A\cap B$，且集合 C 为单元素集合，则实数 a 的取值范围为________.

7. 设集合 $A=\{x|x^2>x\}$，集合 $B=\{x|x>0\}$，则 $A\cap B=$________.

8. 设函数 $f(x)=\log_2(2x-3)$ 的定义域为集合 M，函数 $g(x)=\sqrt{(x-3)(x-1)}$ 的定义域为集合 N，求：(1)集合 M、N；(2)集合 $M\cap N$，$M\cup N$.

9. 已知：集合 $A=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$，$B=\{-4,a+3,a^2-2a+2,a^3+a^2+3a+7\}$，若 $A\cap B=\{2,5\}$，求实数 a 的值，并求 $A\cup B$.

B 组题

1. 已知集合 $M=\{0,1,2\}$，$N=\{x|x=2a,a\in M\}$，则集合 $M\cap N=$ ( )

A. $\{0\}$ B. $\{0,1\}$ C. $\{1,2\}$ D. $\{0,2\}$

2. 若 A、B、C 为三个集合，$A\cup B=B\cap C$，则一定有( )

A. $A\subseteq C$ B. $C\subseteq A$ C. $A\neq C$ D. $A=\varnothing$

3. 若 $\{1\}\subsetneqq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，且 A 中所有元素之和为奇数，则集合 A 的个数为 ( )

A. 5 个 B. 6 个 C. 7 个 D. 8 个

笔记栏

4. 设集合 $M=\{x|4x^2+8x-5>0\}$，$P=\{x|\frac{x-\cos\theta}{2-x}\geqslant 0\}$，若 $P\subseteq M$，则锐角 θ 的取值范围是(　　)

A. $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$　　B. $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$　　C. $(0,\frac{\pi}{6})$　　D. $(0,\frac{\pi}{3})$

5. 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)\geqslant 0$ 的解集为 $\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$，$g(x)\geqslant 0$ 的解集为 $\varnothing$，则不等式 $f(x)\cdot g(x)>0$ 的解集为(　　)

A. $\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$ B. $\mathbf{R}$　　C. $\varnothing$　　D. $\{x|x<1$ 或 $x\geqslant 2\}$

6. 设集合 $A=\{5,\log_2(a+3)\}$，集合 $B=\{a,b\}$，若 $A\cap B=\{2\}$，则 $A\cup B=$______.

7. 已知集合 $A=\{-1,2\}$，$B=\{x|mx+1=0\}$，若 $A\cup B=A$，则 m 的取值是______.

8. 若集合 $M=\{y|y=x^2,x\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\in\mathbf{R}|\frac{3x-1}{x-9}\leqslant 1\}$，则 $M\cap N$ 的真子集的个数是________.

9. 集合 $A=\{x|x^2+4x=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cup B=A$，求实数 a 的取值范围________.

10. 定义运算：$x*y=(x-2)(y+2)$，集合 $A=\{a|(a-1)*(a+1)<1\}$，$B=\{y|y=|x+2|,x\in A\}$，求 $A\cap B$ 与 $A\cup B$.

第二节　含绝对值不等式与一元二次不等式

考点精讲

1. 含绝对值不等式

(1)绝对值的意义：

$$|a|=\begin{cases}a(a>0)\\a(a=0)\\-a(a<0)\end{cases}$$

(2)绝对值的几何意义：$|x|$ 表示数轴上坐标为 x 的点到原点的距离.

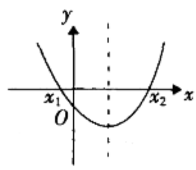
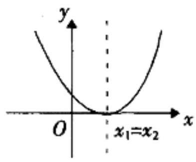
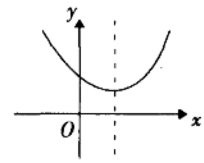
(3)含绝对值不等式的解法.

结构形式	不等式的解集	结构形式	不等式的解集
$\|x\|<a,(a>0)$	$\{x\|-a<x<a\}$	$\|x\|>a,(a=0)$	$\{x\|x\neq 0,x\in\mathbf{R}\}$
$\|x\|<a,(a=0)$	$\varnothing$	$\|x\|>a,(a<0)$	$\mathbf{R}$
$\|x\|<a,(a<0)$	$\varnothing$	$\|x\|>a,(a>0)$	$\{x\|x>a$ 或 $x<-a\}$
$f(x)<a,(a>0)$	$-a<f(x)<a$	$f(x)>a,(a>0)$	$f(x)>a$ 或 $f(x)<-a$

2. 一元二次不等式：$ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$

(1)图象法：利用一元二次不等式，一元二次方程及二次函数间的关系求解一

元二次不等式. 三者的关系如下表.

