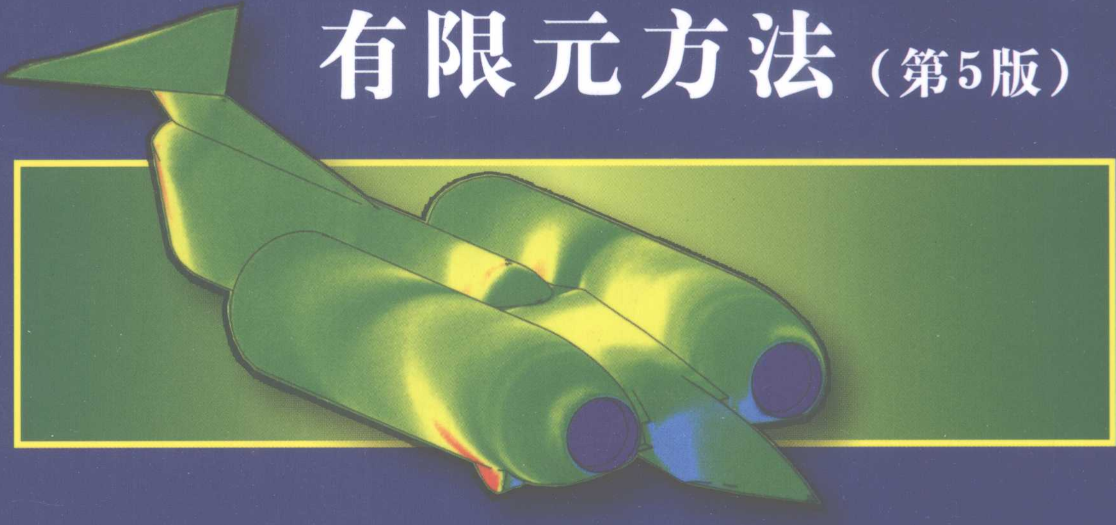
The Finite Element Method 5th ed

有限元方法（第5版）



第3卷

Volume 3

流体动力学

Fluid Dynamics

(英) O. C. Zienkiewicz (美) R. L. Taylor 著

符松 刘扬扬 译

清华大学出版社

The Finite Element Method 5th ed

有限元方法（第5版）

第 3 卷

Volume 3

流体动力学

Fluid Dynamics

(英) O. C. Zienkiewicz (美) R. L. Taylor 著

符松 刘扬扬 译

清华大学出版社

北京

内容简介

《有限元方法》一书涵盖了有限元的基本方法，以及这一方法在固体和结构力学、流体动力学问题中的应用。第1卷完整地介绍了有限元方法的基础知识，适于本科生、研究生以及专业工程师学习。第2卷集中介绍了有限元方法在非线性固体和结构力学中的应用，适合这一领域内的研究生和专业工程师阅读。本书为其第3卷，面向有一定流体力学基础的读者，集中介绍有限元方法在流动数值模拟中的应用。尽管本卷是与第1卷配套出版的，但对于通过其他途径学习有限元方法的读者，也适于单独阅读。

内容包括：特征分裂方法，这是一种统一算法，应用于亚音速、超音速和高超音速流动；特征Galerkin方法的最新研究进展；处理超音速和高超音速问题的最新方法；解决自由表面问题中的最新进展；研究周期短波问题的新方法；计算机程序可在 www.bh.com/companions/fem 下载。

O. C. Zienkiewicz & R. L. Taylor
The Finite Element Method(Fifth Edition) Volume 3: Fluid Dynamics
EISBN: 0-7506-5050-8

Copyright © 2000, by O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. All rights reserved.

This edition of Finite Element Method Set 5th Edition by O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor is published by arrangement with Elsevier Ltd, The Boulevard, Langford Lane, Kidlington, OX15 1GB, England.

