高等院校试用教材

高等数学

蒋传章 主编

西安电子科技大学出版社

前　言

本书是根据国家教委工科数学教学指导委员会提出的《高等数学课程教学的基本要求》并参考成人教育的高等数学教学大纲，结合专业的特点和要求所编写的高等工业院校专科及本科少学时教材．本书也是西北建筑工程学院组织编写的建筑工程类系列教材之一．

本书说理严谨准确，叙述清晰简炼，文字通俗易懂．重点突出，便于教学，例题充足，便于自学．

在内容安排上，把一元函数微积分做为基础，充分保证对其基本概念，基本理论和基本运算技能的要求；多元函数微分学则突出其重点和一般计算；对多元函数积分学只介绍二重积分和平面曲线积分的基本概念和计算方法；级数和常微分方程着重介绍基本概念和常用解法，所设及的有关内容均注意到了简单应用，对某些专业可以不学的内容均用 * 号或小字部分表示．

本书共十章，内容包括：函数、极限与连续；导数与微分；微分中值定理及导数应用；不定积分；定积分及其应用；向量代数与空间解析几何；多元函数微分学；二重积分与平面曲线积分；级数；常微分方程．

书末附有初等数学常用公式，常用曲线、曲面方程及图形和积分表．

本书也可作为工科职工大学、函授大学、夜大学和大专程度的各种进修班的选用教材．

藉于时间仓促、限于编者水平，书中有考虑不周处、疏忽和错误在所难免，敬请读者提出批评和指正．

编者于 1993 年 3 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

高等数学是以变量为研究对象的一门数学课程.

反映变量之间依赖关系的函数是高等数学研究的主要对象.作为一种数学思想、一种数学运算的极限则是高等数学研究变量的一种基本方法,与极限概念有着密切联系的连续是函数的重要特性.因而,函数、极限与连续都是高等数学中最基本、最重要的概念.本章将依次介绍这些基本概念以及它们的一些性质.

第一节　函数

一、函数的概念

在研究自然现象和进行科学实验或者解决实际问题时,我们常常会在同一个问题中遇到各种不同的变量,它们之间相互依赖、相互制约存在着某种确定的关系.在数学上把这种变量之间的确定关系就称为函数关系.下面我们先讨论两个例子.

例 1　求圆的面积 A 与它的半径 r 之间的依赖关系.

解　大家知道它们之间的关系由公式

$$A = \pi r^2$$

给出.当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任取定一个数值时,由上式就可确定圆面积 A 的相应数值.

例 2　求物体作自由落体运动的距离 S 与下落时间 t 之间的依赖关系.

解　假定开始下落的时刻为 $t = 0$,则 S 与 t 之间的关系由公式

$$S = \frac{1}{2}gt^2$$

给定,其中 g 是重力加速度.假定物体着地的时刻为 $t = T$,那么,当时间 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任意取定一个数值时,由上式就可以确定 S 的相应数值.

抽去上面两个例子中所考虑的量的实际意义,它们都表达了两个变量之间的相互依赖的关系,这种相依关系给出一种对应法则.根据这一法则,当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时,另一个变量就有确定的值与之对应.两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1　设有两个变量 x 和 y,如果对于 x 的变化范围内的每一个值,y 按照一定的法则总有确定的数值与之对应,那么称 y 是 x 的函数.记作

$$y = f(x),$$

其中 x 称为自变量,y 称为函数或因变量.自变量 x 的变化范围称为函数的定义域,因变量 y 所对应的数值范围称为函数的值域.

函数是由定义域及对应法则所确定的,因此,研究函数时,必须注意它的定义域.在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义来确定的.如果因变量 y 是通过自变量 x 经过一系列运算所得,那么函数的定义域将是使运算式有意义的自变量 x 的实数的全体.

符号"f"表示 x 与 y 的对应规则，也可用其它字母来表示，例如 $y = g(x)$、$y = \varphi(x)$ 或 $y = y(x)$ 等. 但必须注意，在同一问题中，为了避免引起混淆，不要用同一个字母来表示不同的对应法则.

定义中，如果对于一个 x 值只有一个确定的 y 值与之对应，则称 y 是 x 的单值函数；否则叫做多值函数，如函数 $y^2 = x$ 即为多值函数. 多值函数可加以条件限制，使之成为单值函数.

以后凡是没有特别说明时，函数都是指单值函数.

对于自变量 x 在定义域内的某一固定值 x_0，函数 $f(x)$ 的对应值 y_0，叫做函数 $f(x)$ 当 $x = x_0$ 时的函数值，记作 $y_0 = f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 如果当 $x = x_0$ 时，函数 $y = f(x)$ 有确定的值和它对应，那么称 $y = f(x)$ 在 x_0 处有定义.

