

**A Course
in Mathematical Analysis
Volume 3**

数学分析教程

第三册

常庚哲 史济怀

江 苏 教 育 出 版 社

Chang Gengzhe Shi Jihuai



Jiangsu Education Publishing House

封面设计：刘小地

ISBN 7-5343-3479-9



9 787534 334795 >

ISBN 7-5343-3479-9

G · 3164 定价：11.00 元



数学分析教程

第三册

常庚哲 史济怀

A Course in Mathematical Analysis

Volume 3

Chang Gengzhe Shi Jihuai



江苏教育出版社
Jiangsu Education Publishing House

数学分析教程

第三册

常庚哲 史济怀

责任编辑 王巧林

出版发行：江苏教育出版社

(南京马家街 31 号，邮政编码：210009)

经 销：江苏省新华书店

照 排：南京展望照排印刷有限公司

印 刷：淮阴新华印刷厂

(淮阴市淮海北路 44 号，邮政编码：223001)

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 9.125 插页 4 字数 222 700

1999 年 3 月第 1 版 1999 年 4 月第 2 次印刷

印数 1 101—2 530 册

ISBN 7-5343-3479-9

G·3164

定价：11.00 元

江苏教育版图书若有印刷装订错误，可向承印厂调换

序 言

“数学分析”究竟应该包括哪些内容,从西方和东欧各国名为《数学分析》的书籍来看,一直没有十分明确的定义.但是在我国,它作为大学数学系的一门课程的名称,通常包含一元和多元微分学和积分学,以及与之相关的内容.从它的地位和作用,从所占用的学时数来看,说它是数学系最重要的基础课,是当之无愧的.

微积分已有三百多年的历史,经过跨越好几个世纪的数学巨匠们的精雕细琢,千锤百炼,已经形成了一个完整的、精密的庞大知识宝库.随着时代的进步和科学技术的发展,传统数学分析教材的内容显得比较陈旧,只有极少数的几处(例如 Bernstein 多项式)涉及到 20 世纪初的发现.今天,当 21 世纪的朝阳喷薄欲出的时候,这种反差更加强烈,改革数学分析教材的必要性日益显露出来了.在有些新出版的数学分析教科书中,引入了拓扑空间、微分流形,这是朝“现代化”方向走的一种试验.我们的想法则是在保持原有理论水平的基础上,着重于加强数学分析同现代应用数学的其他分支学科的联系.这样做既不会加重学生的负担,又不会挤占后续课程的时间.我们认为,任何积极的改革,都不应该触动其中最基础的理论部分.回顾 20 世纪 50 年代和 70 年代以抛弃这些基本理论为特色的教学改革都未能坚持下来的历史,使我们变得聪明起来,不再干那种蠢事.

何琛、史济怀、徐森林三位教授所著的《数学分析》(共三册)一

书,由高等教育出版社于1985年公开出版.其实,该书早在1985年以前,就以讲义的形式作为中国科学技术大学数学系、少年班和教改试点班的教材.直到今天,这套教材已经为中国科学技术大学的数学教学起过重要的作用,在全国同类教材中也产生了积极的影响.

本书正是以上述《数学分析》一书为基础而写成的.全书仍为三册.这中间融合了19年来使用《数学分析》作为教科书的教学经验,同时也参考了国内外同类书籍中的许多名著.在我们看来,本《教程》有如下特色.

1. 从基本理论上讲,本《教程》不但包含了上述《数学分析》的全部内容,而且在许多地方添加了新的材料.其中值得一提的是,在单变量的积分理论中,我们证明了“Riemann可积的充分必要条件是积函数在积分区间上的不连续点的集合是一零测集”.通常这一定理是“实变数函数”课程中的内容,但是我们用了完全属于数学分析的技巧加以处理.有了这一定理,就可以删去关于可积性的许多讨论,从总体上来看反而缩短了篇幅.其次,增加了二元凸函数的理论和应用;采用了Peter Lax对圆的等周性质的优美证明;收入了能充满整个正方形的Schoenberg的连续曲线.至于更加系统的知识的补充,将在以下的条款中作详细介绍.

