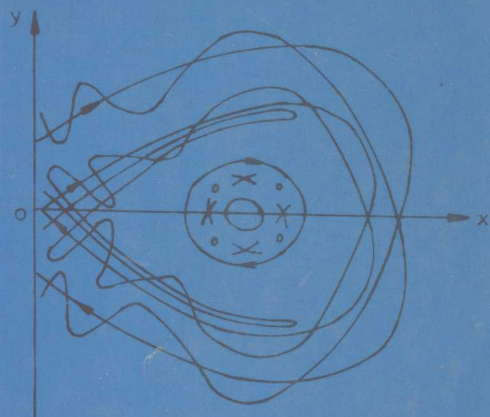


非线性动力学

非线性振动和运动稳定性



2083

中国科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

非线性动力学、非线性振动和运动稳定性/陈予恕,徐健学主编. —北京:中国科学技术出版社,1995.7

ISBN 7-5046-2000-9

I. 非… II. ① 陈…② 徐… III. ① 非线性—动力学—文集②非线性振动理论—文集③运动稳定性理论—文集 IV. 031-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95) 第 11233 号

中国科学技术出版社出版

北京海淀区白石桥路 32 号 邮政编码:100081

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

长沙铁道学院印刷厂印刷

开本:787×1092 毫米 1/16 印张:13 字数:310 千字

1995 年 7 月第 1 版 1995 年 7 月第 1 次印刷

印数:1—000150 册 定价:40.00 元

编辑委员会

主 编	陈予恕 徐健学
编 委	(按姓氏笔划为序)
	朱如曾 李 骊 陆启韶 陈予恕
	徐健学 唐 云 唐驾时 舒仲周
	谢建华 谢柳辉 戴德成
执行编委	谢柳辉
秘 书	刘长文

前 言

三年来,在非线性动力学、非线性振动和运动稳定性这几个前沿学科领域,全国广大科技工作者、教师、学生持续努力、积极创新,使学科的理论和应用研究,沿着国际当代科学研究主流,紧密结合国家建设,深入蓬勃地开展,取得了丰硕的成果。为了开展学术交流,促进学科发展,中国力学学会和中国振动工程学会决定举行“非线性动力学、非线性振动和运动稳定性”学术会议(7月25—28日,贵阳),出版题为“非线性动力学、非线性振动和运动稳定性”的书和《非线性动力学学报》增刊,用来发表这方面研究成果的论文。书收入论文 52 篇、研究简报 7 篇,中国科学技术出版社出版。增刊收入论文 40 篇分三期出版。

论文包括特邀论文和提交论文,论文及简报内容分为以下几个方面:

- 非线性振动的解析方法和数值方法
- 非线性动力学经典和现代分析理论及方法
- 分叉和混沌
- 运动稳定性
- 结构非线性振动
- 主动控制、动力减振和自适应机敏系统
- 实验研究及在工程中的应用
- 其他问题

书、增刊和会议的编辑、组织工作,由中国力学学会和中国振动工程学会领导,一般力学专业委员会非线性动力学和稳定性专业组和非线性振动专业委员会主持,湖南大学和长沙铁道学院承办。对中国科学技术出版社再次出版该书,《非线性动力学学报》给予出版专题增刊,我们全体编委表示衷心的感谢。

陈予恕 徐健学

1995 年 5 月

目 录

一 非线性振动(包括分叉、混沌)

Hamilton 系统与时滞微分方程的多重周期解	李继彬(1)
动力系统的胞映射——点映射综合法	文成秀 闻邦椿(7)
摊铺机主振动机构非线性动力学分析	韩清凯 张敬民 闻邦椿(13)
带有非分离奇点的余维二分叉的一种不完全规范形及相应的分叉	徐健学 长谷部宣男(16)
参变冲击半动力系统的全局拓扑	舒仲周(21)
具有时滞恢复力的非线性振动系统研究	赵杰民 陆启韶 黄克累(26)
Melnikov 方法的推广及对三体问题的应用	朱如曾 向 程(29)
二阶强非线性非自治系统周期解的能量法	李 骊 李 娟(33)
磁弹性梁的多频参数激励振动	陆启韶(37)
空间中反应扩散方程组的 Hopf 分枝问题	徐荒煤 唐 云(41)
同宿轨道分叉研究中的高阶 Melnikov 方法	曹 明 徐健学(45)
离散型神经网络吸引域几何描述方法研究	何岱海 陈永红 江 俊 徐健学(49)
流体管道耦合受迫振动	王新志 洪小波(54)
Lienard 方程的能量迭代法	周一峰 谢柳辉 李 骊(58)
粘性 Cahn—Hilliard 方程的吸引子及其结构	白峰杉(60)
利用自适应延时反馈方法控制混沌	田 钢 杨世平 徐树山(64)
二自由度系统强非线性振动的改进的 L—P 方法	陈树辉 Y. K. Cheung(66)
振动输送机减振分析与优化设计	王德石(69)
新的概率和加权等效线性法计算非线性随机振动	张相庭(73)
八音琴音片的非线性振动	崔建忠 庄表中(77)
关于低维与高维混沌动力学系统的区分	董智法 徐 成 高剑波 吴永礼 郑哲敏(80)
脑电信号高维性的一个判断	董智法 高剑波 W. S. Pritchard 徐 成 鄂学金 郑哲敏(83)
主动振动控制中的非线性特性初探	欧阳光耀 施 引(85)
弱非线性系统摄动解的对称性与运动积分	范新建(88)
非线性系统非平稳随机响应的时域模态分析法	张 明(92)
用二级阻尼器实行位移统计控制的半主动悬架	郑昭明 胡百鸣 陈上仿 罗冬梅(97)
具有双曲线解的三次系统(E_3^2)的极限环的存在性	宋 燕(103)
圆板非线性振动的加权残数法分析	郝际平 吴子燕(105)
非线性振动的直接积分法	梁景辉(109)
一类强非线性系统极限环的分析	谢柳辉 周一峰(111)