判别式$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根	有两不相等的实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2$	无实数根
$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x>x_2$ 或 $x<x_1\}$	$\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq-\frac{b}{2a}\}$	$x\in\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

(2)代数法,将一元二次不等式分解因式转化为一次不等式组或配方求解不等.

3. 分式不等式解法

(1)$\frac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$,$\frac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$.

(2)$\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\leqslant0\\g(x)\neq0\end{cases}$,$\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\geqslant0\\g(x)\neq0\end{cases}$

例 1. 解下列绝对值不等式:

(1)$1<|x-2|\leqslant3$;(2)$|2x+1|+|x-2|>4$.

【解法】 (1)原不等式可化为:

$\begin{cases}|x-2|>1\\|x-2|\leqslant3\end{cases}$从而$\begin{cases}x<1\text{ 或 }x>3\\-1\leqslant x\leqslant5\end{cases}$,于是有 $-1\leqslant x\leqslant1$ 或 $3<x\leqslant5$,所以原不等式的解集为$\{x\mid-1<x\leqslant1$ 或 $3<x\leqslant5\}$.

(2)分别令 $2x+1=0$,$x-2=0$,点 $x=-\frac{1}{2}$,$x=2$ 将数轴分成三段 $x<-\frac{1}{2}$,$-\frac{1}{2}\leqslant x<2$,$x\geqslant2$.

①当 $2x+1<0$ 即 $x<-\frac{1}{2}$时,原不等式变形为 $-2x-1+2-x>4$,解得 $x<-1$.

②当 $-\frac{1}{2}\leqslant x<2$ 时,原不等式变形为 $2x+1+2-x>4$,解得 $x>1$,$\therefore 1<x<2$.

③当 $x\geqslant2$ 时,原不等式变形为 $2x+1+x-2>4$,解得 $x>\frac{5}{3}$,$\therefore x\geqslant2$.

综合①②③可得 $x<-1$ 或 $x>1$.

故原不等式的解集为$\{x\mid x<-1$ 或 $x>1\}$

【解析】 含有绝对值的不等式都可以依据绝对值的意义去绝对值号转化求解,解不等式组时一定是求它们的交集,在分类解绝对值时一定要注意去绝对值号时的符号变化,如果是选择题还可以用特殊值的方法来选.

笔记栏

例 2. 解下列不等式：

(1) $-x^2+2x-3>0$；(2) $2^{x^2+2x-4}\leqslant\frac{1}{2}$.

【解法】 (1)两边都乘以 -1，得 $x^2-2x+3<0$，$\because$ $\Delta=4-4\times3=-8<0$，$\therefore$ 方程 $x^2-2x+3=0$ 无实根，$\therefore$ 不等式 $x^2-2x+3<0$ 的解集是 $\varnothing$，即原不等式 $-x^2+2x-3>0$ 的解集是 $\varnothing$.

(2)不等式可化为 $2^{x^2+2x-4}\leqslant2^{-1}$，根据指数函数性质，$\because$ $2>0$，函数是增函数，$\therefore$ $x^2+2x-4\leqslant-1$，$\therefore$ $x^2+2x-3\leqslant0$，$(x+3)(x-1)\leqslant0$，$\therefore$ $-3\leqslant x\leqslant1$，即原不等式 $2^{x^2+2x-4}\leqslant\frac{1}{2}$ 的解集为 $\{x|-3\leqslant x\leqslant1\}$.

【解析】 解一元二次不等式的步骤为：(1)通过对不等式的变形，使二次项系数大于零；(2)计算对应方程的判别式；(3)求出相应的一元二次方程的根或根据判别式说明方程没有实根（这里要说明尽量用因式分解，不等式解集与方程根的关系口诀是：大于零在两边，小于零在中间）；(4)根据(3)及相应的二次函数的图像，写出不等式的解集.

例 3. 解下列不等式：

(1) $\frac{4x-9}{x-8}\leqslant2$；(2) $\frac{x^2+2x-8}{-x^2+x+6}<0$.