2. 在第2章“函数的连续性”的最后,我们介绍了“混沌现象”,叙述并证明了李天岩和Yorke的“周期3蕴涵混沌”的著名定理(1975).虽然对混沌的研究是当今数学的一个热门分支,但是在它的生长点上,则完全是“微积分的”,更具体地说,只不过是连续函数在闭区间上的性质的巧妙应用.过去,人们热衷于找出函数迭代的表达式,欢喜收敛的迭代.在这里我们告诉读者,研究不收敛的迭代会碰到一些非常奇特的现象,从而生长出新的理论.

3. 本书的第5章,名为“插值与逼近初步”.我们从指出Lagrange插值多项式的弱点入手,介绍了1946年由Schoenberg

提出的“三次插值样条函数”。在传统的观念中,函数是愈光滑愈好,往往忽视了在光滑性上无可挑剔的多项式的毛病.虽然“样条函数”已经成了专门的学问,但是在它的生长点上,却完全是“微积分的”.在传统的微积分中,罗列着勉强编造的“分段函数”、“左、右连续”、“左、右可导”的例子,但是建立三次样条函数连续性方程的时候,这些概念成了自然而然非出现不可的东西.三次样条函数是工程样条的一种非常恰当的数学抽象.读者由此能认识实践对数学的推动,而无须领受生硬的说教.

4. 在第一册的最后一章——第8章“曲线的表示和逼近”中,我们介绍了计算机辅助几何设计(computer aided geometric design, 简称为 CAGD)中广泛使用的 Bézier 曲线.它的数学基础是经典的 Bernstein 多项式(1912年).过去,在很多数学分析书中也介绍过 Bernstein 多项式,主要是用来作为用多项式来一致逼近有限闭区间上的连续函数的一个构造性的证明.在逼近论中,研究 Bernstein 多项式的文献浩如烟海,但由于它的收敛速度十分缓慢,直到 20 世纪 60 年代初期,逼近论的专家们还在为它没有任何的实际应用而悲叹.正在那个年代,法国的工程师 Bézier 创造的、后来被人们称为 Bézier 曲线的曲线被成功地运用到汽车设计中来,当今已成了 CAGD 和 CG(计算机图形学)的理论基础.人们发现,所谓 Bézier 曲线(曲面)只不过是向量值形式的一元(二元) Bernstein 多项式,而 Bézier 成功的要点乃是他充分地利用了 Bernstein 多项式的“保形性质”——这正好是传统的数学分析教材中不曾谈到的.

在第三册中介绍了 Bernstein 多项式的一致逼近性质,这是因为它在理论上确实有着重要的地位;同时又在第一册的第 5 章中研究了它的保形性质,而在第 8 章中作为曲线理论的一部分内容,讲述了 Bézier 曲线.这是数学同当代 CAGD 与 CG 的一个接口.根据我们的经验,在课堂上讲述这一部分内容时,气氛最为活跃,

最能激起学生的热情和兴趣.他们在电脑上根据 Bézier 的方法,可以随心所欲地设计自己的曲线,亲身感受到数学理论的威力.

5. 在空间解析几何和过去的多变量函数理论中,学生都要学习曲面.但到后来,留在头脑中到底还有多少曲面?无非是椭球面、抛物面、马鞍面……在本书第 11 章中,我们介绍了 Bernstein-Bézier 三角曲面,它是当代 CAGD 和 CG 中生成曲面的重要工具.B-B 曲面的控制网的概念的进一步延伸,则是多元逼近理论中之行之有效的 B-网方法.

在本《教程》中,学生将学会如何去生成自己所需要的曲线和曲面,也将学到如何去分析“他们自己的曲线和曲面”的几何性质. Bernstein 多项式在它诞生半个世纪之后,是工程师而不是职业数学家为它找到了实际的应用;而工程师们提出的“控制多边形”这种非常生动的几何概念,又被数学家发展成为研究多元逼近理论的有力方法.数学理论的深入和工程技术的发展相互促进和推动的例子屡见不鲜, Bernstein 多项式和 CAGD, CG 之间的关系,就是一个有说服力的例证.