二 运动稳定性及其它动力学问题

时间历史相关系统的实用稳定性问题	楚天广	王照林(115)
一类 Чаплыгин 非完整系统的积分性质	梅凤翔	郭永新(120)
关于非完整系统平稳运动的稳定性	朱海平	梅凤翔(124)
带随机参数非完整约束系统的运动及响应	杨明焱	梅凤翔(128)
连续分布时滞微分方程的渐近稳定性	张昌波	卢水章 俞元洪(134)
Volterra 积分微分方程的稳定性	冯滨鲁	俞元洪(138)
受外激励的 2 阶参变系统的周期解及其稳定性	李 骊	袁丽红(143)
用非定常系统稳定性理论分析旋转稳定的火箭的运动稳定性		张书顺(148)
用“离散状态转移矩阵范数判稳法”分析一类 Jeffcott 转子系统的运动稳定性	曹承佳	张书顺(152)
二自由度碰撞振动系统的鲁棒稳定性研究		曹登庆(156)
大系统的渐近稳定性		张继业(158)
一类周期运动稳定性区域的确定	支希哲	朱西平(161)
关于李亚普诺夫不稳定性定理的一个注记		李春文(164)
滞后非线性悬挂对车辆运行稳定性的影响	陈恩利 杨绍普	段淑敏 刘献栋(165)
非惯性系中相对平衡位置的稳定性		梁景辉(169)
积分微分方程组解的振动性	林诗仲	俞元洪(171)
机轮制动力矩的误差反馈控制	张 陵	诸德培(176)
一种识别非线性系统参数的方法	刘桂斋	张均锋(180)
水平与垂直分布荷载同时作用下圆弧管的侧向压力		周松鹤(184)
确定真实线形底宽的卷积尝试法	孙 伟	常 明(189)
新型柔索运动微分方程	鞠志林	王玲华(193)
正则方程在正则变换下形式不变的微分学证明	朱拯万	朱如曾 祝 英(196)

三 研究简报

非线性振动系统复杂动力学行为实验研究的现状与展望	陈予恕	季进臣(198)
非线性振动系统的非半简 1:1 内共振及其同步	陈予恕	吴志强(199)
参数与强迫激励联合作用下非线性振子的余维 3 退化分叉	张 伟	陈予恕(201)
非自治系统的分叉分析	毕勤胜	陈予恕(202)
具有非线性阻尼和刚度参数系统的 Hopf 分叉和混沌运动	徐 鉴	陈予恕(203)
磁力轴承的控制系统及其转子系统的非线性研究	王洪礼 刘 勇	牛西泽(204)
关于动力吸混沌器的设计		陈立群(205)

Hamilton 系统与时滞微分方程的多重周期解*

李继彬

(昆明理工大学非线性科学研究中心, 云南省应用数学研究所, 昆明 650009)

摘 要 本文讨论 Hamilton 系统与时滞微分方程的多重周期解。

关键词 Hamilton 系统, 时滞微分方程, 周期解

1 引 言

1974 年, Kaplan 与 Yorke^[1]考虑过微分差分方程

$$y'(t) = -f(y(t-1)) \quad (1.1)$$

与
$$y'(t) = -[f(y(t-1)) + f(y(t-2))] \quad (1.2)$$

其中 f 是奇函数。他们成功地通过常微分方程组的周期解来发现 (1.1) 与 (1.2) 的周期解。但是, 当方程中的滞量多于两个时, 他们未能给出周期解存在定理, 而提出了下面的猜想:

“考虑微分时滞方程

$$x'(t) = -[f(x(t-1)) + f(x(t-2)) + \cdots + f(x(t-(n-1)))] \quad (1.3)$$

其中 $f(0) = 0$, f 是奇的, 且当 $x \neq 0$ 时, $xf(x) > 0$, 令 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\Psi(x) = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))^T$, “ T ” 表示转置, 设 A_n 为以下的 $n \times n$ 反对称矩阵

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

容易验证, 给定 (1.3) 的任何周期解 $x(t)$, 满足 $x(t) = -x(t-n)$, 该解必满足常微分方程组

$$X'(t) = A_n \Psi(X) \quad (1.4)$$

其中 $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x(t-1)$, $\dots$, $x_n(t) = x(t-(n-1))$ 。我们的定理 1.1 与定理 1.2 说明, 如果 $n = 2$ 或 $n = 3$, f 在 0 和 ∞ 有足够好的性质, 则上述结论的逆亦真。对于 (1.3) 与 (1.4), 上述结论的逆很有希望是真的, 然而我们未能证明这样的一般性结论。

Kaplan-Yorke 的文章^[1]发表之后, 近二十年来, 对于含一个与二个时滞的微分差分方程, 已有十余篇文章发展他们的思想, 推广了他们的工作。但对于一般的方程 (1.3), 通过 (1.4) 来发现 $2n$ -周期解的问题一直未见研究。本文将简要地介绍我们关于 Kaplan-Yorke 猜想的证明和推广。

我们考虑较一般的系统
$$x'(t) = -\sum_{i=1}^{n-1} f(x(t-r_i)) \quad (1.5)$$

其中 $r_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 是常滞量。我们对函数 $f(x)$ 附加以下几组条件。

定义 2.1^[3] 设 G 是作用在 R^n 中的紧李群。函数 $\Phi: R^n \rightarrow R^n$ 称 G 等变的, 倘若对一切 $g \in G$ 有 $\Phi(gX) = g\Phi(X)$ 。一个实值函数 $H: R^n \rightarrow R$ 称 G 不变的函数, 倘若对于一切 $g \in G, X \in R^n$ 有 $H(gX) = H(X)$ 。对于 $X_0 \in R^n$, 集合 $GX_0 = \{gX_0: g \in G\}$ 称过点 X_0 的群轨道。如果微分方程 (1.4) 右边函数是 G 等变的, 称 G 为 (1.4) 的对称群。

$$\text{考虑矩阵 } T_n = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \\ \hline -1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