Authorized Simplified Chinese translation edition is published by Tsinghua University Press.
本书中文简体翻译版由爱思唯尔出版集团授权清华大学出版社出版。

北京市版权局著作权合同登记号　图字：01-2003-7181

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989　13701121933

图书在版编目(CIP)数据

有限元方法：第5版．第3卷，流体动力学/(英)监凯维奇(Zienkiewicz, O. C.)，(美)泰勒(Taylor, R. L.)著；符松，刘扬扬译．—北京：清华大学出版社，2008.10
书名原文：The Finite Element Method(Fifth Edition) Volume 3: Fluid Dynamics
ISBN 978-7-302-16721-1

Ⅰ. 有…　Ⅱ. ①监…　②泰…　③符…　④刘…　Ⅲ. ①有限元法　②流体动力学　Ⅳ. O241.82　O351.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第205338号

责任编辑：杨　倩　赵从棉
责任校对：赵丽敏
责任印制：杨　艳
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京市昌平环球印刷厂
经　销：全国新华书店
开　本：170×230　**印　张**：18.5　**插　页**：2　**字　数**：351千字
版　次：2008年10月第1版　**印　次**：2008年10月第1次印刷
印　数：1～3000
定　价：38.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177转3103　　产品编号：013363—01

译者前言

有限元方法发展至今已近成熟，是固体力学问题数值求解的主要方法，在流体力学问题中的应用虽晚了一些，但也已经十分广泛。但是，在国内的计算流体力学界，有限元方法的研究和应用则比较有限，至今甚至难于找到一本流体有限元方面的专著或教科书，与国外差距较大。正因如此，当出版社希望我们翻译此书时，我们欣然承诺了。

当然，翻译此书的另一个重要原因是，该书是有限元方法的泰斗靳科维奇教授及其大弟子泰勒教授《有限元方法》专著中的第 3 卷：流体动力学。第 1 卷介绍有限元方法基础，第 2 卷介绍有限元方法在固体和结构力学问题中的发展与应用。该书是有限元方法的经典和权威之作，从 1967 年第 1 版起，至今已是第 5 版。

但是，流体力学内容是在第 5 版中第一次独立成卷的。尽管该卷出版于 2000 年，至今略有些年头，但作为流体动力学中的有限元方法，对其基本思想、方法构造、流动问题建模等作系统介绍仍是十分必要和有意义的。

实际上，该书告诉读者的并不仅仅局限于基本理论与方法，而是展示了有限元方法在众多复杂流动甚至跨学科问题中的成功发展和应用。该书讨论的计算流体力学方法因此不仅有传统的对流一扩散方程，也有特征分裂方法；研究和应用的问题则有：不可压流动、自由界面流、浮力流、湍流、可压缩高速流、浅水波问题、波，等等。在波这一章，作者并没有仅仅局限于传统的水波问题，也包括声波和电磁波的数值计算，内容至今仍然十分新颖。

然而，尽管我们认为这是一本十分优秀的计算流体力学方面的有限元方法专著，由于水平所限，翻译中难免有误，敬请读者不吝赐教。

译　者

2007 年 9 月

前　言

本卷是第一次单独出版。尽管其中一部分内容是从第 4 版第 2 卷中分离出来的，但就整体而言，是全新的工作。本卷的出版，目的在于将有限元方法在流体力学中的公式和应用从固体力学中分离出来，这可能导致一个不同研究领域的出现。

尽管第 1 卷（基础知识）中介绍的是一般有限元方法，但却主要是以弹性固体为例讲解的，仅有很少的算例是应用到诸如热传导、多孔介质流和势场问题。之所以如此，是因为上述的问题都是自伴随的，而对于自伴随问题，Galerkin 方法是最优的。对于大多数流体力学问题，因为是**对流主导的问题**，Galerkin 方法不再是最优的。

本卷将第 1 卷中所介绍的有限元方法用于流体力学中，将原方法进行了扩展，从而可以求解非自伴随的对流问题，而这正是流体力学问题的基础。

本书的目的就是希望将熟悉一般有限元方法的研究人员引入流体力学领域，本卷因而可独立成书。然而，读者可能对第 1 卷中的许多一般有限元方法不够熟悉，因而我们建议读者在阅读本卷时，结合第 1 卷，将其作为参考。