6. 在本书的第三册,当我们用 Van der Waerden 方法构造处处连续而处处不可微的函数之后,介绍了“分形几何”的大意.传统的数学分析只是把这个例子当成一个“反例”,当作怪物.而我们在这里试图告诉学生:在自然界和社会的现象中,到处存在着这种不规则、不光滑的东西.

7. 样条函数、混沌理论、CAGD 和 CG 技术、分形几何等都是当代应用数学的十分活跃的分支,都已形成了各自的完整体系.这些材料是如何选择的呢?我们的原则是:

- (1) 只在这些学科的“生长点”上进行讨论,“点到为止”;
- (2) 不作一般的空泛的叙述和议论,必须让学生从中学到实质性的数学思想和技巧;
- (3) 所涉及的数学必须是“纯微积分的”,不能再牵扯任何其他

他的高深知识；

(4) 所涉及的数学推导必须是简洁的和优美的。

要做到以上的几条,特别是后三条,我们必须去搜寻那些初等和简洁的证明.其中有一些是经过我们自己再次加工的.例如,三次样条函数连续性方程的推导,就是我们自己的改进;反映 Bernstein 算子“磨光性质”的 Kelisky-Rivlin 定理(Pacific J. of Math., 1976),原先的证明用到了矩阵的特征值和特征向量,而我们的初等证明,只有短短的几行.至于三角域上 Bernstein-Bézier 曲面的凸性,更是我们自己的研究工作.

8. 对于经典的定理和理论,我们也做了一些新的处理.利用 CAGD 中的“混合函数”(blending functions)方法,把微分学的 Lagrange 中值定理、Cauchy 定理一直到 Taylor 公式的证明,统一在一种风格之下,变得较为简洁.在证明 Van der Waerden 函数处处连续而处处不可导的时候,我们采用几何方法,这种方法既是非常严格的,同时又免去了传统的证明中那一系列烦琐的区间表示.

9. 精选了例题和习题.我们更换了不少例题,对于保留下来的例题,也尽量寻找比较简单的解法.凡是一个例题也能用初等方法来解决的,同时也列出了初等的解法,以引导和鼓励读者尽可能用最少的知识来解决问题.特别应当提到的是:我们补充了大量的习题,其中一部分有一定的难度.我们把习题分作两大类:练习题和问题,前者是基本的定理和理论的直接应用,一般不需要太多的技巧,而后者则有相当的挑战性.也许我们认为较难的题目,一些聪明的学生,可能给出很简单的解法.有的习题也是正文的扩充,是本书的一个有机组成部分.一套与本《教程》相配合的教学指导书正在编写之中.

10. 在写作风格上,我们很不赞成一些数学书中的所谓“标准写法”,那些语言像是一封电码,没有任何感情色彩.我们力图把读者当成自己的朋友,平等对话,娓娓谈心.

本书与过去已有的同类教材相比,有着较大的差别,内容有不少更新,篇幅也随之加大.究竟该讲授些什么,不讲什么,一个有经验的教师完全可以针对受教育者的情况和允许的教学时数作出取舍.文字可以多写,讲课可以少讲,给学生留有自己阅读的余地.

习题的分量是过多了一些,这也要请任课的老师们根据学生的情况适当地选择.初学者应当在教师的指导下做练习,不必题题都做;更不要因为有几个题目做不出来而失去信心.

本书的初稿曾经以讲义的形式,在中国科学技术大学数学系、少年班和教改试验班 1996 和 1997 两届学生中试用,收到了比较满意的效果.

在写作本书的时候,我们参考了国内外与数学分析相关的许多优秀著作,在此恕不一一列名致谢.

在写作本书的时候,得到了中国科学技术大学主管教学的负责同志和数学系负责同志的热情鼓励 and 大力支持,作者们谨在此对他们表示诚挚的感谢.有着数学分析课程多年辅导经验的王建伟同志,对本书的写作提出了许多宝贵的意见,并为本书的第一册增添了许多习题,使本书增色不少.