其中 I_{n-1} 为 $(n-1) \times (n-1)$ 单位矩阵, 记群 $G = \{g | g = T_n^m, m = 1, 2, \dots, 2n\}$, 显然, G 是 n 维正交群 $O(n)$ 的闭子群, 因为 T_n 是正交矩阵并且 $(T_n)^n = -I_n, (T_n)^{2n} = I_n, (T_n^m)^{-1} = T_n^{2n-m}$ 。用数学归纳法可以证明, T_n 可分解为一个反射矩阵与 $n-1$ 个初等旋转矩阵的乘积。

定理 2.1 如果 $X(t)$ 是系统 (1.4) 的非常 P -周期解, 则 $gX(t)$ 也是 (1.4) 的一个非常 P -周期解, $g \in G$ 。 $gX(t)$ 围绕 (1.4) 的坐标原点而振动。此外若 $X(t_0) = X(t)|_{t=t_0}$ 是 P -周期轨 $X(t)$ 上的一个点, 则群轨道 $GX(t_0)$ 上的所有点是两两不同的。

证 设 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ 是 (1.4) 的任一非常数 P -周期解。因为 $\Phi(X) = A_n \nabla H(X)$ 是 G 等变的, 因此, $gX(t)$ 也是 (1.4) 的具有同样周期的周期解。此外, 对一切 $gX(t), g \in G$, 它们在 R^n 中描述同一条轨道, 因为每个线性变换 $g = T_n^m (m = 1, 2, \dots, 2n)$ 保持 R^n 中的闭轨道不变。由于 $T_n^n X(t) = -X(t)$ 是 (1.4) 的具有同样轨道的 P -周期解, 对于一切 $t \in [0, p) X(t) \neq -X(t)$, 因此, 由解的连续性可知, $X(t)$ 的每个分量 $x_i(t)$ 都将围绕原点而振动。另一方面, 恒存在两个 $i, j, i \neq j$, 使得 $x_i(t_0) = x_j(t_0), t_0 \in [0, p)$, 否则 $X(t)$ 是常数解。又因 (1.4) 为自治系统, 可设 $t_0 = 0, x_1(0) = 0, x_j(0) = \rho > 0$ 。即 $X(t)$ 有初值 $(x_1(0), \dots, x_i(0), \dots, x_j(0), \dots, x_n(0)) = (x_1(0), \dots, 0, \dots, \rho, \dots, x_n(0))$, $H(X(0)) = h_0$ 且当 $n = 2k+1$ 时 $C(X(0)) = 0$ 。由于 $\rho > 0$, 故过 $X(0)$ 的群轨道 $GX(0) = \{T_n^m X(0) | m = 1, 2, \dots, 2n\}$ 必然是两两不同的点。

定理 2.2 设 $X(t)$ 是 (1.4) 的非常数 P -周期解, 则 $X(t)$ 与 $T_n X(t)$ 的不同仅是时间 t 的一个相移, 即

$$X(t) = T_n X(t + \frac{p}{2n}) \quad (2.5)$$

换言之, (1.4) 的周期解的对称性包含空间分量 T_n 与时间分量 $\tau = p/2n$ 。

证 设 $X(t_0)$ 是 (1.4) 的周期轨道 $X(t)$ 上的一点。记 $R_1 = X(t_0), R_2 = T_n X(t_0) = T_n R_1$ 。用 $\vec{OR}_1$ 与 $\vec{OR}_2$ 分别表示矢径。显然, $\vec{OR}_1 = (x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)), \vec{OR}_2 = (x_2(t_0), x_3(t_0), \dots, x_{n-1}(t_0), x_n(t_0), -x_1(t_0))$ 。用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 R^n 中的内积, 易见

$$\begin{aligned} \langle T_n X(t_0) - X(t_0), A_n \nabla H(X(t_0)) \rangle &= -(x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_n f(x_n))|_{t=t_0} \\ &\quad - (x_2 f(x_1) + x_3 f(x_2) + \dots + x_n f(x_{n-1}) - x_1 f(x_n)) = -\langle \vec{OR}_1 + \vec{OR}_2, \nabla H(R_1) \rangle < 0 \end{aligned}$$

因此, T_n 的作用方向与向量场 (1.4) 在点 $X(t_0)$ 的方向相反, 从而 $X(t) = T_n X(t + \tau), 0 < \tau < p$ 。由定理 2.1, 群轨道 $GX(t_0)$ 上点两两不同, 因此, $\tau = \frac{p}{2n}$ 。即 (2.5) 成立。

定理 2.3 设条件 (H_2) 与下面的条件成立:

(H_3) 存在整数 $m_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 使得方程 (1.5) 中时滞 $r_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 满足

$$\frac{r_1}{2m_1n+1} = \frac{r_2}{2m_2n+2} = \cdots = \frac{r_j}{2m_jn+j} = \cdots = \frac{r_{n-1}}{2m_{n-1}n+(n-1)} = u \quad (2.6)$$

(H₄) 在系统(1.4)的能量曲面 $H(X(t)) = h$ 上, (1.4) 有一个非常数的周期 $p = 2nu$ 的周期解 $X_0(t)$ 。则 $X_0(t - nu) = -X_0(t)$, 且 $x(t) = x_1(t)$ 是方程(1.5)的非常数 p 周期解。