在流体力学问题中，有以下几个难点：①首先是处理不可压或近似不可压情况。我们知道，即使是在固体中，这也会带来困难。②其次，也是更加重要的，由于对流项所需进行的特殊处理和其对稳定性的要求带来了更多的问题，特别对于可压缩高速气动问题而言，可以采用不同的有限元方法，对于流动不同范围，也有不同的算法。尽管蠕流问题可利用与固体力学中相同的有限元方法求解，但超音速和高超音速流动却需要特殊的处理方法。本卷中，我们会介绍作者几年前发展的所谓**特征分裂的算法**（CBS）。从计算结果来看，这一方法可应用于所有流动范围，并且给出了至少与其他求解方法相当的计算结果。因此，我们在第 3 章中，将着重对其发展进行介绍，并详细地对离散过程进行讲解。

我们希望，本书能够对引领读者进入流体力学研究领域有所帮助。同时，我们更加希望，本书对那些也许会发现新的研究领域和实际应用的，有经验的计算流体

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

力学(CFD)研究人员们有所帮助。

致谢

在此,感谢 Peter Bettess 教授在关于波的章节(第 8 章)中给予的巨大帮助。感谢 Pablo Ortiz 博士同本书第一作者一起,首次将 CBS 算法应用于浅水方程中。感谢 Eugenio Oñate 教授在不可压流动章节(第 5 章)中加入自由表面流问题,并且成功地将 CBS 方法应用于船舶水动力学。同样感谢 J. Tinsley Oden 教授对非连续 Galerkin 方法给出了简短描述。感谢 Ramon Codina 教授参与到近期工作中。还要感谢 Drs Joanna Szmelter 和 Jie Wu,他们的早期工作推动了 CBS 算法的最后成形。

在 CFD 应用中,将有限元法引入高速对流主导流动中,是由 Swansea 的 Ken Morgan 教授领导的研究小组最先成功完成的。他以前的学生包括了 Rainald Löhner 教授、Jaime Peraire 教授,以及许多其他的教授,他们的工作都经常被引用。我们非常感谢 Nigel Weatherill 教授和 Oubay Hassan 博士,他们对书中的表格、彩图,特别是本书的封面都做出了很大贡献。CBS 算法近期的成果都是由第一作者在 NASA(Grant NAGW/2127, Ames Control Number 90-144)资助下完成的。非常感谢 Kajal K. Gupta 博士给予我们的巨大的支持、鼓励和帮助。

最后,第一作者(O. C. Zienkiewicz)要特别感谢几年来一起开发 CBS 算法,并且对完成本书给予了许多帮助的 Perumal Nithiarasu 博士。

O. C. Zienkiewicz
R. L. Taylor

目 录

译者前言 ········ Ⅰ
前言 ········ Ⅲ

1 引文及流体动力学方程 ········ 1

1.1 本书所涉及流体力学问题的概述与分类 ········ 1
1.2 流体力学控制方程 ········ 3
1.3 不可压缩(或近似不可压缩)流动 ········ 9
1.4 本章小结 ········ 11
参考文献 ········ 11

2 对流主导问题：对流-扩散方程的有限单元近似 ········ 12

2.1 引言 ········ 12
2.2 一维定常问题 ········ 14
2.3 二维(或三维)定常问题 ········ 23
2.4 定常问题——结论 ········ 27
2.5 瞬态介绍 ········ 28
2.6 基于特征线的方法 ········ 30
2.7 标量变量的 Taylor-Galerkin 方法 ········ 40
2.8 定常条件 ········ 41
2.9 非线性波和激波 ········ 41
2.10 向量变量 ········ 44
2.11 总结和结论 ········ 50
参考文献 ········ 51

3 可压缩和不可压缩流动的一般方法——特征分裂方法 …… 56

3.1 前言 …… 56
3.2 特征分裂方法(CBS) …… 59
3.3 显式、半隐式和近似隐式格式 …… 67
3.4 “避免”Babuska-Brezzi(BB)约束 …… 69
3.5 单步格式 …… 71
3.6 边界条件 …… 72
3.7 无粘问题的两步和单步算法 …… 75
3.8 结论 …… 77
参考文献 …… 77