确定一个函数的要素是函数的定义域和对应法则，与自变量和因变量用什么字母来表示无关. 对于两个函数，只有当它们的定义域完全相同，它们的对应规则完全相同时，才能认为它们是同一个函数.

例 3 求下列函数的定义域：

(1) $y = \dfrac{1}{x}\lg(x+1)$；　(2) $y = \arcsin\dfrac{x-1}{2} + \sqrt{x-2}$；　(3) $y = \dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{4-x^2}}$.

解 (1) 函数 $y = \dfrac{1}{x}\lg(x+1)$ 的定义域必须满足下列条件：

$$\begin{cases} x \neq 0; \\ x + 1 > 0, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x \neq 0; \\ x > -1. \end{cases}$$

因此，$y = \dfrac{1}{x}\lg(x+1)$ 的定义域为 $(-1,0),(0,+\infty)$.

(2) 要使函数 $y = \arcsin\dfrac{x-1}{2} + \sqrt{x-2}$ 有意义，必须

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x-1}{2}\right| \leqslant 1; \\ x - 2 \geqslant 0. \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 3; \\ x \geqslant 2. \end{cases}$$

因此，$y = \arcsin\dfrac{x-1}{2} + \sqrt{x-2}$ 的定义域为 $[2,3]$.

(3) 要使函数 $y = \dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{4-x^2}}$ 有意义，必须

$$\begin{cases} x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}; \\ 4 - x^2 > 0, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2} \quad (k\ 为整数); \\ -2 < x < 2. \end{cases}$$

因此，$y = \dfrac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{4-x^2}}$ 的定义域为 $(-2,-\dfrac{\pi}{2}),(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}),(\dfrac{\pi}{2},2)$.

例 4 设函数 $f(x) = x^4 + x^2 + 1$. 求 $f(0),f(t^2),[f(t)]^2,f(\dfrac{1}{t}),\dfrac{1}{f(t)}$.

解 $f(0) = 0^4 + 0^2 + 1 = 1$,

$f(t^2) = (t^2)^4 + (t^2)^2 + 1 = t^8 + t^4 + 1$,　　$[f(t)]^2 = (t^4 + t^2 + 1)^2$,

$f(\dfrac{1}{t}) = (\dfrac{1}{t})^4 + (\dfrac{1}{t})^2 + 1 = \dfrac{1 + t^2 + t^4}{t^4} \quad (t \neq 0)$,　$\dfrac{1}{f(t)} = \dfrac{1}{t^4 + t^2 + 1}$.

例 5 设 $f(x+3) = \dfrac{x+1}{x+2}$，求 $f(x)$.

解 令 $x + 3 = t$，则 $x = t - 3$. 则有

$$f(x+3)=\frac{(t-3)+1}{(t-3)+2}=\frac{t-2}{t-1}\quad (t\neq 1),\qquad 即\quad f(t)=\frac{t-2}{t-1}.$$

所以

$$f(x)=\frac{x-2}{x-1}\quad (x\neq 1).$$

对应规则"f"的不同表示方式，产生了表示函数的不同方法. 函数有三种表示法：公式法；图形法；表格法. 图形法的优点是鲜明直观，一目了然，工程技术中常用. 表格法的优点是可以直接从表中的自变量值查到对应的函数值，但不便于进行理论研究.

高等数学里所研究的函数，大多用公式法表示. 用公式法表示函数时，有时对函数定义域内的自变量不同的取值，不能用一个式子表示，而需要用两个或更多个式子来表示，这类函数称为分段函数. 如

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 1;\\ \sin x, & x>1\end{cases}$$

是分成两段的函数，它的定义域是$(-\infty,+\infty)$. 又如

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x<0;\\ 0, & x=0;\\ x^2, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

是分成三段的函数，它的定义域是$[-1,1]$.

例 6　有一块边长为 a 的正方形铁皮，将它的四角剪去相等的小正方形，制成一只无盖盒子，求盒子的体积与小正方形边长之间的函数关系.