囿于作者们的水平和经验,缺点和错误在所难免.本书出版后,将会有怎样的反映?当前很难预料.好在这是一次教学改革,要改革就不能怕失败.只要多少还有一些积极的东西,我们就不会灰心和失望.

常庚哲 史济怀

1998 年 10 月 1 日

目 录

序 言	1
第 16 章 数项级数	1
§ 16.1 无穷级数的基本性质	2
§ 16.2 正项级数的比较判别法	10
§ 16.3 正项级数的其他判别法	18
§ 16.4 一般级数	32
§ 16.5 绝对收敛和条件收敛	41
§ 16.6 级数的乘法	51
§ 16.7 无穷乘积	56
第 17 章 函数列与函数项级数	66
§ 17.1 问题的提出	66
§ 17.2 一致收敛	70
§ 17.3 极限函数与和函数的性质	86
§ 17.4 由幂级数确定的函数	97
§ 17.5 函数的幂级数展开式	109
§ 17.6 用多项式一致逼近连续函数	118
§ 17.7 幂级数在组合数学中的应用	124

§ 17.8	从两个著名的例子谈起	134
第 18 章	广义积分	144
§ 18.1	非负函数无穷积分的收敛判别法	144
§ 18.2	无穷积分的 Dirichlet 和 Abel 收敛判别法	149
§ 18.3	瑕积分的收敛判别法	158
第 19 章	含参变量积分	168
§ 19.1	含参变量的常义积分	169
§ 19.2	含参变量广义积分的一致收敛	177
§ 19.3	含参变量广义积分的性质	187
§ 19.4	Γ 函数和 B 函数	203
第 20 章	Fourier 分析	219
§ 20.1	周期函数的 Fourier 级数	219
§ 20.2	Fourier 级数的收敛定理	229
§ 20.3	Fourier 级数的 Cesàro 求和	245
§ 20.4	平方平均逼近	253
§ 20.5	Fourier 积分和 Fourier 变换	267
中文名词索引(汉语拼音字母序)		281
外文名词索引(拉丁字母序)		283

数项级数

前面我们接触到的函数主要是初等函数,有相当多的自然现象和工程技术中的问题需要用这些函数来描述.但是,随着科学技术的发展,人们对自然的认识逐步深化,发现有许多自然现象不能用初等函数来描述,特别有很多微分方程的解不能用初等函数来表达,这就要求人们去构造一些新的函数. § 4.3的例2曾经得到 e^x 的一个表达式:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x},$$

其中 $0 < \theta < 1$, $-\infty < x < +\infty$. 对于确定的 x , 显然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} = 0,$$

因而有

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

这样,我们就把 e^x 表示为无穷多个幂函数

$$1, x, \frac{x^2}{2!}, \cdots, \frac{x^n}{n!}, \cdots$$

的和. 换句话说,上面无穷多个幂函数的迭加产生了指函数 e^x .

这启发我们,把无穷多个函数

$$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$$

迭加起来,可能产生新的函数.

19世纪上半叶,数学家普遍认为,连续函数除了一些特殊的点外都是可微的,他们不能想像有处处连续处处不可微的函数存在. 1875年 Weierstrass 首先构造出具有上述性质的函数,使大家对连续和可微的概念在认识上进了一步. Weierstrass 构造的这个函数正是用无穷级数来表达的. 我们在 § 17. 8 将要给出处处连续处处不可微的函数的例子,不过那个例子不是 Weierstrass 构造的,而是由 Van der Waerden 在1930年构造的,在想法上要更直观一些.

由此可见,无穷级数是构造新函数的一个十分有用的工具. 当然,随之而来会有很多新问题: 无穷多个函数如何求和? 如何研究和函数的性质? 要弄清这些问题,首先要知道无穷多个实数如何相加.

§ 16. 1 无穷级数的基本性质

在 § 1. 9 中,作为数列极限的应用之一,我们提到过无穷多个数相加的问题,但在那里并没对它作系统的讨论. 在这里,无穷多个数的和这一概念是我们讨论的出发点.

