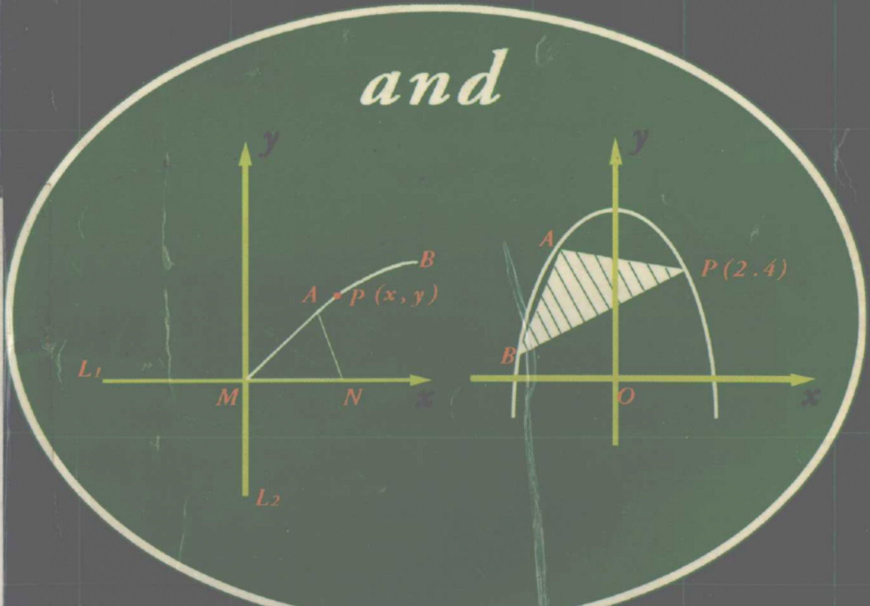
高中数学
求轨迹方程和最值

胡福根　编著



上海科学技术文献出版社

高中数学

求轨迹方程和最值

胡福根　编著

上海科学技术文献出版社

责任编辑：王红九
封面设计：石亦义

图书在版编目（CIP）数据

高中数学求轨迹方程和最值/胡福根编著．－上海：上海科学技术文献出版社，2000.5
ISBN 7－5439－1520－0

Ⅰ.高… Ⅱ.胡… Ⅲ.数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 14433 号

高中数学
求轨迹方程和最值
胡福根 编著
*
上海科学技术文献出版社出版发行
（上海市武康路 2 号 邮政编码 200031）
全国新华书店经销
常熟市印刷八厂印刷
*
开本 787×1092 1/32 印张 12.25 字数 296 000
2000 年 4 月第 1 版 2000 年 4 月第 1 次印刷
印数：1－4 000
ISBN 7－5439－1520－0/O·120
定价：15.00 元
《科技新书目》526－278

前　言

轨迹方程和最值在高中数学平面解析几何中是两个重点。解题时用到平几、代数、三角等基础知识，综合性强，可以培养学生逻辑思维能力数学学科综合运用能力，和应用数学知识提高解决实际应用问题的能力。因此，在现行高中数学课本中，对求轨迹方程和最值这两个内容依然受到重视。

但学生对这两个内容不易掌握，本人积几十年教学经验、结合当今教材，编著了一整套求轨迹方程和最值的基本方法与规律。两者均精心挑选不少各种不同类型的例题、练习题供学生学习练习，其后附练习题答案或解答。

学生若能掌握此基本方法与规律，并能灵活运用例题、练习题中的解题思路和技巧，则不仅这两类问题有助于求解，还可以举一反三地推广到解析几何中的其他问题。如求直线、圆锥曲线方程问题、证明题问题等有助于求解，以及延伸到平几、代数、三角、立几中的求最值问题也有助于求解。以两个点而带动其他，是一本学生可读性强的高中数学辅导书。

本书既可以帮助高中学生迅速提高学习成绩，也可供高中数学教师教学上参考。

限于水平，如有不妥之处，欢迎广大读者批评指出。

胡福根

1999.1

目　　录

第一章　求轨迹方程

第二章　求最值

第一章　求轨迹方程

求轨迹方程：就是由已知条件列出曲线方程．为了易于求出轨迹方程，我们运用求轨迹方程的基本方法求之．

求轨迹方程的基本方法

1．直接法

利用现有的公式、定理直接根据所给轨迹条件列出包含动点坐标的等量关系式而得轨迹方程，这种方法叫做直接法．

例1　两根棒绕着相距 $2a$ 的 A、B 两点旋转，求适合下列条件的交点 P 的轨迹方程：

(1) $PA \perp PB$；

(2) $\angle PBA = 2\angle PAB$；

(3) $\angle PAB + \angle PBA = \frac{\pi}{3}$.