解. 设剪去的小正方形的边长为 x，盒子的体积为 V. 由图 1—1 容易得到

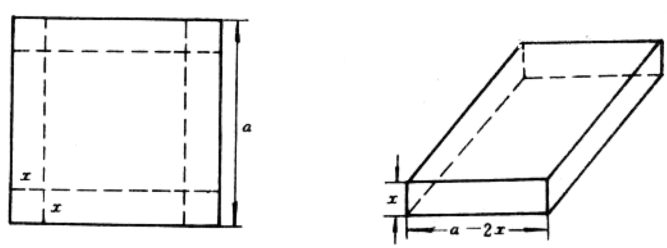


图 1—1

$$V=x(a-2x)^2\qquad (x\in(0,\frac{a}{2})).$$

例 7　某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 a 公里以内，每公里 K 元，超过 a 公里，每增一公里为$\frac{4}{5}K$ 元. 把运价 m 和里程 S 之间的函数关系用公式表示出来为

$$m=\begin{cases}KS, & 0<S\leqslant a;\\ Ka+\frac{4}{5}K(S-a), & a<S.\end{cases}$$

这里运价 m 和里程 S 的函数关系是用分段函数表示的，定义域为$(0,+\infty)$.

二、反函数

在函数 $y=f(x)$ 中，x 是自变量，y 是因变量. 但在实际问题中，变量之间的函数关系是可以发生变化的. 例如，圆的面积 S 和半径 r 之间的函数关系式是 $S=\pi r^2$（其中 r 是自变量，S 是 r 的函数）. 如果问题是由面积 S 来确定半径 r，那么可把 S 取作自变量，而把半径 r 取作因变量，

这样半径 r 就是面积 S 的函数，r 与 S 的函数关系式为

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

我们称后一个函数（$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$）是前一个函数（$S = \pi r^2$）的反函数，或者说它们互为反函数. 一般的，我们有如下定义.

定义 2　若在函数 $y = f(x)$ 中，把 y 当作自变量，x 当作因变量，则由关系式 $y = f(x)$ 所确定的函数 $x = \varphi(y)$ 叫做 $y = f(x)$ 的反函数，$y = f(x)$ 叫做直接函数.

显然 $y = f(x)$ 和 $x = \varphi(y)$ 互为反函数.

在研究函数时，往往习惯将 x 作为自变量，而将 y 作为因变量. 因此，我们习惯上总把 $y = f(x)$ 的反函数 $x = \varphi(y)$ 中的自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，从而得到 $y = \varphi(x)$，我们也把 $y = \varphi(x)$ 称为 $y = f(x)$ 的反函数. 通常情况下，$y = f(x)$ 的反函数都是指 $y = \varphi(x)$. 在同一坐标系里，$y = f(x)$ 与其反函数 $y = \varphi(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 是对称的（图 1—2）.

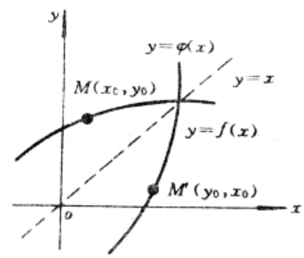


图 1—2

求反函数的步骤是：(1) 在 $y = f(x)$ 中将 y 作为已知数，求出 x 即得 $x = \varphi(y)$；(2) 在 $x = \varphi(y)$ 中交换变量得 $y = \varphi(x)$，此时即得 $y = f(x)$ 的反函数 $y = \varphi(x)$.

例 8　求下列函数的反函数

(1) $y = 3x - 5$；　　　(2) $y = 1 + lg(x + 1)$.

解　(1) $y = 3x - 5$

先求出用 y 表示 x 的关系式：　$x = \frac{1}{3}(y + 5)$，

再交换 x 与 y 的位置，即得 $y = 3x - 5$ 的反函数为 $y = \frac{1}{3}(x + 5)$.

(2) $y = 1 + \lg(x + 1)$

由 $\lg(x + 1) = y - 1$ 解出 x，即 $x + 1 = 10^{y-1}$，得　　$x = 10^{y-1} - 1$.

再交换 x 与 y 的位置，即得 $y = 1 + \lg(x + 1)$ 的反函数为　　$y = 10^{x-1} - 1$.

例 9　求 $y = x^2$ 的反函数.

解　由 $y = x^2$ 解得 $x = \pm\sqrt{y}$，这是多值函数，因此在 $(-\infty, +\infty)$ 内，$y = x^2$ 没有反函数. 如果求其反函数，应使函数变为单值函数后再求反函数. 如

$y = x^2 (0 \leqslant x < +\infty)$ 的反函数为 $y = \sqrt{x}$，其定义域为[(0, +∞)，值域为[0, +∞)；而 $y = x^2, (-\infty < x \leqslant 0)$ 的反函数为 $y = -\sqrt{x}$，其定义域为[0, +∞)，值域为(−∞, 0].

由此例可以看出，一个函数若有反函数，则此函数和其反函数都是单值函数. 因此，函数 $y = f(x)$ 定义域就是其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的值域，而 $y = f(x)$ 的值域则是 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域.

单值单调函数的反函数在对应区间上必存在，且也是单值单调函数.