【解法】 (1)原不等式可化为 $\frac{4x-9}{x-8}-2\leqslant0$，即 $\frac{2x+7}{x-8}\leqslant0\Leftrightarrow$ $\begin{cases}(2x+7)(x-8)\leqslant0\\x-8\neq0\end{cases}$，$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x|-\frac{7}{2}\leqslant x<8\}$.

(2)原不等式可转化为：$\frac{x^2+2x-8}{x^2-x-6}>0$，$\therefore$ $\frac{(x+4)(x-2)}{(x-3)(x+2)}>0$ 可转化为 $(x-3)(x-2)(x+2)(x+4)>0$，则 $x-3=0$，$x=3$，$x-2=0$，$x=2$，$x+2=0$，$x=-2$，$x+4=0$，$x=-4$，用根值法（也可以叫穿绳子法）如图 1-1-1，所以不等式的解集为 $\{x|x>3\}\cup\{x|-2<x<2\}\cup\{x|x<-4\}$.

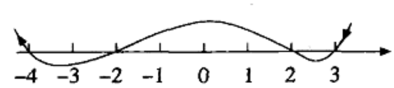


图 1-1-1

【解析】 在解分式不等式时，如果不等式两边都有代数式一定要把它们移到不等号左边来，让右边为 0，再把它们通分，最后再把分式不等式转变成整式不等式，在解不等式时，根值法是常用的方法，另外在分式化整式时，一定要记住分母不能为零.

例 4. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}$，$x\in(1,+\infty)$.

(1)当 $a=\frac{1}{2}$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值；

(2)若对任意 $x\in(1,+\infty)$，$f(x)>0$ 恒成立，试求实数 a 的取值范围.

【解法】 (1)当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x+\frac{1}{2x}+2$，$\because$ $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上为增函数，$\therefore$ $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上的最小值为 $f(1)=\frac{7}{2}$.

(2)解法一：在区间 $(1,+\infty)$ 上 $f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}>0$ 恒成立 $\Leftrightarrow x^2+2x+a>0$

恒成立.

设 $y=x^2+2x+a>0, x\in(1,+\infty)$, $\because y=x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$ 递增,

$\therefore$ 当 $x=1$ 时, $y_{min}=3+a$, 当且仅当 $y_{min}=3+a>0$ 时, 函数 $f(x)>0$ 恒成立, 故 $a>-3$.

解法二: $\because f(x)=x+\dfrac{a}{x}+2, x\in(1,+\infty)$,

当 $a\geqslant0$ 时, 函数 $f(x)$ 的值恒为正; 当 $a<0$ 时, 函数 $f(x)$ 递增,

故当 $x=1$ 时, $f(x)_{min}=3+a$, 当且仅当 $f(x)_{min}=3+a>0$, 函数 $f(x)>0$ 恒成立, 故 $a>-3$.

【解析】 本题考查函数最小值及函数的单调性, 在这类题型重点是转化的思想, 分类讨论恒成立问题.

同步练习

A 组题

1. 不等式 $5x^2-13x+6\leqslant0$ 的解集为(　　)

A. $\{x|\frac{3}{5}\leqslant x\leqslant2\}$　　B. $\{x|x\geqslant2$ 或 $x\leqslant\frac{3}{5}\}$

C. $\{x|\frac{3}{5}<x<2\}$　　D. $\{x|x>2$ 或 $x<\frac{3}{5}\}$

2. 已知: $A=\{x||2x+1|>3\}$, $B=\{x|x^2+x\leqslant6\}$ 则 $A\cap B$(　　)

A. $[-3,-2)\cup(1,2]$　　B. $(-3,-2]\cup(1,+\infty)$

C. $(-3,-2]\cup[1,2)$　　D. $(1,+\infty)\cup(1,2]$

3. 不等式 $|\frac{x}{x-2}|>\frac{x}{2-x}$ 的解集是(　　)

A. $(0,2)$　　B. $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

C. $(-\infty,0)$　　D. $(2,+\infty)$

4. 已知 $f(x)=\begin{cases}x+1,(-1<x<0)\\x-1,(0<x<1)\end{cases}$ 则不等式 $|x|f(x-1)<3$ 的解集为(　　)

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$

C. $(0,1)\cup(1,2)$　　D. $(-1,0)\cup(0,1)$

5. 若关于 x 的不等式 $|x+2|+|x-1|<a$ 的解集为 $\varnothing$, 则 a 的取值范围是(　　)

A. $(3,+\infty)$　　B. $[3,+\infty)$　　C. $(-\infty,3]$　　D. $(-\infty,3)$

6. 已知不等式 $x^2+px+q<0$ 的解集是 $\{x|-3<x<2\}$, 则 $p+q=$________.