［解题思路］　因两根棒互相垂直所以利用 $k_{PA} \cdot k_{PB} = -1$ 解之．

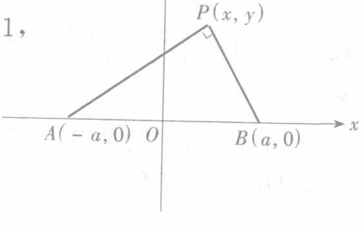
解　(1)设 $P(x,y)$ 为轨迹上任一点，$A(-a,0)$，$B(a,0)$．

$\because k_{PA} = \frac{y}{x+a}$、$k_{PB} = \frac{y}{x-a}$，

按题意：$\frac{y}{x+a} \cdot \frac{y}{x-a} = -1$，

$\therefore$ 所求轨迹方程为：

$x^2 + y^2 = a^2 (x \neq \pm a)$．



[解题思路]　设$\angle PAB=\alpha$、$\angle PBA=2\alpha$，利用 $\mathrm{tg}2\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$ 公式和 $k_{PA}=\mathrm{tg}\alpha$、$k_{PB}=\mathrm{tg}(\pi-2\alpha)$，解之.

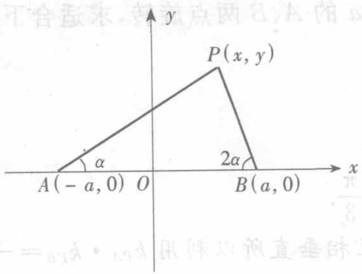
(2)设 $P(x,y)$为轨迹上任一点($y\neq0$)，$A(-a,0)$、$B(a,0)$、$\angle PAB=\alpha$、$\angle PBA=2\alpha$.

$$\because \mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{y}{x+a}、\angle PBx=\pi-2\alpha.$$

$$\therefore \mathrm{tg}(\pi-2\alpha)=-\mathrm{tg}2\alpha=\frac{y}{x-a}.$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{y}{a-x}.$$



$$\therefore \frac{y}{a-x}=\frac{2\dfrac{y}{x+a}}{1-\left(\dfrac{y}{x+a}\right)^2}$$

化简得所求轨迹方程为：

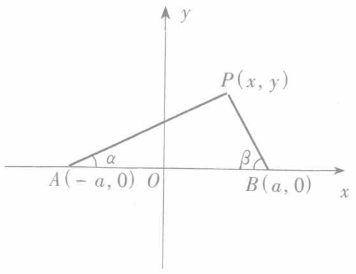
$$3x^2+2ax-y^2-a^2=0.$$

即$$\frac{\left(x+\dfrac{a}{3}\right)^2}{\dfrac{4}{9}a^2}-\frac{y^2}{\dfrac{4}{3}a^2}=1.$$

轨迹为此方程表示的双曲线右支.

[解题思路]　设$\angle PAB=\alpha$、$\angle PBA=\beta$，则 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$，利用 $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$ 公式和 $k_{PA}=\mathrm{tg}\alpha$、$k_{PB}=\mathrm{tg}(\pi-\beta)$ 解之.

(3)设 $P(x,y)$为轨迹上任一点($y\neq0$)，$A(-a,0)$、$B(a,0)$、$\angle PAB=\alpha$、$\angle PBA=\beta$.



按题意：$\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$.

$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

即 $\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}=\sqrt{3}$.

$\mathrm{tg}\alpha=\frac{y}{x+a}$、$\angle PBx=\pi-\beta$.

$\mathrm{tg}(\pi-\beta)=-\mathrm{tg}\beta=\frac{y}{x-a}$.

$\mathrm{tg}\beta=-\frac{y}{x-a}$.