4 不可压缩层流——牛顿和非牛顿流体 …… 81

4.1 引言和基本方程 …… 81
4.2 无粘不可压缩流动(有势流) …… 83
4.3 不可压缩流动和近似不可压缩流动的 CBS 算法 …… 85
4.4 边界出口条件 …… 91
4.5 自适应网格加密 …… 92
4.6 为瞬时问题生成的自适应网格 …… 98
4.7 稳定对流项的重要性 …… 99
4.8 蠕流——混合和罚函数 …… 100
4.9 非牛顿流体——金属与聚合体成形 …… 102
4.10 求解瞬态金属成形问题的直接位移法 …… 112
4.11 总结 …… 114
参考文献 …… 114

5 自由表面,浮力和不可压缩湍流 …… 123

5.1 前言 …… 123
5.2 自由表面流动 …… 124
5.3 浮力驱动的流动 …… 131
5.4 湍流 …… 138
参考文献 …… 141

6 可压缩高速气体流动 …………………………………………………… 145

6.1 引言………………………………………………………………… 145
6.2 控制方程…………………………………………………………… 146
6.3 边界条件——亚音速和超音速流动……………………………… 147
6.4 数值近似和 CBS 算法 …………………………………………… 149
6.5 激波捕捉…………………………………………………………… 149
6.6 Euler 方程的一些简单例子 ……………………………………… 152
6.7 自适应加密和 Euler 问题中的激波捕捉 ………………………… 154
6.8 定常中的三维非粘性示例………………………………………… 161
6.9 二维和三维的瞬时问题…………………………………………… 165
6.10 二维粘性问题 …………………………………………………… 167
6.11 三维粘性问题 …………………………………………………… 174
6.12 边界层——无粘 Euler 解的耦合 ……………………………… 177
6.13 总结 ……………………………………………………………… 177
参考文献 ……………………………………………………………… 178

7 浅水流问题 …………………………………………………………… 184

7.1 引言………………………………………………………………… 184
7.2 浅水流方程的基础………………………………………………… 185
7.3 数值近似…………………………………………………………… 189
7.4 应用实例…………………………………………………………… 190
7.5 干燥区域…………………………………………………………… 199
7.6 浅水输运…………………………………………………………… 199
参考文献 ……………………………………………………………… 201

8 波 ……………………………………………………………………… 204

8.1 引言与方程………………………………………………………… 204
8.2 闭区域内的波——有限元模拟…………………………………… 205
8.3 模拟表面波的难点………………………………………………… 206
8.4 底部摩擦和其他影响……………………………………………… 207
8.5 短波问题…………………………………………………………… 207
8.6 无界区域内的波(外表面波动问题)……………………………… 211
8.7 无界问题…………………………………………………………… 213

8.8 边界阻尼 …… 214
8.9 与到外问题求解的连接 …… 215
8.10 无限元 …… 219
8.11 映射周期无限元 …… 219
8.12 Burnett 和 Holford 椭圆形无限元 …… 221
8.13 波包无限元 …… 222
8.14 无限元的精度 …… 223
8.15 瞬态问题 …… 224
8.16 表面波的三维效应 …… 225
参考文献 …… 228

9 用计算机实现 CBS 算法 …… 233

9.1 引言 …… 233
9.2 数据输入模块 …… 234
9.3 求解模块 …… 237
9.4 输出模块 …… 247
9.5 CBS 流动程序可能的扩展 …… 248
参考文献 …… 248

附录 A Navier-Stokes 方程的非守恒形式 …… 250

附录 B 求解对流-扩散方程的非连续 Galerkin 方法 …… 251

附录 C 基于边界的有限元公式 …… 255

附录 D 多重网格 …… 257

附录 E 边界层-无粘流耦合 …… 259

索引 …… 262

1

引文及流体动力学方程

1.1 本书所涉及流体力学问题的概述与分类

固体与流体问题在许多方面是相似的。在这两种介质中，应力的出现都导致位移的产生。但是，它们之间存在的主要区别在于：流体静止时不能承受任何偏应力。此时，流体只能承受压力或者正应力。我们知道，在固体介质中，还可以存在其他的应力，且固体材料通常能够承受结构力。