证 根据定理 2.2, 若 $X_0(t)$ 是(1.4)的周期为 p 的周期解, 则有

$$X_0(t) = T_n X_0(t+u) = T_n^2 X_0(t+2u) = \cdots = T^n X_0(t+nu) = -X_0(t)$$

$$= T^{n+1} X_0(t+(n+1)u) = \cdots = T^{2n} X_0(t+2nu) = X_0(t), \text{ 因此,}$$

$$T_n X_0(t) = (x_2(t), x_3(t), \cdots, x_n(t), -x_1(t))^T = X_0(t-u)$$

$$= (x_1(t-u), x_2(t-u), \cdots, x_{n-1}(t-u), x_n(t-u))^T$$

由上式反条件(H₃)可知

$$x_2(t) = x_1(t-u) = x_1\left(t - \frac{r_1}{2m_1n+1} - \frac{2m_1nr_1}{2m_1n+1}\right) = x_1(t-r_1),$$

$$x_3(t) = x_2(t-u) = x_1(t-2u) = x_1\left(t - \frac{2r_2}{2m_2n+2} - \frac{2m_2nr_2}{2m_2n+2}\right) = x_1(t-r_2)$$

.....

$$x_n(t) = x_{n-1}(t-u) = x_1(t-(n-1)u) = \cdots = x_1\left(t - \frac{(n-1)r_{n-1}}{2m_{n-1}n+(n-1)} - \frac{2m_{n-1}nr_{n-1}}{2m_{n-1}n+(n-1)}\right) = x_1(t-r_{n-1})$$

这意味着 $x(t) = x_1(t)$ 是方程(1.5)的 $p = 2nu$ 周期解。

3 耦合系统(1.4)的周期解

本节考虑方程(1.5)的耦合系统(1.4)的周期解的存在性, $n = 2k$ 情形, (1.4) 就是(2.1), $n = 2k + 1$ 情形(1.4)可约化为(2.4), 因此, 我们需要研究两个 Hamilton 系统。

引理 3.1 存在非奇正交矩阵 B 使得经过线性变换 $Y = BX$, 系统(2.1)与(2.4)分别化为典型 Hamilton 系统

$$\frac{dY}{dt} = J \nabla \tilde{H}(Y) \quad (3.1)$$

与

$$\frac{dY}{dt} = J \nabla \tilde{H}^*(Y) \quad (3.2)$$

其中 $Y(t) = (y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t))^T$, $\tilde{H}(Y) = H(B^{-1}Y)$, $\tilde{H}^*(Y) = H^*(B^{-1}Y)$ 。

引理 3.2 设条件(H₁)成立, (I) 若条件(H₁₁)满足则系统(3.1)与(3.2)都是凸的渐近线性 Hamilton 系统。(II) 若条件(H₁₂)满足, 则 $\tilde{H}(Y)$ 与 $\tilde{H}^*(Y)$ 是二次的。(III) 若条件(H₁₃)满足, 则 $\tilde{H}(Y)$ 与 $\tilde{H}^*(Y)$ 是超二次的。

证明 用数学归纳法可以证明 Hamilton 函数 $H(X)$ 与 $H^*(X)$ 的 Hessian 矩阵 $H_{xx}(X)$ 与 $H_{xx}^*(X)$ 都是正定的, 倘若条件(H₁)成立, 注意到 $\tilde{H}_{yy}(Y) = (B^{-1})^T H_{xx}(X) B^{-1}$, $\tilde{H}_{yy}^*(Y) = (B^{-1})^T H_{xx}^*(X) B^{-1}$, 故 $\tilde{H}_{yy}(Y)$ 与 $\tilde{H}_{yy}^*(Y)$ 亦正定, 从而 $\tilde{H}(Y)$ 与 $\tilde{H}^*(Y)$ 是凸的。易证当(H₁₂)满足时,

$$\nabla \tilde{H}^*(Y) = \omega_0 (B^{-1})^T B^{-1} Y + o(|Y|), \text{ 当 } |Y| \rightarrow 0,$$

$$\nabla \tilde{H}(Y) = \omega_\infty (B^{-1})^T B^{-1} Y + o(|Y|), \text{ 当 } |Y| \rightarrow \infty$$

$$\nabla \tilde{H}^*(Y) = \omega_0 (B^{-1})^T H_{xx}(0) B^{-1} Y + o(|Y|), \text{ 当 } |Y| \rightarrow 0,$$

$$\nabla \tilde{H}^*(Y) = \omega_\infty (B^{-1})^T H_{xx}(0) B^{-1} Y + o(|Y|), \text{ 当 } |Y| \rightarrow \infty.$$

因此,系统(2.1)与(2.4)是渐近线性 Hamilton 系统,结论(I)得证,结论(II)与(III)是显然的,因为 \$|B|\$ 有界.记 \$\tilde{B} = (B^{-1})^T B^{-1} M = (B^{-1})^T H_{xx}^*(0) B^{-1}\$. 用 \$\sigma(A)\$ 表示矩阵 \$A\$ 的谱.

引理 3.3 \$\sigma(J\tilde{B}) = \sigma(A_{2k}) = \{\pm i \tan \frac{(2q+1)\pi}{2n}, q = 0, 1, 2, \dots, k-1\}\$.

$$\sigma(JM) = \sigma(A_{2k}^*) = \{\pm i \tan \frac{q\pi}{2n}, q = 1, 2, \dots, k\},$$

其中

$$A_{2k}^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 & \cdots & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & \cdots & 0 & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 0 & 2 & 0 & & & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

证 用数学归纳法证明(为节约篇幅,证略).

设系统(2.1)与(2.4)分别存在周期为 \$p\$ 的周期解,如果

$$\begin{cases} p \in \left(\frac{2\pi}{\omega_\infty} \tan \frac{(2q+1)\pi}{2n} \right) N \quad (q = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1, n = 2k) \\ p \in \left(\frac{2\pi}{\omega_\infty} \tan \frac{q\pi}{2n} \right) N \quad (q = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}, n = 2k+1) \end{cases} \quad (3.3)$$

称系统(2.1)与(2.4)在无穷远处满足非共振条件.