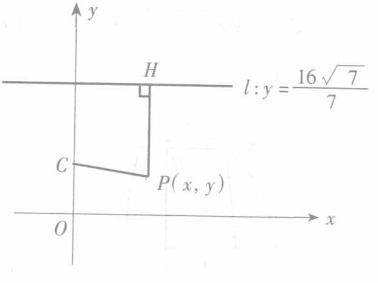
$$\therefore \frac{\frac{y}{x+a}-\frac{y}{x-a}}{1-\frac{y}{x+a}\left(-\frac{y}{x-a}\right)}=\sqrt{3}.$$

化简得所求轨迹方程为：

$$\sqrt{3}x^2+\sqrt{3}y^2+2ay-\sqrt{3}a^2=0.$$

例 2　求到定点 $C(0、\sqrt{7})$和定直线 $y=\frac{16\sqrt{7}}{7}$的距离之比为$\frac{\sqrt{7}}{4}$的动点轨迹方程.

［解题思路］　利用$\frac{|PC|}{|PH|}=\frac{\sqrt{7}}{4}$解之.



解　设 $P(x,y)$为轨迹上任一点，作 $PH\perp$直线 l 交 l 于 H，

按题意：

$$\frac{|PC|}{|PH|}=\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$|PC|=\sqrt{x^2+(y-\sqrt{7})^2}.$

$|PH|=\left|\frac{16\sqrt{7}}{7}-y\right|.$

$$\therefore \frac{\sqrt{x^2+(y-\sqrt{7})^2}}{\left|\frac{16\sqrt{7}}{7}-y\right|}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

化简得所求轨迹方程为：

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1.$$

例 3 定点 $A(1,0)$，定直线 $l:x=3$，P 点到 A 的距离为 m，到直线 l 的距离为 n，且 $m+n=4$. 求 P 点的轨迹方程.

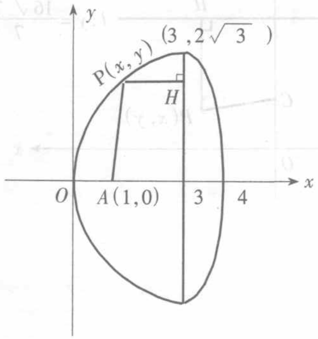
［解题思路］ 利用 $|PA|+|PH|=m+n$ 解之.

解 设 $P(x,y)$ 为轨迹上任一点.

按题意得：

$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+|x-3|=m+n.$

$\therefore \sqrt{(x-1)^2+y^2}+|x-3|=4.$



当 $x\in[0,3]$ 时得：

$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+3-x=4,$

化简得：$y^2=4x$.

当 $x\in[3,4]$ 时得：

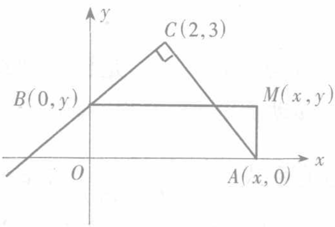
$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+x-3=4.$

化简得：$y^2=-12(x-4)$.

所以所求轨迹方程为：$y^2=4x$ $(x\in[0,3])$ 和 $y^2=-12(x-4)$

$(x\in[3,4])$.

例 4 A 是 x 轴上一动点，一条直线过点 $C(2,3)$，垂直于 AC、且交 y 轴于 B，过 A、B 分别作 x 轴、y 轴的垂线交于 M，求 M 点的轨迹方程.



［解题思路］ 因 $AC\perp BC$ 利用 $k_{AC}\cdot k_{BC}=-1$ 解之.

解 设 $M(x,y)$ 为轨迹上任一点，

$A(x,0)$、$B(0,y)$、$AC\perp BC$.

$\therefore k_{AC}\cdot k_{BC}=-1$.

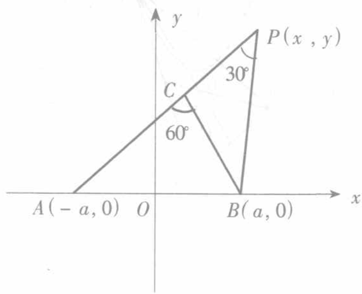
即 $\dfrac{3-0}{2-x}\cdot\dfrac{y-3}{0-2}=-1$.