除了压力以外，流体运动时，也会产生偏应力，且流体运动是流体动力学研究的主要内容，因此，我们将集中讨论位移连续变化的问题和流动主要特征为速度的问题。此时，流动产生的偏应力与剪切模量非常类似。

基于这一点，流体流动的控制方程与固体力学的控制方程基本相似，只是用速度矢量 $\boldsymbol{u}$ 代替了前面我们用同样符号表示的位移。但是，除此之外还有一个不同，那就是即使流动是定常的(稳态)，也会产生对流加速度。这一对流加速度项使得流体力学方程组非自伴随。因此，在大多数情况下，对于控制方程的处理方法与固体力学方程有一些不同，除非由于速度非常小，对流加速度可以忽略。读者应该记得对于自伴随形式，由伽辽金方法推导的近似方程给出了能量范数的最小误差，可以说是最佳的。但在流体力学中则不然，相似之处仅在缓慢流动(蠕流)时。

流动的流体总是需要保持质量守恒，除非流体是高度可压缩的，否则速度矢量的散度为零。我们已经在第 1 卷关于弹性力学问题中处理过类似问题，并且给出了不可压缩约束导致公式表达非常困难(第 1 卷第 12 章)。在流体力学中也有同样的难题，对所有流体力学的近似，即使有可压缩性时，不可压缩极限也应能模拟。这使得许多单元不能再使用。

本书将向读者介绍利用有限元方法如何解决流体力学各种问题。许多流体力学研究都采用有限差分方法，近来更多地采用从其中独立出的有限体积方法。新兴的有限元方法和已成熟的有限差分方法之间的竞争已显而易见，并且由于这一竞争，有限元方法在流体力学领域比在固体力学领域更难让人接受。原因很简单，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

对于固体力学问题或者结构问题，只在特殊情况下才需要对连续介质进行处理。工程师们经常处理的是由条状单元组成的结构，而不涉及连续问题。因此，他们只是最近才对连续问题产生兴趣。在流体力学中，几乎所有流动问题都要求在二维或三维求解，并且通常需要进行近似。这就说明了为什么有限差分方法早于有限元方法，在 20 世纪 50 年代就得到了应用。但是，正如我们在第 1 卷中指出的一样，使用有限元方法有许多优点。这一方法不但允许对完全非结构区域和任意区域进行划分，同时还提供了一种解决自伴随问题的近似方法，这种近似方法优于，至少等同于有限差分方法所提供的近似方法。

介于两者之间的是有限体积法，它最初是从有限差分方法中独立出来的。在第 1 卷中我们已经介绍了其基本就是有限元方法的另一种形式，只是在其中使用到了子域配点。我们没有看到使用这种近似的优越性，但是有一点吸引研究人员的是，使用有限体积法能使每一个单元都满足守恒条件。有限元方法并没有这个特点，所有守恒条件只能在单元集中的区域得到满足。但是，如果要得到一般近似，没有这一特点并非是缺陷。

本书将要讨论的各类问题，每一类的数值求解方法都有其自身特点。首先，从不可压缩流动开始，体积的变化只与弹性以及瞬时的压力变化相关(第 4 章)。对于这种流动，必须应用完全的不可压缩约束。

接下来，对于蠕流，对流加速度效应通常是可以忽略的，所以利用弹性力学里已有的程序就可以求解。这的确是有限元开发者首次在流体力学领域尝试将结构力学知识直接搬到流体力学中的成果。所谓的线性 Stokes 流动就是一个特例，这是一个完全不可压缩但却有弹性的问题。其中一个特殊的派生问题，就是金属成形问题中材料不能再用恒定的粘性系数来描述，而应该用一个非牛顿的、依赖于应变率的粘性系数来表示。在这里，流体问题(流动公式)可以直接应用于金属或塑料的成形，我们将在第 4 章的后面讨论这个问题。尽管如此，即使在不可压缩流动中，速度逐渐增大，对流项将逐渐变得重要。通常来说稳态流情况是不存在的，至少说是很不稳定的，这就引导我们去研究诸如涡脱落等问题，这也将在该章中进行讨论。