根据 Morse - Ekeland 指标理论^[4],若 \$p\$ 满足

$$\begin{cases} \omega_\infty < \frac{2\pi j}{p} \tan \frac{(n-1)\pi}{2n} < \frac{2\pi j}{p} \tan \frac{\pi}{2n} < \omega_0, \text{当 } n = 2k \\ \omega_\infty < \frac{2\pi j}{p} \tan \frac{(n-1)\pi}{2n} < \frac{2\pi j}{p} \tan \frac{\pi}{n} < \omega_0, \text{当 } n = 2k+1 \end{cases} \quad (3.4)$$

其中 \$j \geq 1\$ 是某个整数,则 Morse - Ekeland 指标

$$i(\omega_0 \tilde{B}, p) - i(\omega_\infty \tilde{B}) \geq 2k, i(\omega_0 M, p) - i(\omega_\infty M, p) \geq 2k$$

根据上面的引理及文[4-6]中的定理可证下面的结论.

定理 3.4 设条件 \$(H_1)\$ 成立.(I)若条件 \$(H_{11})\$ 及(3.4)式关于某个 \$p > 0\$ 成立,则系统(2.1)与(2.4)分别存在至少 \$k\$ 个周期 \$p\$ 的周期解,倘若非共振条件(3.3)满足.

(II)若条件 \$(H_{12})_{(1)}\$, 式 \$(H_{13})_{(1)}\$ 成立,则对任何 \$p > 0\$, 系统(2.1)与(2.4)存在具有极小周期 \$p\$ 的非常数周期解 \$X_p(t)\$, 分别满足 \$H(X_p(t)) = h, H^*(X_p(t)) = h\$.

(III)若条件 \$(H_{12})_{(1)}\$, 或 \$(H_{13})_{(1)}\$ 满足,则存在 \$p_0 > 0\$ 使得对一切 \$p > p_0\$, 系统(2.1)与(2.4)存在最小周期为 \$p\$ 的周期解,且当 \$p \rightarrow \infty\$ 时, \$\max_{t \in K} |X_p(t)| \rightarrow 0\$.

4 微分时滞方程(1.5)的周期解.

定理 4.1 设条件 \$(H_1), (H_{11})\$ 与 \$(H_3)\$ 成立.若存在 \$j \geq 1\$ 使得

$$\begin{cases} \omega_\infty < \frac{\pi j}{nu} \tan \frac{(n-1)\pi}{2n} < \frac{\pi j}{nu} \tan \frac{\pi}{2n} < \omega_0, \text{当 } n = 2k \\ \omega_\infty < \frac{\pi j}{nu} \tan \frac{(n-1)\pi}{2n} < \frac{\pi j}{nu} \tan \frac{\pi}{n} < \omega_0, \text{当 } n = 2k+1 \end{cases}$$

则方程(1.5)至少存在 \$k\$ 个周期为 \$2nu\$ 的周期解,倘若非共振条件(3.3)对 \$p = 2nu\$ 满足.

证 这是定理 2.3 与定理 3.4(I)的直接推论.

定理 4.2 设条件 (H_1) 与 (H_3) 成立,如果条件 $(H_{12})_{(1)}$ 或 $(H_{13})_{(1)}$ 满足,则方程(1.5)存在无穷多周期解,其周期为 $p = 2nu \prod_{i=1}^N \frac{1}{1+2nl_i}$,这里 $N > 0, l_i \geq 0$ 为任意常数。

证 由定理 3.4 知,对于任何 $p > 0$, (2.1) 与 (2.4) 有周期为 p 的周期解。特别地, (2.1) 与 (2.4) 存在周期为 $p = 2nu$ 的周期解。又由定理 2.3 知, (1.5) 存在周期解 $x(t)$ 是有周期 $p = 2nu$ 并且 $x(t - nu_k) = -x(t)$ 。注意到

$$\begin{aligned} X'(t) &= - \sum_{i=1}^{n-1} f(x(t - r_i)) = - \sum_{i=1}^{n-1} f(x(t - \frac{i + 2nm_i}{i + 2nm_i} r_i)) \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} f(x(t - m_i p - iu)) = - \sum_{i=1}^{n-1} f(x(t - iu)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

令 $t_i^{(1)} = iu$, 显然

$$\frac{r_i^{(1)}}{1+2nl_1} = \frac{r_2^{(1)}}{2(1+2nl_1)} = \cdots = \frac{r_i^{(1)}}{i(1+2nl_1)} = \cdots = \frac{r_{n-1}^{(1)}}{(n-1)(1+2nl_1)} = \frac{u}{1+2nl_1} \equiv u^{(1)}$$

其中 l_1 为任何正整数,上式说明条件 (H_3) 当 $m_i = il_1$ 时成立。因此对“新方程”(4.1)继续应用定理 2.3 与定理 3.4,可知方程(4.1)存在 $p = 2nu^{(1)}$ 周期解。用归纳法,可知定理的结论。

定理 4.3 设 (H_1) 与 (H_3) 成立,若 $(H_{12})_{(1)}$ 或 $(H_{13})_{(1)}$ 满足,又 $p_0 < 2nu$,其中 p_0 由定理 3.4 确定,则方程(1.5)存在周期 $p = 2nu$ 的周期解。

上面三个定理是在 H 的凸性假设下获得的。如果 H 是非凸的,应用 Liapunov 中心定理^[7],可得以下的结论。

定理 4.4 设条件 (H_2) 与 (H_3) 成立,若存在数 β^* 使得

$$\beta^* > 2nu > \begin{cases} \frac{2\pi}{\omega} \tan \frac{\pi}{2n}, & \text{当 } n = 2k, \\ \frac{2\pi}{\omega} \tan \frac{\pi}{n}, & \text{当 } n = 2k + 1 \end{cases} \quad \text{或 } \beta^* > 2nu > \begin{cases} \frac{2\pi}{\omega} \tan \frac{\pi}{2n}, & \text{当 } n = 2k, \\ \frac{2\pi}{\omega} \tan \frac{\pi}{n}, & \text{当 } n = 2k + 1 \end{cases}$$