三、函数的几种特性

1. 函数的奇偶性　如果函数 $y = f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $y = f(x)$ 为奇函数；若 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如，$y = \sin x$ 和 $y = x^3$ 是奇函数；$y = \cos x$ 和 $y = x^2$ 是偶函数.

若 $f(x)$ 是奇函数，由 $f(-x) = -f(x)$，则点 $A(x, f(x))$ 与点 $A'(-x, -f(x))$ 都在曲线 $y = f(x)$ 上，点 A 与 A' 关于原点对称. 因此奇函数的图象对称于坐标原点(图 1—3). $y = x^3$ 是奇函数，其图象对称于原点.

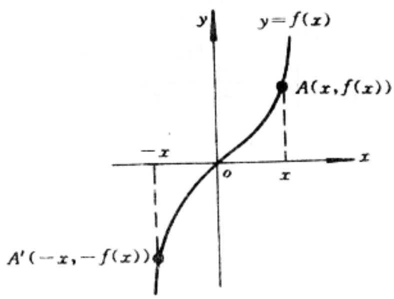


图 1—3

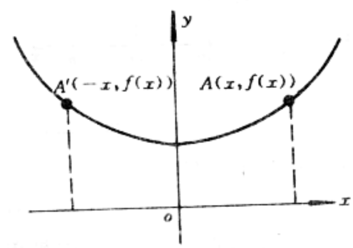


图 1—4

若 $f(x)$ 是偶函数，由 $f(-x) = f(x)$，则点 $A(x, f(x))$ 与点 $A''(-x, f(x))$ 都在曲线 $y = f(x)$ 上，点 A 与 A'' 关于 y 轴对称. 因此，偶函数的图象对称于 y 轴.(图 1—4). $y = x^2$ 是偶函数，其图象对称于 y 轴.

例 10 证明 $f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是奇函数.

证 因为对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$，

$$f(-x) = \lg(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \lg\frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$= \lg\frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} = -\lg(x + \sqrt{x^2+1}) = -f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

必须注意，考虑函数的奇偶性时，要求 x 与 $-x$ 同时在定义域内，因而函数的定义域必须关于坐标原点对称. 也就是说，凡是定义域不关于原点对称的函数必定为非奇非偶函数. 例如 $y = \ln x$，因为 $x > 0$，故无奇偶性可言. 它是非奇非偶函数.

2. 函数的周期性 对于函数 $y = f(x)$，如果总存在一个不为零的常数 l，使得关系式

$$f(x \pm l) = f(x)$$

对于所有定义域内的任何 x 值都成立，则 $f(x)$ 叫周期函数. l 是 $f(x)$ 的周期. 通常所说的周期函数的周期是指最小正周期.

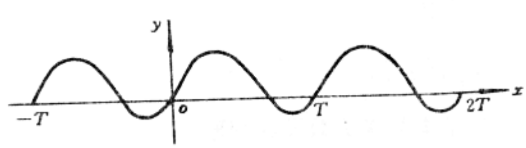


图 1—5

例如，$y = \sin x, y = \cos\frac{x}{2}, y = \mathrm{tg}2x$ 都是周期函数，其周期分别是 2π、4π、$\frac{\pi}{2}$.

应当注意，函数的周期性是针对函数的整个定义域而言.

周期函数图象的特点是自变量每经过一个周期，其图形将重复一次(图 1—5 所示). 因而周期函数的图象可以通过一个周期内的图形向左向右平移得到.

3. 函数的单调性 如果函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 增大而增大，即对于 (a, b) 内任意两点 x_1 与 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则函数 $y=f(x)$ 叫做在区间 (a,b) 内是单调增加(图 1—6)

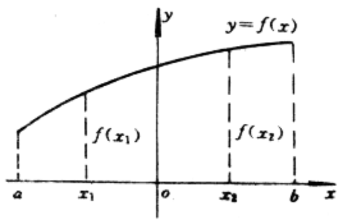


图 1—6

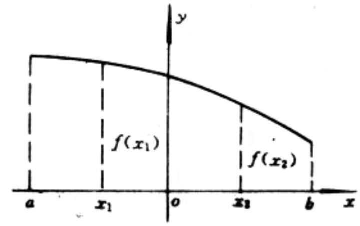


图 1—7

又若当 $x_1 < x_2$ 时,有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则函数 $y=f(x)$ 叫做在区间 (a,b) 内是单调减少(图 1—7).

单调增加函数的图形沿 x 轴正向上升;单调减少函数的图形沿 x 轴正向下降.

单调增加函数和单调减少函数统称单调函数,使函数为单调函数的自变量的变化区间叫做函数的单调区间.

应当注意,函数的单调性是针对一定区间而言的.