关于湍流本身的话题是非常庞大的，已有大量的研究。我们将在第 5 章中对其进行简单的讨论：可以说在湍流问题中，可能需要用到各种模式，导致流动粘性与流动相关。在这一章中同时将要处理自由表面的不可压缩流问题及其他重力影响的流动。我们将作必要修正，使诸如船体、潜水艇等的附近表面扰动问题得以解决。

流体力学中很多实际问题是可压缩效应明显的气相流。可压缩性问题是相关的，遵守关于压力、温度和密度的气体定律。此时，有必要将能量方程添加到系统中来控制流动，用来预估温度。这样的能量方程当然也能用于不可压缩流动，但其与流体动力学只有微弱的联系，甚至完全没有联系。

在可压缩流动中，并不是所有方程之间的联系都那么紧密。流速可能超过声速，因此可能导致声波的出现。这是空气动力学研究的重要课题，我们将用整个第 6 章的内容来讨论这一特殊问题。

在实际流动中粘性总是存在的，但对于高速流动，粘性作用被限制在固体表面很窄的区域内(边界层)。在这种情况下，其余的流体可以认为是无粘的。这样我们就可以回到理想流体的假设。在这一假设下，没有粘性作用，且又可能有各种简化。

其中一种简化形式即势流，我们将在第 4 章中提到。在第 1 卷中我们已经处理了某些情况下的势流问题，这并不困难。但不幸的是，那些解答很难扩展到实际问题中来。

流体力学领域第三个主要兴趣所在点为发生在海湾或者其他深度尺度远小于水平尺度的浅水流。第 7 章将要处理这一问题，从本质上来说，压力在垂直方向的分布基本是静水压力。

对于浅水流问题，自由表面同样会出现，并且将决定流动的性质。

在自由表面处，有可能会有瞬时现象出现而产生波，比如发生在海洋和其他水体里。我们将用本书的一章(第 8 章)来处理这一流体力学特殊现象。这样的波现象同样是其他物理问题中的典型问题，在第 1 卷中已经包含了声波的内容，在这里我们将看到对于水波表面问题的处理方法也非常类似。对于其他的波比如将再次提到的电磁波，本卷第 8 章中建议的解法可能会有助于依次解决这些问题。

在其余的章节我们将要介绍普通的适用于大多数可压缩和不可压缩流动的流体动力学方程组，并介绍如何对上述的每一类问题进行特定的简化。但是，在实施第 3 章推荐的离散过程前，我们必须介绍对流项和扩散项同时出现的处理办法。我们将在第 2 章中介绍典型的对流-扩散方程。第 3 章将介绍通用的适合于求解大多数本书遇到的流体力学问题的算法。就像我们已经提到过的一样，现在有许多可以解决问题的算法，通常情况下不同的应用领域需要专门的算法。但是第 3 章将要介绍的通用算法能够得到至少可与更专业的方法媲美的结果。为使整个文章比较统一，我们将不再提及其他的算法，或者只是顺便提到它们而不再为此声明。

1.2 流体力学控制方程

1.2.1 流体中的应力

流体的本质特征是其不能在静止时承受剪应力，而只能承受静应力或压力。因此，任何分析必须集中于运动，其最本质的独立变量是速度 $\boldsymbol{u}$，或者我们采用下

标符号(类似 $x_i, i=1,2,3$ 表示 x,y,z 轴)表示:

$$u_i, \quad i = 1,2,3 \tag{1.1}$$

这就替代了固体力学中最主要的位移变量。

因此,应变率成为总应力 σ_{ij} 的主要成因,且其定义方法与无穷小应变类似:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i}{2} \tag{1.2}$$

这是著名的应变率的张量表示法,但为了以后变量形式的使用,通常在有限元分析中写作矢量形式更为方便。关于这一矩阵形式的详细内容已经在第 1 卷中给出,为了更加完整,我们在此处将再次提到。应变率写作矢量形式($\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$)。这一矢量由以下形式给出:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}} = [\dot{\varepsilon}_{11}, \dot{\varepsilon}_{22}, 2\dot{\varepsilon}_{12}] = [\dot{\varepsilon}_{11}, \dot{\varepsilon}_{22}, \dot{\gamma}_{12}] \tag{1.3}$$