此外(2.1)与(2.4)的每个局部周期解族 $\{p_s\} (s = 1, 2, \dots, k)$ 的周期 p_s 从 $\frac{2\pi}{\omega} \tan \frac{(2s+1)\pi}{2n}$ 单调增加到 β^* (当 $n = 2k$)或从 $\frac{2\pi}{\omega} \tan \frac{s\pi}{n}$ 单调增加到 β^* (当 $n = 2k + 1$)。于是,方程(1.5)至少存在 k 个非常数周期解,其周期为 $p = 2nu$ 。

参 考 文 献

- 1 Kaplan J L and Yorke J A. Ordinary differential equations which yield periodic solution of differential-delay equations. J. Math. Anal. Appl. 1974, 48:317-324
- 2 李继彬, 赵晓华, 刘正荣. 广义哈密顿系统的理论与应用. 北京: 科学出版社, 1994.
- 3 Golubitsky M etc. Singularities and Groups in Bifurcation Theory I. New York: Springer-Verlag, 1988.
- 4 Mawhin J and Willem M. Critical point Theory and Hamiltonian Systems. New York: Springer-Verlag, 1989.
- 5 Clarke F H and Ekeland I. Hamiltonian trajectories with prescribed minimal period. Comm. Pure Appl. Math, 1980, 33: 103-116
- 6 Ambrose A and Mancini G. Solution of minimal period for a class of convex Hamiltonian systems. Math. Ann, 1981, 255:405-421
- 7 Moser J. Periodic orbits near a equilibrium and a theorem of a weinstein. Comm. Pure Appl. Math. 1976, 29:727-747

动力系统的胞映射——点映射综合法

文成秀 闻邦椿

(中科院沈阳计算技术研究所现代制造的 CAD/CAM 开放实验室, 东北大学, 沈阳 110006)

摘 要 本文对非线性动力系统的胞映射法进行了改进, 采用点映射法对胞映射法的计算结果进行后处理, 求得精确的周期运动和吸引域, 将胞映射法和点映射法有机地结合起来, 本文提出的方法既有较高的计算精度, 又有较高的效率。

关键词 非线性动力系统, 全局性态分析, 数值方法

1 前 言

非线性动力系统的全局性态分析, 目前尚无有效的解析方法。动力系统的胞映射法是适用于计算机求解的一种数值方法, 这种方法可以快速的分析出系统的全局性态, 但计算结果有误差。作为对胞映射法的改进, 先后提出了插值胞映射法和胞化积分轨迹法。本文提出的胞映射——点映射综合法可以解决周期运动的计算精度问题, 胞的边长大小对周期运动精度无影响, 可以大大地减少计算工作量, 并可求得周期运动的准确吸引域, 可显著提高效率, 便于工程上使用。

2 胞映射——点映射综合法

2.1 胞映射——点映射综合法的形成

按照胞映射方法, 对于任何一个动力系统都可以写成如下点映射形式:

$$X(N+1) = G(X(N)) \quad (1)$$

其中: $X(\cdot)$ 属于 N 维实型空间, N 为正整数。若点映射的时间间隔与激励周期相等, 则(1)式称为 Poincare 截面。

将点映射系统离散成胞映射系统, 得到如下形式:

$$Z(N+1) = C(Z(N)) \quad (2)$$

其中: Z 是 N 维长方体; C 代表胞映射; C, N 为正整数。

用胞映射法经过一次计算, 就可以求得系统存在的周期运动及其吸引域, 由于胞映射法是用胞的中心点代替胞内的映射点, 因此所求得的周期胞与用点映射法求得的不动点有误差, 在全局性态相对简单的情况下, 周期胞是精确周期运动的吸引胞。当胞的边长较大或方程的全局性态比较复杂的情况下, 所求得的周期胞有的可能不是周期运动的吸引胞, 而所找到的可能是非周期运动。作为对胞映射法的补充, 胞映射——点映射综合法的第一阶段利用胞映射法, 第二阶段利用点映射法, 首先求出系统的精确的周期运动, 然后通过分组进行全局分析。其基本思想如下:

a) 首先利用胞映射法求出系统可能存在的周期运动。

b) 利用点映射法检查周期运动的正确性。

由于在一般情况下,胞的中心点不是不动点,因而用胞映射法求得的周期运动大都是不准确的,必须加以检验,对于不正确的要加以修正。

c) 利用点映射法修正原周期运动,找出不动点,即为精确的周期运动。

从原周期胞的中心点出发,用点映射法进行连续地映射,有可能得到不动点,而有时不能得到。

d) 周期运动的重新整理。

由于胞映射法的计算误差,有时有遗漏现象,有时把一种周期运动误认为是两种周期运动。因而新产生的周期运动可能有重复现象等,不能与原周期胞组一一对应,因而必须重新整理排队。

e) 确定各个周期运动的吸引域。

根据重新整理得到的周期胞组,进行分组,确定各个周期运动的吸引域。

2.2 动力系统的胞映射——点映射综合法的实施步骤

1) 按简单胞映射法的分析步骤:确定分析区间,建立胞化空间,计算分析区间每一个胞在一个周期后的映射胞,确定周期胞组。

2) 用点映射法检查所有的 $P-K$ 周期运动的正确性。

选取 $P-K$ 周期胞组中的任何一胞,从其中心点出发,进行 K 次连续点映射,检验所得到的映射点与原中心点之间的距离是否大于预先指定的精度。

3) 生成新的周期运动。

从原 $P-K$ 周期胞组中的任何一胞的中心点出发,进行连续点映射,前一次点映射的终点作为下一次点映射的起点,当映射的次数足够多时,可以判断出这一映射系列是否为周期运动,如果是周期运动,可以判断出周期为几。并要将原周期胞组和新生成的周期运动所在的胞,合并成一组,记录下来,这说明原周期胞组是新生成的周期运动的吸引胞。该周期运动的周期为新生成的周期运动的周期。如果映射的次数足够多,也不是周期运动时,将原周期运动去掉,说明原周期胞组不是周期胞组的吸引胞,原结果有错误。