定义 16. 1 无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (1)$$

的前 n 项的和

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n$$

称为这个级数的第 n 个部分和. 如果这些部分和构成的数列 $\{S_n\}$ 有有限的极限 S , 就说级数(1)是收敛的, 其和为 S , 记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S;$$

如果数列 $\{S_n\}$ 没有有限的极限, 就说级数(1)是发散的.

在 § 1. 9 中,我们已经知道等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots \quad (2)$$

当 $|q| < 1$ 时是收敛的, 它的和是 $\frac{1}{1-q}$. 而当 $q=1$ 时, 它的部分和 $S_n = n \rightarrow +\infty$, 所以级数(2)发散. 当 $q=-1$ 时, 它的部分和

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数时;} \\ 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数时;} \end{cases}$$

$\{S_n\}$ 没有极限, 故级数(2)也发散. 当 $|q| > 1$ 时,

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$$

也没有有限的极限. 综上所述, 等比级数(2)只有当 $|q| < 1$ 时才是收敛的.

在 § 1.9 中, 我们还知道级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leq 1$ 时发散. 这一重要事实在下面的讨论中经常要用到.

下面来看一个计算无穷级数和的例子.

例1 设 $p \geq 0, q > 0, s = p + q$, 计算级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(sn - p)(sn + q)}$$

的和.

解 按定义

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(sn - p)(sn + q)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s} \left(\frac{1}{sn - p} - \frac{1}{sn + q} \right) \\ &= \frac{1}{s} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{sn - p} - \frac{1}{sn + q} \right) \\ &= \frac{1}{s} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{sn - p} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{s(n+1) - p} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{s} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{sn-p} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{sn-p} \right) \\
&= \frac{1}{s} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{s-p} - \frac{1}{s(N+1)-p} \right) \\
&= \frac{1}{s(s-p)}. \quad \square
\end{aligned}$$

研究无穷级数,一个最基本的问题是判断它的敛散性,只有在级数收敛的情况下,讨论它的求和问题才是有意义的.下面给出一个级数收敛的必要条件.

定理 16.1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

证明很简单.用 S_n 记级数的第 n 个部分和, S 记它的和,那么

$$a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \square$$

这个简单的事实可以用来判断一些级数的发散性.

例 2 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ 是发散的.这是因为

$$a_n = (-1)^n \not\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \square$$

例 3 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$ 发散.这是因为

$$a_n = n \sin \frac{1}{n} \rightarrow 1 \neq 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \square$$

必须注意, $a_n \rightarrow 0$ 仅仅是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件,并不充分,也就是说,从 $a_n \rightarrow 0$ 不能得出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的结论.调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 便是一个例子.}$$

无穷级数的和既然是有限和的极限,在运算上当然有与通常有限和相类似的性质.这里我们首先指出的是线性性质.

定理 16.2 如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 都收敛,那么级数

$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ 也收敛, 且

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad (3)$$

这里 α, β 是任意两个实数.

证明 因为

$$\sum_{k=1}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k$$

对任意正整数 n 成立, 命 $n \rightarrow \infty$ 即得 (3). \square

利用收敛级数的这个性质, 可以计算稍微复杂一些的级数的和.

例4 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^n}{3^{n+2}}$ 的和.

解 已知等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{3}{4}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = 3.$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^n}{3^{n+2}} &= \frac{1}{9} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} \right\} \\ &= \frac{5}{12}. \quad \square \end{aligned}$$

与有限和类似的另一性质是收敛级数的可结合性.

定理 16.3 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 是一收敛级数, 如果把级数的项任意归组而不改变其先后的次序, 得新级数

$$\begin{aligned} &(a_1 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots \\ &\quad + (a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}) + \cdots, \end{aligned} \quad (4)$$

这里正整数 $k_j, j=1, 2, \dots$, 满足 $k_1 < k_2 < \dots$, 那么新级数也收敛, 且与原级数有相同的和.

证明 设原级数的部分和数列为