三维的情况与二维类似:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{T}} = [\dot{\varepsilon}_{11}, \dot{\varepsilon}_{22}, \dot{\varepsilon}_{33}, 2\dot{\varepsilon}_{12}, 2\dot{\varepsilon}_{23}, 2\dot{\varepsilon}_{31}] \tag{1.4}$$

使用矢量形式时,可以将应变率写为如下形式:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{Su} \tag{1.5}$$

其中 $\boldsymbol{S}$ 为应变,$\boldsymbol{u}$ 为式(1.1)中给定的速度。

线性(牛顿)各向同性流体的应力应变关系需要定义两个常数。

第一个是偏应力 τ_{ij} 与偏应变率之间的关系:

$$\tau_{ij} \equiv \sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{\sigma_{kk}}{3} = 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \delta_{ij}\frac{\dot{\varepsilon}_{kk}}{3}\right) \tag{1.6}$$

在上面方程中,括号中的量为偏应力,δ_{ij} 为单位张量(Kronecker delta),重复下标表示总和,因此

$$\sigma_{ii} \equiv \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad \dot{\varepsilon}_{ii} \equiv \dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33} \tag{1.7}$$

系数 μ 为动力(剪切)粘性系数或者简单的粘性系数,与线弹性力学中的剪切模量 G 相似。

第二个是关于平均应力变化和体积应变率的。压力定义为

$$p = \frac{\sigma_{ii}}{3} = -\kappa\dot{\varepsilon}_{ii} + p_0 \tag{1.8}$$

其中 κ 为**体积粘性**系数,与线弹性力学中的体积弹性模量 K 相似;p_0 为与应变率无关的初始静压(注意当被压缩时,总是定义 p 与 p_0 为正)。

我们马上就可以根据方程(1.6)和方程(1.8)写出流体的本构关系

$$\sigma_{ij} = 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{kk}}{3}\right) + \delta_{ij}\kappa\dot{\varepsilon}_{kk} - \delta_{ij}p_0 = \tau_{ij} - \delta_{ij}p \tag{1.9a}$$

或者

$$\sigma_{ij} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij} + \delta_{ij}\left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right)\dot{\varepsilon}_{kk} + \delta_{ij}p_0 \tag{1.9b}$$

传统上通常会引入拉梅(Lame)算子,令

$$\kappa - \frac{2}{3}\mu \equiv \lambda \tag{1.10}$$

但是这并不值得推荐,关系式(1.9a)才是基本的。没有证据证明体积粘性系数的存在,因而我们给出

$$\kappa\dot{\varepsilon}_{ii} \equiv 0 \tag{1.11}$$

下面,我们给出了基本的本构关系(略去下标)

$$\sigma_{ij} = 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{kk}}{3}\right) - \delta_{ij}p \equiv \tau_{ij} - \delta_{ij}p \tag{1.12a}$$

不考虑不可压缩性 $\dot{\varepsilon}_{ii} \equiv 0$。上式中

$$\tau_{ij} = 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{kk}}{3}\right) = \mu\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \delta_{ij}\ \frac{2}{3}\ \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right] \tag{1.12b}$$

上面所有的关系都类似于弹性力学中的关系,稍后我们将再回到不可压缩流动。在第 1 卷的第 12 章中,已经提到过不可压缩问题的各种稳定性问题。

一些流动的非线性问题,是由依赖于应变率的系数 μ 来描述的。我们称这些流动为非牛顿流体。

1.2.2　质量守恒

如果 ρ 是流体密度,那么质量流 ρu_i 流进和流出一个无限小控制体积(图 1.1)的差额等于密度变化率①

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla^{\mathrm{T}}(\rho \boldsymbol{u}) = 0 \tag{1.13a}$$