4) 重新组织所有的周期运动。

将用点映射求得的准确计算结果和新生成的周期运动放在一起排队,将重复的周期运动合并在一起,不是周期运动的结果去掉,确定系统中存在的周期运动的总数目及周期运动的周期。

5) 对分组数组置初值。

按照第四步形成的周期胞组,对分组数组置初值。其中新生成的周期胞组及对应的原周期胞组为同一组。

6) 求各周期运动的吸引域。

3 计算实例

对以下分段线性非线性系统

$$Mx'' + F(x', x) + Q(x) = m\omega^2 \sin(\omega t) \quad (3)$$

其中

$$F(x', x) = \begin{cases} (f + \Delta f)x' & (x > -a) \\ fx' & (x \leq -a) \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} -k(a_0 - a - x) + \Delta k(x + a) & (x > -a) \\ -k(a_0 - a - x) & (x \leq -a) \end{cases}$$

进行动态特性分析。

具体算例: $M = 25, m = 400, k = 43.7, \Delta k = 900, \omega = 34.56, a_0 = 1.9, a = 0.08798, r = 0.26$ 。

3.1 实例一

分别在分析区域分成 $7 \times 112, 35 \times 560, 71 \times 1120$ 和 143×2240 个胞进行计算。

当微分方程中的 $f = 2.0, \Delta f = 2.0$ 时:

3.1.1 用胞映射 —— 点映射综合法的计算结果

图1为 $P-1$ 运动的时间历程曲线,由四种剖分方法得到相同的结果。 $P-1$ 运动的精确点坐标是 $x = 0.51441, v = 3.28328$,这一结果与用点映射法所得的 $P-1$ 运动的不动点坐标相同。图2是用胞映射 —— 点映射综合法求得的 $P-1$ 周期运动的吸引域,在这种参数下,只存在一种周期运动,全局性态比较简单。

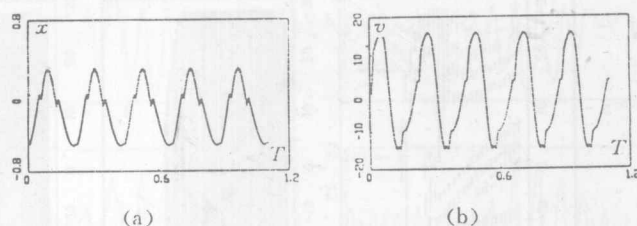
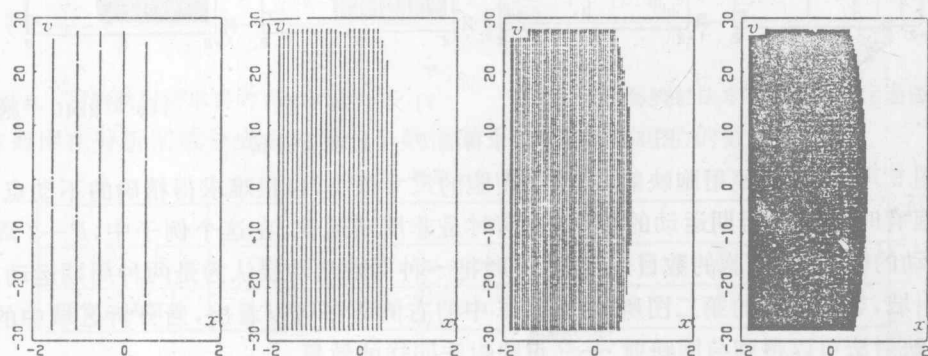


图1 用胞映射 —— 点映射综合法求得的 $P-1$ 运动历程曲线



7 × 112 个胞 35 × 560 个胞 71 × 1120 个胞 143 × 2240 个胞

图2 用胞映射 —— 点映射综合法求得的 $P-1$ 运动吸引域

从图2可以看出,这四种胞的划分方法虽然不同,但能得到相同的吸引域和相同的周期运动,说明具有相同的效果。

3.1.2 用胞映射法计算结果

用胞映射法进行同样的计算,分别把分析区域分成 $7 \times 112, 35 \times 560, 71 \times 1120$ 和 143×2240 个胞。当胞的个数为 7×56 和 5×560 时,计算出系统存在两种周期运动: $P-1$ 运动和 $P-2$ 运动。图3为 $P-1$ 和 $P-2$ 运动的时间历程曲线,图4是用胞映射法由四种划分方法求得