化简得所求轨迹方程为：

$$2x+3y-13=0.$$

例 5 给定两定点 $A(-a,0)$、$B(a,0)$，$(a>0)$，一动点 C 在 x 轴上方，使 $\angle ACB=60°$，在 AC 延长线上取一点 P，使 $|CP|=|CB|$，求 P 点的轨迹方程.

［解题思路］ 连结 PB，因 $|CP|=|CB|$，由平几知识，知 $\angle APB=30°$. 利用两直线夹角公式解之. 解设 $P(x,y)$ 为轨迹上任一点，连结 PB，则 $\angle APB=30°$.



$$\therefore \operatorname{tg}30°=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1}.$$

$$k_2=k_{PB}=\frac{y}{x-a}、k_1=k_{PA}=\frac{y}{x+a},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\dfrac{y}{x-a}-\dfrac{y}{x+a}}{1+\left(\dfrac{y}{x-a}\right)\left(\dfrac{y}{x+a}\right)}=\frac{2ay}{x^2-a^2+y^2}.$$

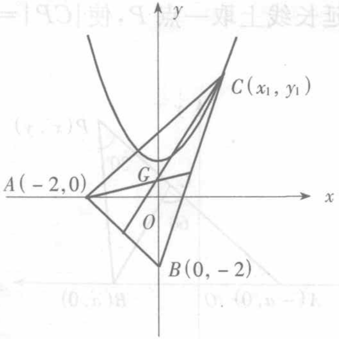
化简得所求轨迹方程为：

$$x^2+(y-\sqrt{3}a)^2=4a^2 \qquad (y>0).$$

2. 代入法

设 $P(x,y)$ 为所求轨迹上任一动点，$M(x_1,y_1)$ 是已知曲线上一点，称相伴点. 因 P 点随 M 点移动而移动，所以，根据条件求出 P 点坐标和 M 点坐标之间的关系式 $\begin{cases} x_1=f(x,y) \\ y_1=p(x,y) \end{cases}$，然后将 x_1、y_1 代入已知曲线方程，消去 x_1、y_1，求得所求的轨迹方程，这种方法，叫做代入法.

例 1 $\triangle ABC$ 两顶点的坐标为 $A(-2,0)$ 和 $B(0,-2)$，第三个顶点在抛物线 $y=x^2+1$ 上移动，求这个三角形重心的轨迹方程.



［解题思路］ 设重心 $G(x,y)$、$C(x_1,y_1)$ 由求三角形重心坐标公式求出 x_1、y_1 代入抛物线方程解之.

解 设重心 $G(x,y)$ 为轨迹上任一点，点 $C(x_1,y_1)$

按重心 $G(x,y)$ 与三角形三顶点坐标间的关系式

$$\begin{cases} x=\dfrac{-2+0+x_1}{3} \\ y=\dfrac{0-2+y_1}{3}. \end{cases}$$

$\therefore \begin{cases} x_1 = 3x + 2 \\ y_1 = 3y + 2 \end{cases}$ 将 x_1、y_1 之式代入 $y_1 = x_1^2 + 1$，

消去 x_1、y_1 $\therefore 3y + 2 = (3x + 2)^2 + 1$.

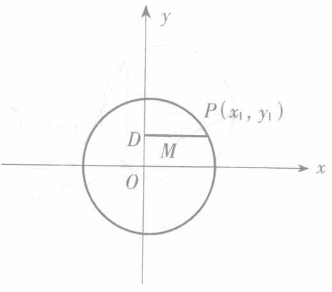
化简得所求轨迹方程为：

$$y = 3x^2 + 4x + 1$$

例 2 一动点 P 在圆 $x^2+y^2=r^2$ 上，求把点 P 横坐标分成定比是 λ 的动点 M 的轨迹方程.

［解题思路］ 设 $M(x, y)$、$P(x_1, y_1)$，利用 $\frac{|DM|}{|MP|}=\lambda$，求出 x_1、y_1 代入圆方程解之.