例如,$f(x)=x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调增加,在区间 $(-\infty,0)$ 上是单调减少.

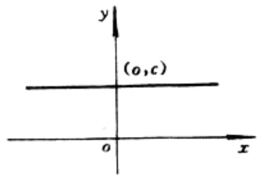
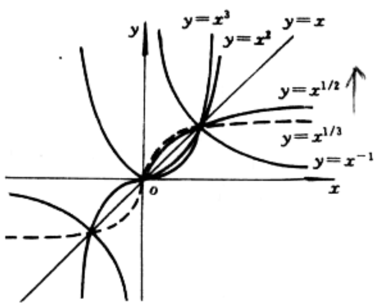
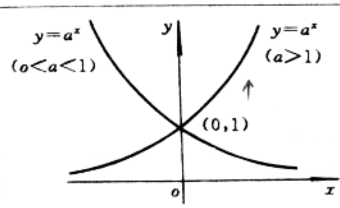
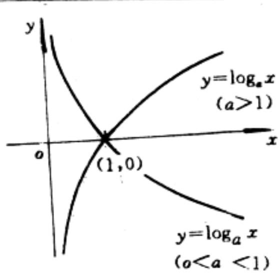
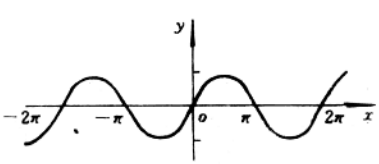
4. 函数的有界性 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义((a,b) 可以是函数 $y=f(x)$ 的整个定义域,也可以是定义域的一部分),如果存在一个正数 M,使得对一切 $x\in(a,b)$ 恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的. 如果这样的 M 不存在就叫做函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的.

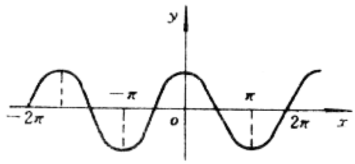
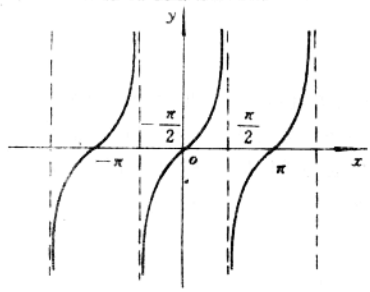
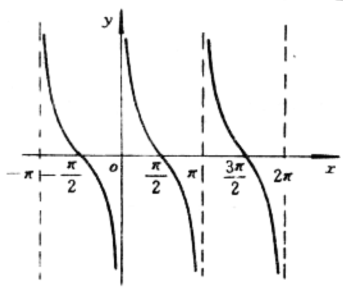
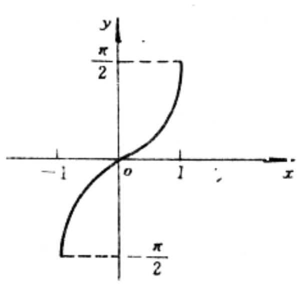
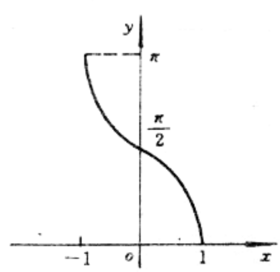
例如,函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的,因为无论 x 取任何实数都有 $|\sin x|\leqslant 1$ 成立,这里的 $M=1$. 而函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内是有界的,因为区间 $(1,2)$ 内的一切 x 值均有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M=1$ 成立. 但在区间 $(0,1)$ 内 $\dfrac{1}{x}$ 就是无界的,这是因为不存在这样的正数 M,使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 值都成立. 因此,讲一个函数是有界的或无界的,必须指出其相应的范围.

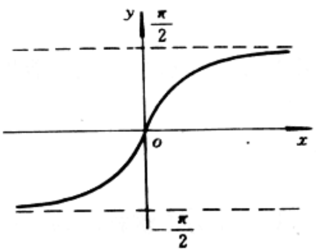
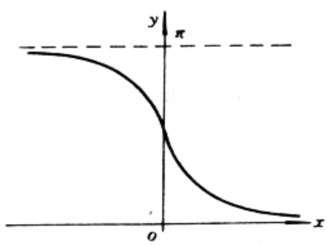
四、初等函数

1. 基本初等函数及其图形

常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数等称为基本初等函数. 这在中学均已作过较详细的介绍. 为便于今后的学习和查阅方便,现将它们的图形和简单性质列表于下:

函数	图　　形	定　义　域	值　　域	特　　性
常量函数 $y=C$ (C是常数)		$-\infty<x<+\infty$	$y=C$	过$(0,C)$点
幂函数 $y=x^a$ (a为实数)		与a有关，但无论a是何值，定义域都包含区间$(0,+\infty)$	随a变化，但无论a为何值时，值域都包含区间$(0,+\infty)$	过$(1,1)$点
指数函数 $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq1$)		$-\infty<x<+\infty$	$0<y<+\infty$	过$(0,1)$点．$a>1$时，单调增加；$0<a<1$时，单调减少．
对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq1$)		$0<x<+\infty$	$-\infty<y<+\infty$	过$(1,0)$点 $a>1$时单调增加；$0<a<1$时单调减少．
正弦函数 $y=\sin x$		$-\infty<x<+\infty$	$-1\leqslant y\leqslant1$	关于原点对称，以2π为周期．

函数	图形	定义域	值域	特性
余弦函数 $y=\cos x$		$-\infty<x<+\infty$	$-1\leqslant y\leqslant 1$	关于 y 轴对称，以 2π 为周期
正切函数 $y=\operatorname{tg}x$		$x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$	$-\infty<y<+\infty$	关于原点对称，以 π 为周期.
余切函数 $y=\operatorname{ctg}x$		$x\neq n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$	$-\infty<y<+\infty$	关于原点对称，以 π 为周期
反正弦函数 $y=\arcsin x$		$-1\leqslant x\leqslant 1$	$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$	关于原点对称，单调增加函数.
反余弦函数 $y=\arccos x$		$-1\leqslant x\leqslant 1$	$0\leqslant y\leqslant\pi$	单调减少函数.

函数	图形	定义域	值域	特性
反正切函数 $y=\mathrm{arctg}x$		$-\infty<x<+\infty$	$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$	关于原点对称，单调增加的奇函数
反余切函数 $y=\mathrm{arctg}x$		$-\infty<x<+\infty$	$0<y<\pi$	单调减少函数

2. 复合函数

我们先看一个例子：以初速度 V_0 垂直向上抛的物体，它的动能 K 是速度 V 的函数 $K=\frac{1}{2}mV^2$；而速度 V 又是时间 t 的函数 $V=V_0-gt$，这样通过 V 作媒介，动能 K 就成了时间 t 的函数，即

$$K=\frac{1}{2}m(V_0-gt)^2.$$

定义 3 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内. 我们称 y 是 x 的函数是由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，u 称为中间变量(函数).

有必要指出，并非任何两个函数都能构成复合函数. 例如，$y=\arcsin u$，$u=\sqrt{2}+x^2$ 就不能构成复合函数 $y=\arcsin(\sqrt{2}+x^2)$. 复合函数还可以由两个以上的函数复合而成. 例如，由函数 $y=\log_3 u$，$u=\sin V$ 和 $V=x^2+1$，可以构成复合函数 $y=\log_3\sin(x^2+1)$.

我们不但要会将若干个函数复合成一个复合函数，还应当能够准确地指出一个复合函数是由哪些函数怎么复合而成的，即要善于"分解"复合函数.

一般地说，分解复合函数的原则是：在分解过程中，每一步得到的都应当是以某个中间变量为自变量的基本初等函数或者是它们的四则运算式. 最后得到的则应是关于自变量的基本初等函数或者它们的四则运算式(即分解到这种程度方可认为分解工作完成了).

例 11 向 $y=a^{\sin x}$ 是由哪些函数复合而成的？

解 $y=a^u$，而 $u=\sin x$，所以，$y=a^{\sin x}$ 是由 $y=a^u$ 与 $u=\sin x$ 复合的.

例 12 将 $y=\sqrt{\log_a(1+\frac{1}{x})}$ 分解为基本初等函数.

解 $y=\sqrt{u}$，　$u=\log_a V$，　$V=1+\frac{1}{x}$.

特别应注意象 $y=\sin^2[(2x+1)/(x-1)]$ 应分解为 $y=u^2$(u 的幂函数)，$u=\sin V$(V 的正

弦函数)、$V=(2x+1)/(x-1)$(自变量及常数的四则运算式). 而不能分解为 $y=\sin^2 u$、$u=[(2x+1)/(x-1)]$,因为 $\sin^2 u$ 不属于基本初等函数.

3. 初等函数

凡是由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成并能用一个数学式子表示的函数,叫初等函数. 它是高等数学中经常遇到的.

比较重要的初等函数有

(1) 多项式

$p_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,其中 n 为正整数,$a_0,a_1,\cdots a_n$ 为常数.

(2) 有理函数

$$Q(x)=\frac{P_n(x)}{p_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}.$$

有理函数即为两个多项式之商,显然,当 $P_m(x)\equiv 1$ 时,$Q(x)$ 即为多项式,因此多项式可看成有理函数的特殊情况.