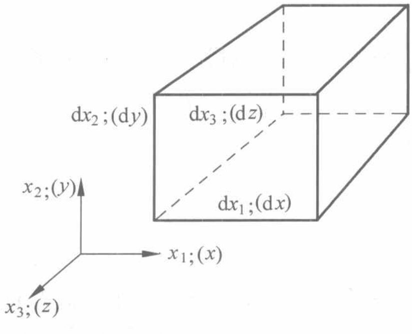


图 1.1　坐标方向与无限小控制体积

① 本书的英文符号基本以原著为准,只是将其中黑正体的英文改为黑斜体。

或者在传统的笛卡儿坐标系下写作

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)=0 \tag{1.13b}$$

1.2.3 动量守恒或动态平衡

对于 j 方向的动量平衡，流出和流进控制体的$(\rho u_j)u_i$，必须与应力 σ_{ij} 和体力 ρf_j 相等，典型的分量方程为

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}[(\rho u_j)u_i]-\frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_{ij})-\rho f_j=0 \tag{1.14}$$

或者利用式(1.12a)可得

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}[(\rho u_j)u_i]-\frac{\partial(\tau_{ij})}{\partial x_i}+\frac{\partial p}{\partial x_j}-\rho f_j=0 \tag{1.15a}$$

同样地，上式可以被写作笛卡儿坐标下的三个分量方程形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho uv)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho uw)-\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}-\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}-\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial x}-\rho f_x=0 \tag{1.15b}$$

等等。

1.2.4 能量守恒和状态方程

我们注意到，在 1.2.2 节和 1.2.3 节的方程中，独立变量为 u_i（速度），p（压力）和 ρ（密度）。当然，由方程(1.12b)定义的偏应力可由速度表达，因而不是独立的。

显然，未知数个数多于方程个数。但是，如果假设密度为常数（在不可压缩流动中）或者如果可以建立一个关于压力和密度的关系式（在绝热的微可压缩流动中），则方程完整可解。

更一般的，压力(p)，密度(ρ)和绝对温度(T)的关系由状态方程形式表达：

$$\rho=\rho(p,T) \tag{1.16}$$

比如说，对于理想气体，即有

$$\rho=\frac{p}{RT} \tag{1.17}$$

其中 R 为普适气体常数。

在一般情况下，需要将能量守恒方程补充到控制方程中。即使这个方程与控制方程毫无关联也是有意义的，因为它提供了系统特征的一些附加信息。

在引入能量方程之前，必须定义一些变量。首先我们引入单位质量的内能 e，它依赖于流体的状态，也就是压力和温度，可写作

$$e = e(T, p) \tag{1.18}$$

其次引入单位质量的总能量 E 包含单位质量的动能为

$$E = e + \frac{u_i u_i}{2} \tag{1.19}$$

最后，我们可以定义焓

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad 或 \quad H = h + \frac{u_i u_i}{2} = E + \frac{p}{\rho} \tag{1.20}$$

这一变量更方便使用。

能量传递将伴随对流和传导而发生(辐射一般被限制在边界上)。这一热传导通量定义为

$$q_i = -k \frac{\partial}{\partial x_i} T \tag{1.21}$$

其中 k 为各向同性热传导率。

为了使关系式完善，需定义热源项。其可以由化学反应(如果有的话)定义为单位体积热源 q_H，且由于内应力存在，必须包含能量耗散，也就是说，利用方程(1.12)，有

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_{ij} u_j) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij} u_j) - \frac{\partial}{\partial x_j}(p u_j) \tag{1.22}$$

单位体积中能量的平衡可以写为方程

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(p u_i E) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}(p u_i) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij} u_j) - \rho f_i u_i - q_H = 0 \tag{1.23a}$$

或者写为更简单的形式

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i H) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij} u_j) - \rho f_i u_i - q_H = 0 \tag{1.23b}$$

式中，倒数第二项代表体积力所做功。

1.2.5 Navier-Stokes 和 Euler 方程

前面所述的控制方程可以写为统一的守恒形式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{F} + \nabla \boldsymbol{G} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0} \tag{1.24a}$$

或者

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \boldsymbol{G}_i}{\partial x_i} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0} \tag{1.24b}$$

方程(1.13)，(1.15)或者(1.23)分别提供了不同的矢量形式。

因此，同时利用指标符号和笛卡儿符号，可以得到未知独立量的矢量形式，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com