解 设动点 $M(x, y)$ 为轨迹上任一点，$P(x_1, y_1)$，过 P 作 $PD \perp oy$ 交 oy 于 D，则 $D(o, y_1)$



按题意：

$$\frac{|DM|}{|MP|}=\lambda.$$

$$\therefore \frac{x}{x_1-x}=\lambda.$$

$$\therefore x_1=\frac{(1+\lambda)x}{\lambda}.$$

$y_1=y$，$\because P(x_1, y_1)$ 在圆上代入圆方程 $x_1^2+y_1^2=r^2$，

$$\left[\frac{(1+\lambda)x}{\lambda}\right]^2 + y^2 = r^2.$$

化简得所求轨迹方程为：

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\lambda r}{1+\lambda}\right)^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1.$$

例 3 AB 是半径为 R 的圆的直径，动弦 $MN \perp AB$，求直线

AN 与 MB 交点 P 的轨迹方程.

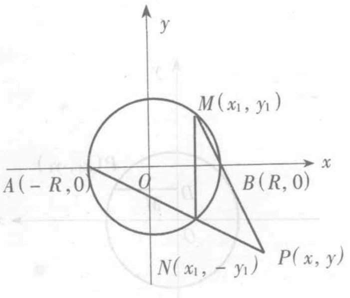
[解题思路] 设 $P(x,y)$、$M(x_1,y_1)$、$N(x_1,-y_1)$列出 AN 和 BM 方程,解方程组,求出 x_1、y_1 代入圆方程解之.

解 设以 AB 为 x 轴,圆心 O 为原点,建立直角坐标系.圆半径为 R,设 $P(x、y)$为轨迹上任一点,$M(x_1,y_1)$,$N(x_1,-y_1)$,

直线 AN 方程为:$y=\dfrac{y_1}{-R-x_1}(x+R)$ (1)

直线 BM 方程为:

$$y=\frac{-y_1}{R-x_1}(x-R) \quad (2)$$



由(1)、(2)解得:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{R^2}{x} \\ y_1=-\dfrac{Ry}{x}. \end{cases}$$

$\because M(x_1、y_1)$在圆上,代入

$x_1^2+y_1^2=R^2$.

$$\left(\frac{R^2}{x}\right)^2+\left(-\frac{Ry}{x}\right)^2=R^2.$$

化简得所求轨迹方程为:

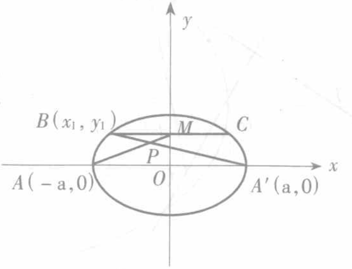
$$x^2-y^2=R^2$$

例 4 设 BC 是平行于椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的长轴 AA' 的弦,若 M 是弦 BC 的中点,求 BA' 与 MA 的交点 P 的轨迹方程.

[解题思路] 设 $P(x,y)$、$B(x_1,y_1)$,列出 BA'、AM 方程,解方程组求出 x_1、y_1 代入椭圆方程解之.

解 设 $A(-a,0)$,$A'(a,0)$,$B(x_1,y_1)$,$P(x,y)$为轨迹上任一点,$M(0,y_1)$则

BA'方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-a}(x-a)$.



$\therefore y_1=\frac{y(x_1-a)}{x-a}$　　　　(1)

AM 方程为：

$y=\frac{y_1}{a}(x+a)$.

$\therefore y_1=\frac{ay}{x+a}$　　　　(2)

由(1)、(2)

$\frac{y(x_1-a)}{x-a}=\frac{ay}{x+a}$,

$x_1-a=\frac{a(x-a)}{x+a}$, $\therefore x_1=\frac{2ax}{x+a}$.

$\because B(x_1、y_1)$在椭圆上，$\therefore b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2$.

将 x_1、y_1 之式代入得：

$$b^2\left(\frac{2ax}{x+a}\right)^2+a^2\left(\frac{ay}{x+a}\right)^2=a^2b^2.$$

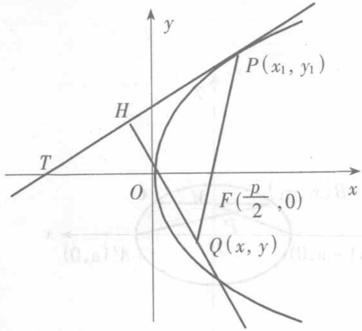
化简得所求轨迹方程为：

$$3b^2x^2+a^2y^2-2ab^2x-a^2b^2=0.$$

例 5　$y^2=2Px$ 上任一点 $P(x_1,y_1)PT$ 为切线、$OH\perp TH$、OH 与 PF 交于 Q，求 Q 点轨迹方程.［解题思路］　因 $OH\perp TH$，由 PT 切线方程求出 OH 直线的斜率，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x,y)$列出 PQ、OH 方程，解方程组求出 x_1、y_1 代入抛物线方程解之.