(3) 双曲函数

双曲正弦函数 $\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

其定义域为$(-\infty,+\infty)$;值域为$(-\infty,+\infty)$;它是单调增加的奇函数.

双曲余弦函数 $\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

其定义域为$(-\infty,+\infty)$;值域为$(0,+\infty)$;在$(-\infty,0)$内单调减少,在$(0,+\infty)$内单调增加;它是偶函数.

双曲正切函数,$\mathrm{th}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

其定义域为$(-\infty,+\infty)$;值域为$(-1,1)$;它是单调增加的奇函数.

双曲余切函数 $\mathrm{cth}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

其定义域为 $x\neq 0$;值域为$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$;它在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$内分别为单调减少;它是奇函数.

在双曲函数之间,存在着一些类似于三角函数关系的恒等式:

$$\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x},\quad \mathrm{ch}x=\frac{1}{\mathrm{th}x},\quad \mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1,$$

$$\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x,\quad \mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x.$$

(上述恒等式,读者自己证明)

习题 1—1

1. $M(x,y)$ 是曲线 $y=x^2$ 上的动点,如图 1—8 所示,试问:

(1) 弧$\overset{\frown}{OM}$ 的长度是不是 x 的函数?

(2) 图 1—8 中阴影部分的面积是不是 x 的函数?

2. 判断下列各组中函数的异同,并说明理由.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+3}$ 与 $g(x)=x+1$;　(2) $f(x)=\lg x^3$ 与 $g(x)=3\lg x$;

(3) $f(x)=\lg x^{10}$ 与 $g(x)=10\lg x$;　(4) $f(x)=\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{1}{x}$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{x^2-5x}$.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y = \dfrac{x^2}{1+x}$；　　(2) $y = \sqrt{3x - x^3}$；

(3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$；　　(4) $y = \sqrt{\lg(x-2)}$；

(5) $y = \sqrt{x-2} + \dfrac{1}{x-3} + \lg(5-x)$；　　(6) $y = \arcsin\dfrac{x^2+1}{5}$.

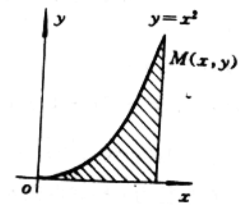


图 1—8

4. 若 $f(0) = -2, f(3) = 5$，求线性函数 $f(x) = ax + b$；$f(1)$ 及 $f(2)$ 等于什么？

5. 试作函数 $y = f(x) = \begin{cases} 3x, & |x| > 1; \\ x^3, & |x| < 1; \\ 3, & |x| = 1 \end{cases}$ 的图象. 并求 $f(\frac{1}{2})$；$f(1)$；$f(-\frac{1}{3})$；$f(-2)$；$f(a)$.

6. 设函数　$f(x) = \begin{cases} 2+x, & x \leqslant 0; \\ 2^x, & x > 0. \end{cases}$

求：(1) $f(-3)$；$f(0)$；$f(1)$.　(2) $f(\Delta x) - f(0)$；$f(-\Delta x) - f(0)$　$(\Delta x > 0)$.

7. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y = x^2 - x^4$；　(2) $y = x^2(3-x)$；　(3) $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$；

(4) $y = x(x-1)(x+1)$；　(5) $y = \sin x - \cos x + 1$；　(6) $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$.

8. 设所考虑的函数都是定义在 $(-l, l)$ 内，证明：

(1) 两个偶函数之和是偶函数；两个奇函数之和是奇函数.

(2) 两个偶函数之积是偶函数；两个奇函数之积是偶函数. 奇函数与偶之积是奇函数.

(3) $f(x)$ 一定可以分解成奇函数与偶函数之和.

(提示：考虑函数 $f_1(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ 和 $f_2(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$)

9. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y = x^3, (-1, 1)$；　(2) $y = \lg x$,　$(0, +\infty)$；　(3) $y = \cos x, (0, \frac{\pi}{2})$.

10. 求下列函数的反函数：

(1) $y = 2^x + 1$；　(2) $y = \dfrac{1+x}{1-x}$；　(3) $y = 1 + \log_a(x+3)$　$(a > 0, a \neq 1)$；

(4) $y = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1; \\ x^2, & 1 \leqslant x \leqslant 4; \\ 2^x, & 4 < x < +\infty. \end{cases}$

11. 设 $F(x) = e^x$，证明：

(1) $F(x) \cdot F(y) = F(x+y)$；　(2) $\dfrac{F(x)}{F(y)} = F(x-y)$.