7. 不等式 $|2x+1|(x-2)\geqslant0$ 的解集为________.

8. 不等式 $|x|\geqslant\frac{2}{x}$ 的解集是________.

9. 解不等式组 $\begin{cases}x^2-6x+8>0\\\dfrac{x+3}{x-1}>2\end{cases}$

笔记栏

笔记栏

10. 已知全集 $I=\mathbf{R}$,$A=\{x|x^2-3x+2\leqslant 0\}$,$B=\{x|x^2-2ax+a\leqslant 0,a\in\mathbf{R}\}$,且 $B\subseteq A$,求 a 的取值范围.

B 组题

1. 不等式 $|x|>\dfrac{2}{x-1}$ 的解集为(　　)

A. $\{x|x>2$ 或 $x<-1\}$　　B. $\{x|-1<x<2\}$

C. $\{x<1$ 或 $x>2\}$　　D. $\{x|1<x<2\}$

2. 不等式 $(x^3-4x^2+4x)(3+2x-x^2)>0$ 的解集为(　　)

A. $\{x|x<-1$ 或 $1<x<3\}$　　B. $\{x|0<x<3$ 且 $x\neq 2\}$

C. $\{x|-1<x<0$ 或 $x>3\}$　　D. $\{x|x<-1$ 或 $0<x<2$ 或 $2<x<3\}$

3. 已知集合 $A=\{x||x|\leqslant 1\}$,$B=\{x|x^2-x\leqslant 0\}$,则 $A\cap B=$(　　)

A. $\{x|x\leqslant -1\}$　　B. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 0\}$

C. $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$　　D. $\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$

4. 设集合 $A=\{x||x-a|<3\}$,$B=\{x|x<-1$ 或 $x>2\}$,若 $A\cup B=\mathbf{R}$,则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $[-1,2]$　　B. $(-1,2)$　　C. $[-2,1]$　　D. $(-2,1)$

5. 不等式 $|x-3|+|x+1|\leqslant 6$ 的解集是(　　)

A. $(-2,4)$　　B. $[-2,4]$

C. $(-\infty,-2]\cup[4,+\infty)$　　D. $(-4,2]$

6. 已知关于 x 的不等式 $\sqrt{x}>ax+\dfrac{3}{2}$ 的解集为 $\{x|4<x<m\}$,则实数 $a=$______,$m=$______.

7. 若关于 x 的不等式 $|x-1|+|x+2|\leqslant a$ 有解,则实数 a 的取值范围______.

8. 若集合 $A=\{x|x^2-1\leqslant 1\}$,$B=\{x|\dfrac{x-3}{x+1}>0\}$,则 $A\cap B$ ________.

9. 已知集合 $A=\{x|\lg(x-a+1)<\lg 2\}$,$B=\{x|(x-a)(x-2)>0\}$,若 $A\cup B=\mathbf{R}$,求 a 的取值范围________.

10. 设函数 $f(x)=-4x+b$,且不等式 $|f(x)|<0$ 的解集为 $\{x|-1<x<2\}$.

(1)求 b 的值;

(2)解关于 x 的不等式 $(4x+m)f(x)>0(m\in\mathbf{R})$.

第三节　简易逻辑与充要条件

考点精讲

本节高考考查内容是:判断命题的真假,写出四种命题以及利用等价命题证题,说出“若 p 则 q”的命题中条件和结论的逻辑关系,即是充分条件还是必要条件或者是充要条件,题型多为选择题和填空题.

1. 命题

(1)定义:可以判断真假的语句叫做命题,命题有真命题和假命题之分.

(2)构成:一个命题是由题设(条件)和结论两部分构成的.

2. 逻辑联结词:“或”、“且”、“非”这些词叫做逻辑联结词.

3. 简单命题和复合命题,不含逻辑联结词的命题叫做简单命题;由简单命题和逻辑联结词构成的命题叫做复合命题,其形式有“p 或 q”、“p 且 q”、“非 p”三种.