的 $P-1$ 周期运动的吸引域。

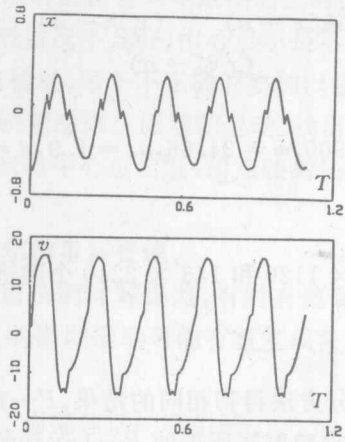


图 3 $P-1$ 运动时间历程曲线
 $x = -0.58798, v = 3.0$

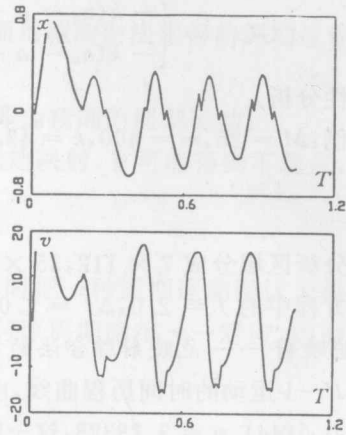


图 4 $P-2$ 运动时间历程曲线
 $x = -0.08798, v = 9.0$

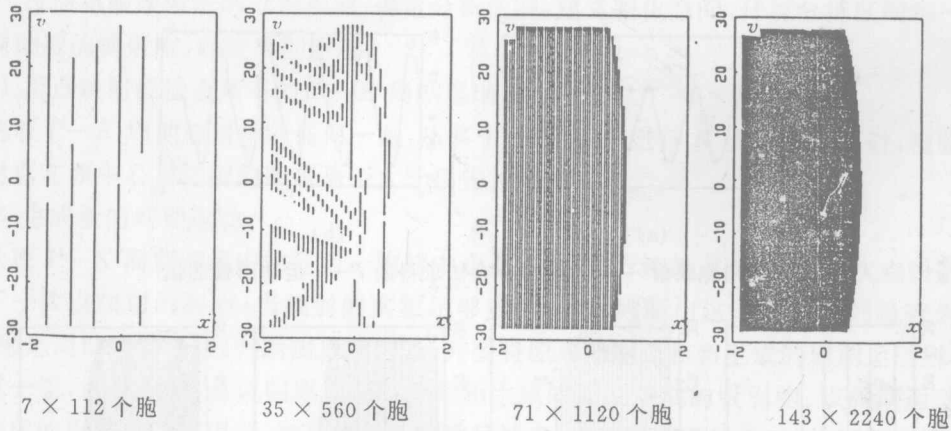


图 5 用胞映射法求得的 $P-1$ 运动吸引域

由图 5 可以看出,使用胞映射法时,即使胞的尺寸很小,也很难求得精确的不动点,所求得的周期胞有时是某一周期运动的吸引胞,有时是非周期运动。在这个例子中, $P-2$ 周期胞是 $P-1$ 运动的吸引胞。当胞的数目过少时,有时把一种周期运动误认为是两种周期运动,产生错误的吸引域,如图 5 中的第二图所示。由图 5 中的右侧两图可以看出,当分析区域中的胞足够多时,胞映射法可以得到与胞映射——点映射法同样的效果。

3.2 实例二

分别在分析区域分成 $7 \times 112, 35 \times 560, 71 \times 1120$ 和 143×2240 个胞,进行计算,当微分方程中的 $f = 0.0, \Delta f = 0.05$ 时:

3.2.1 用胞映射——点映射综合法进行计算

用胞映射——点映射综合法进行计算,结果表明系统中不存在任何周期运动。

用点映射法进行计算,结果也表明系统中不存在任何不动点。

3.2.2 用胞映射法进行计算

用胞映射法进行了同例的计算,分别在分析区域分成 $7 \times 112, 35 \times 560, 71 \times 1120$ 和 143

× 2240 个胞进行计算。计算出系统存在多种周期运动。图 6、图 7 为用胞映射求得的 $P-1$ 和 $P-2$ 运动的时间历程曲线和相平面图。

利用胞映射法得出的时间历程曲线图形及数值结果表明,使用胞映射法时,无论胞的尺寸多么小,有时得出的任何一种周期胞,既不是某一周期运动的吸引胞,也不是周期运动。图 5 和图 6 仅是两个例子。

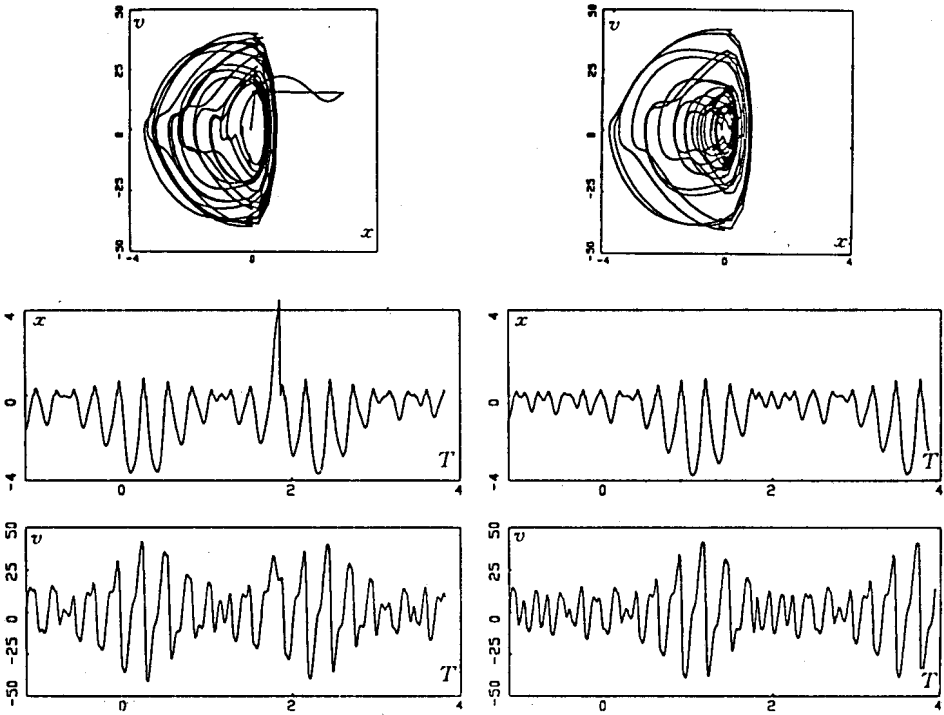


图 6 用胞映射法求得的 $P-1$ 运动图

图 7 用胞映射法求得的 $P-2$ 运动图

表 1 列出在分析区域分成每种胞的个数情况下,所得周期运动的数目。

表 1 周期运动的数目表

	分析区域中的个数			
	7×112	35×560	71×1120	143×2240
周期运动数目	3	9	25	33

3.3 所用的计算机机时(表 2)

表 2 所用机时比较

	胞 的 个 数			
胞的划分	7×112	35×560	71×1120	143×2240
CPU	0.85	15.7	50.6	202.9
数据传送	1.09	51.4	203.6	811.3
时间(分钟)	2.75	67.1	254.2	1014.2