解　设 $Q(x,y)$为轨迹上任一点，$P(x_1,y_1)$切线 PT 方程为：$y_1y=P(x+x_1)$.

$\therefore y=\frac{P}{y_1}(x+x_1)$则



$k_{OH}=-\frac{y_1}{P}$ OH 方程为：

$$y=-\frac{y_1}{P}x$$

$$\therefore y_1=-\frac{Py}{x} \qquad (1)$$

PQ 方程为：$y=\dfrac{y_1}{x_1-\frac{P}{2}}\left(x-\frac{P}{2}\right)$.

$$\therefore y_1=\frac{y\left(x_1-\frac{P}{2}\right)}{x-\frac{P}{2}} \qquad (2)$$

由(1)、(2)　$-\dfrac{Py}{x}=\dfrac{y\left(x_1-\frac{P}{2}\right)}{x-\frac{P}{2}}$.

$\therefore x_1=\dfrac{\frac{P^2}{2}-\frac{P}{2}x}{x}$ 将 x_1、y_1 之式代入

$y_1^2=2Px_1$.

$$\left(-\frac{Py}{x}\right)^2=2P\left[\frac{\frac{P^2}{2}-\frac{P}{2}x}{x}\right].$$

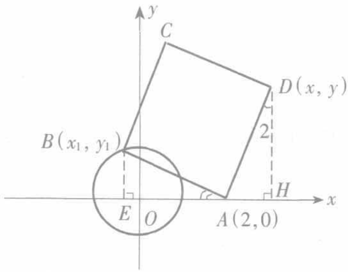
化简得所求轨迹方程为：

$$x^2+y^2-Px=0.$$

例 6　已知圆 $x^2+y^2=1$ 上一动点 B 与一定点 $A(2,0)$ 的连线作正方形 $ABCD$(A、B、C、D 顺序为顺时针)求 D 点的轨迹方程.

［解题思路］　如图，设 $D(x,y)$、$B(x_1,y_1)$ 利用 $Rt\triangle ABE\cong Rt\triangle ADH$ 求出 x_1,y_1 代入圆方程解之.

解　作 $DH\perp ox$ 交 ox 于 H，过 B 作 $BE\perp ox$ 交 ox 于 E.



设 $D(x,y)$ 为轨迹上任一点 $B(x_1,y_1)$

$\because AB=AD$、$\angle 1=\angle 2$，

$\therefore Rt\triangle ABE\cong Rt\triangle ADH$.

则 $|BE|=|AH|$

$\therefore y_1=x-2$.

$|EA|=|DH|$

$\therefore 2-x_1=y$.

$x_1=2-y$　将 x_1,y_1 之式代入 $x_1^2+y_1^2=1$，

$(2-y)^2+(x-2)^2=1$.

$\therefore$所求轨迹方程为：

$(x-2)^2+(y-2)^2=1$.

例 7　如图：OA 是定圆的直径，它的长是 $2a$，直线 OB 和圆相交于 M_1 和经过点 A 的切线相交于 B. $MM_1\perp OA$，$MB/\!/OA$，以 O 为原点，ox 为 x 轴的正方向，求点 M 的轨迹方程.

[解题思路]　设 $M(x,y)$，$M_1(x_1,y_1)$ 利用 $MB/\!/OC$ 得 $\frac{MB}{OC}=\frac{MM_1}{M_1C}$ 求出 x_1,y_1 代入圆方程解之.

解　设 $M(x,y)$ 为所求轨迹上任一点，$M_1(x_1,y_1)$ 为已知圆上一点.

$\because MB/\!/OC$，

$\therefore \frac{MB}{OC}=\frac{MM_1}{M_1C}$.