4. 判断复合命题真假的方法

复合命题的真假可通过下面的真值表(如右表)来加以判定:

p	q	非 p	p 或 q	p 且 q
真	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	真	真	真	假
假	假	真	假	假

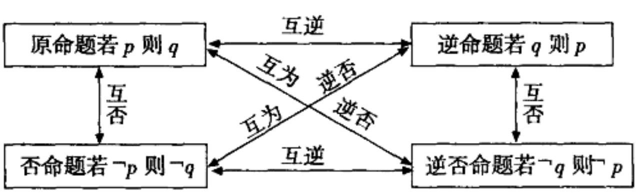
5. 四种命题及其相互关系

(1)命题的四种形式:

原命题,若 p 则 q;逆命题,若 q 则 p;

否命题:若 $\neg p$ 则 $\neg q$;逆否命题,若 $\neg q$ 则 $\neg p$;

(2)四种命题的关系:



(3)等价命题,一个命题⇔它的逆否命题,当一个命题的真假不易判断时,可转而判断它的逆否命题.

(4)反证法的运用有三步,①假设命题的结论不成立,即假设结论的反面成立;②从这个假设出发,经过推理论证,得出矛盾;③由矛盾判定假设不正确,从而肯定命题的结论成立.

6. 充要条件:“充分条件”和“必要条件”是数学中重要的概念之一,它讨论“若 p 则 q”的命题中的条件和结论的逻辑关系,因此,必须真正弄懂它并善于应用它去分析和解决有关问题.

(1)若 $p\Rightarrow q$,则 p 叫 q 的充分条件,q 叫 p 的必要条件.

(2)若 $p\Rightarrow q$,但 $q\nRightarrow p$,则 p 叫 q 的充分不必要条件,q 叫 p 的必要不充分条件.

(3)若 $p\Rightarrow q$,且 $q\Rightarrow p$,则 p 叫 q 的充分必要条件,简称充要条件,q 也叫 p 的必要充分条件,简称充要条件.

例 1. 命题 p:若 a、$b\in\mathbf{R}$,则 $|a|+|b|>1$,是 $|a+b|>1$ 的充分而不必要条件,命题 q:函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$,则(　　)

A. “p 或 q”为假　　B. “p 且 q”为真

C. p 真 q 假　　D. p 假 q 真

笔记栏

【解法】 $\because |a+b|\leqslant|a|+|b|$,若$|a|+|b|>1$,不能推出$|a+b|>1$,而$|a+b|>1$,一定有$|a|+|b|>1$,故命题$p$假,又由函数$y=\sqrt{|x-1|-2}$的定义域为$|x-1|-2\geqslant0$,即$|x-1|\geqslant2$,$\therefore x-1\geqslant2$或$x-1\leqslant-2$,故有$x\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$,$\therefore q$为真命题,故选D.

【解析】 此类题要懂得复合命题的真值表,真值表可简记为:"p且q"一假必假:"p或q"一真必真,"非p且q"真假相反.

例2. "$|x|=|y|$"是"$x=y$"(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【解法】 $\because x=y\Rightarrow|x|=|y|$,$\therefore$前面是后面的充分条件,后面是前面的必要条件,而若$|x|=|y|$,则有$x=y$若$x=-y$,$\therefore |x|=|y|\nRightarrow x=y$,即$|x|=|y|$不是$x=y$的充分条件,$\therefore |x|=|y|$是$x=y$的必要而不充分条件,故选B.

【解析】 此类题考查充分必要条件,只要抓住若$p\Rightarrow q$,p是q的充分条件,q是p的必要条件,$q\Rightarrow p$,则q是p的充分条件,p是q的必要条件即可.

例3. 有下列4个命题:①"若$xy=1$,则x,y互为倒数"的逆命题;②"相似三角形的周长相等"的否命题;③"若$b\leqslant-1$,则方程$x^2-2bx+b^2+b=0$有实根"的逆否命题;④"$A\cup B=B$,则$A\supseteq B$"的逆否命题,其中真命题是(　　)

A. ①②　　B. ②③　　C. ①③　　D. ③④ 、

【解法】 ①逆命题为"若x,y互为倒数,则$xy=1$"为真;②否命题为"若三角形不相似,则周长不相等"为假;③逆否命题$\Leftrightarrow$原命题,$\because b\leqslant-1$时,$\Delta=4b^2-4(b^2+b)=-4b\geqslant4>0$,$\therefore$方程$x^2-2bx+b^2+b=0$有实根,③为真;④"$A\cup B=B$,则$A\supseteq B$"为假命题,$\therefore$其逆否命题为假命题,$\therefore$真命题为①③,故选C.