12. 求作下列函数的图象：

(1) $y = \sin 3x$；　(2) $y = \dfrac{1}{2}\sin 3x$；　(3) $y = \sin\dfrac{x}{3}$；

(4) $y = 3\sin(3x+2)$；　(5) $y = 1 - \cos x$.

13. 设 $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$，求 $f(x)$.

14. 设 $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

15. 设 $\varphi(x) = x^2, \psi(x) = 2^x$，求 $\varphi[\varphi(x)]$，$\psi[\psi(x)]$、$\varphi[\psi(x)]$ 及 $\psi[\varphi(x)]$.

16. 设函数 $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(0)$、$f(-x)$、$f(x+1)$、$f(x)+1$、$f(\frac{1}{x})$、$\dfrac{1}{f(x)}$ 及 $f(f(x))$.

17. 已知 $y = \sqrt{1+u^2}$、$u = \sin V$、$V = \lg x$，试将 y 表示为 x 的函数.

18. 已知 $y = u^2, u = \sin x$，求 $x_1 = \frac{\pi}{6}$、$x_2 = \frac{\pi}{3}$ 时的复合函数 y 的值.

19. 指出下列函数的复合过程：

(1) $y = \cos 5x$;　　(2) $y = \cos^5 x$;

(3) $y = (2x+3)^{100}$;　　(4) $y = A\sin^2(\omega x + \varphi)$;

(5) $y = 4x^3 - 6x + 5 + e^{-x}$;　　(6) $y = \sin\sqrt{1+x^2}$;

(7) $y = \lg(\operatorname{arctg}\sqrt{Hx^2})$;　　(8) $y = \sqrt{4x - x^2} + 4\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

20. 在半径为 r 的球内嵌入一内接圆柱，试将圆柱的体积表示为其高的函数. 并确定此函数的定义域.

21. 半径为 R 中心角为 α 的扇形，做成一个无底的正圆锥体，试将这圆锥体体积 V 表示为 α 的函数.

22. 设火车从甲站出发，以 0.5 公里 / 分^{2}的加速度前进，经过 2 分钟以后匀速行驶，再经过 7 分钟后以 0.5 公里 / 分^{2}匀减速到达乙站. 试将火车在这段时间内的速度及所走的路程表示为时间的函数并作出其图象.

第二节　极限的概念

在上节中，我们研究了变量与变量之间的函数关系，从现在起，我们将进一步研究当自变量按某种方式变化时函数随之而变的变化趋势，从而建立极限的概念. 在讨论函数的极限之前，先讨论它的特殊情形 —— 数列的极限.

一、数列的极限

数列是指自变量为正整数 n 的函数，记为 $x_n = f(n)$，又称之为整标函数. 当自变量 n 依次取 1,2,3,… 时，对应的函数值就排成数列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots.$$

简记为 $\{x_n\}$，数列中每一个数称为数列的项，第 n 项 x_n 称为数列的一般项(或通项).

例 1　$\{\frac{1}{n}\}$ 即表示数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \frac{1}{n}, \cdots$;

例 2　$\{\frac{n+(-1)^n}{n}\}$ 即表示数列 $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \cdots \frac{n+(-1)^n}{n}, \cdots$;

例 3　$3, 5, 7, \cdots 2n+1, \cdots$ 则可简记为 $\{2n+1\}$;

例 4　$1, 0, 1, 0, \cdots$ 则可简记为 $\{\frac{1-(-1)^n}{2}\}$.

对于数列 $\{x_n\}$，我们所关心的是数列的变化趋势问题. 由上述几个例子可以看出，当 n 无限变大时，x_n 有着各自不同的变化趋势. 例 1 中的 x_n 无限接近于 0；例 2 中的 x_n 无限接近于 1. 它们中的 x_n 的变化趋势有一共同的特点，就是当 n 无限变大时，x_n 各自都无限接近于一个确定的常数. 而例 3 与例 4 中的 x_n 则不能无限接近于某一确定的常数.

对于数列 $\{x_n\}$，如果随着项数 n 的无限变大，数列中的项 x_n 在变化过程中将与某常数 A 无限接近，则称 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad 或 \quad x_n \to a(n \to \infty).$$

例如，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$;　$\lim\limits_{n\to\infty}[1 + (-1)^n \frac{1}{n}] = 1$.

上面所给数列的极限定义，只是一种直观的定义. 究竟如何理解 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$？数 A 与数列 x_n 之间的本质联系是什么呢？如何从定量的角度给出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 的严格定义？

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 是指当 n 无限变大时，x_n 可以无限地接近 A. 换句话说，只要 n 足够地大，x_n 就可以与 A 接近到任意的程度. 这种任意接近，我们可以用 $|x_n - A|$ 来表示，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 即指只要