【解析】 此题为四种命题的转换,只要掌握条件和结论的转换即可,另外考查了命题的真假,只要准确理解概念即可.

例4. 已知函数$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的增函数,$a,b\in\mathbf{R}$,对命题"若$a+b\geqslant0$,则$f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$".

(1)写出逆命题,判断其真假,并证明你的结论;

(2)写出其逆否命题,判断其真假,并证明你的结论.

【解法】 逆命题:已知函数$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的增函数,$a,b\in\mathbf{R}$,"若$f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$,则$a+b\geqslant0$",假设$a+b<0$,则$a<-b,b<-a$,因为$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的增函数,则$f(a)<f(-b)$,$f(b)<f(-a)$,所以$f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$,与条件矛盾,所以逆命题为真.

(2)逆否命题,若$f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$,则$a+b<0$,命题为真,下面用反证法给出证明.

假设$a+b\geqslant0$,则$a\geqslant-b$且$b\geqslant-a$,又$f(x)$为增函数,$\therefore f(a)\geqslant f(-b)$,$f(b)\geqslant f(-a)$;两式相加与$f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$矛盾,故假设不成立,$\therefore a+b<0$.

【解析】 此题考查反证法和命题真假的判断,要掌握用反证法证题的三个步骤,在假设时不要漏任何一个条件.

同步练习

A组题

1. 给定命题p:2是质数,q:3是合数,那么下列结论正确的是(　　)

A. “p 或 q”是真命题　　B. “p 且 q”是真命题

C. “非 p”是真命题　　D. “非 q”是假命题

2. 下列四个命题：

①“$x+y=0$，则 x,y 互为相反数”的否命题；

②“若 a 和 b 都是偶数，则 $a+b$ 是偶数”的否命题；

③“若 $a>b$，则 $a^2>b^2$”的逆否命题；

④已知 a、b、c、d 是实数，“若 $a=b,c=d$”，则 $a+c=b+d$ 的逆命题，其中真命题的个数是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 设 $p:|x|(x+1)>0$，$q:\begin{cases}x^2-4\leqslant 0\\ \dfrac{1}{|x|-1}>0\end{cases}$ 则 p 是 $\neg q$ 的（　　）

A. 充分条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分不必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 若集合 $A=\{1,m^2\}$，$B=\{2,4\}$，则“$m=2$”是“$A\cap B=\{4\}$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 设 $m:x^2-4x+4=0$，$n:\dfrac{2a}{x+1}<1$（a 为常数），则使 m 是 n 的充分不必要条件的 a 的范围是（　　）

A. $(-\infty,2)$　　B. $(2,+\infty)$　　C. $(-2,2)$　　D. $(-2,0)$

6. 已知 p 是 r 的充分不必要条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件，那么 p 是 q 成立的__________条件.

7. 有以下四个命题（$n\in\mathbf{N}^+$）：

(1) $n=n+1$　　(2) $2^n>2n+1\ (n\geqslant 3)$

(3) $2+4+6+\cdots+2n=n^2+n+2$

(4) 凸 n 边形对角线的条数 $f(n)=\dfrac{n(n-2)}{2}\ (n\geqslant 4)$

其中满足“假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^+,k\geqslant n)$ 时命题成立，则当 $n=k+1$ 时命题也成立”，但不满足“当 $n=n_0$（n_0 是题中给定的 n 初始值）时命题成立”的命题序号是________.

8. 设 $p:x<-1$ 或 $x>1$，$q:x<-2$ 或 $x>1$，则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的________条件.

9. 设命题 $p:|4x-3|\leqslant 1$；命题 $q:x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant 0$，若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件，求实数 a 的取值范围.

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 与抛物线 $y^2=2x$ 相交于 A,B 两点.

(1) 求证：“如果直线 l 过点 $T(3,0)$，那么 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$”是真命题；

(2) 写出 (1) 中命题的逆命题，判断它是真命题还是假命题，并说明理由.

笔记栏