普通高等教育“十一五”国家级规划教材

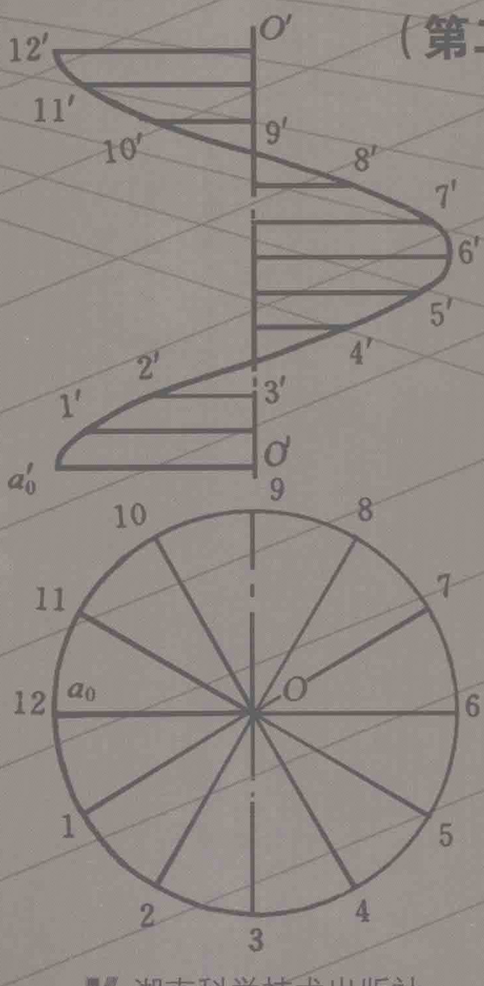
现代 工程图学

（第二版）

XIANDAI GONGCHENGTUXUE

周良德 朱泗芳 杨世平 主编

下册



湖南科学技术出版社
Hunan Science & Technology Press

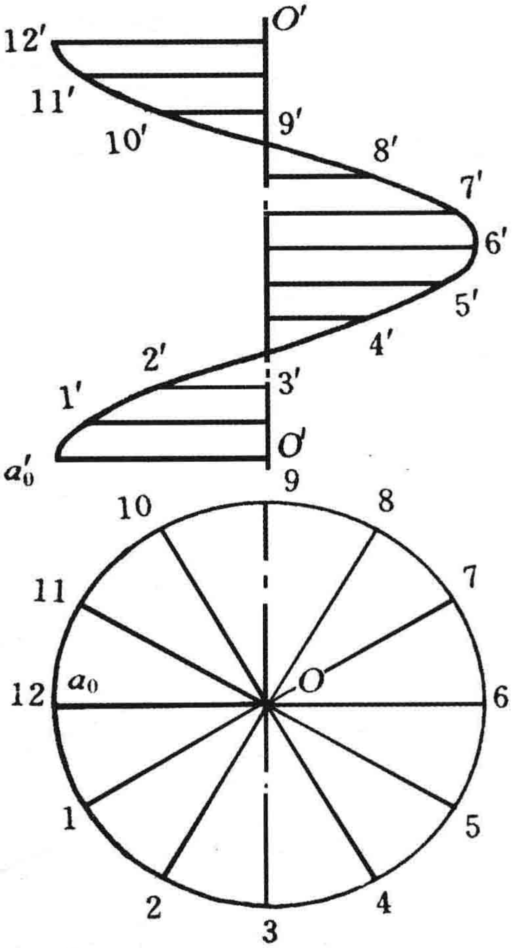
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

现代工程图学

XIANDAI
GONGCHENGTUXUE

下册

周良德 朱泗芳 杨世平 谢海波
罗益宁 朱中喜 邱爱红 周述璋
董承明/编著



湖南科学技术出版社
Hunan Science & Technology Press

图书在版编目（C I P）数据

现代工程图学. 下册 / 周良德，朱泗芳，杨世平主编.
2 版.—长沙：湖南科学技术出版社，2008.8
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
ISBN 978-7-5357-5081-5

I. 现… II.①周…②朱…③杨… III.工程制图－高等学校－教材 IV.TB23

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 132604 号

现代工程图学 下册

主　　编：周良德　朱泗芳　杨世平
责任编辑：徐　为
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市湘雅路 276 号
　　　　　http://www.hnstp.com
印　　刷：衡阳博艺印务有限责任公司
　　　　　（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂　　址：湖南省衡阳市黄茶岭光明路 21 号
邮　　编：421008
出版日期：2008 年 8 月第 2 版第 4 次
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：16.75
字　　数：418000
书　　号：ISBN 978-7-5357-5081-5
定　　价：26.50 元

内 容 提 要

《现代工程图学》（第二版）是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是在2000年由湖南科学技术出版社出版、周良德等编著的《现代工程图学》一书的基础上修订而成，并全部采用国家质量监督检验检疫总局和国家标准化管理委员会最新发布的国家标准，全书分上、下册出版。

下册分为10章。主要内容有曲线曲面，用图解法求解空间问题，用形数结合的方法求解空间问题，构形设计，焊接图，展开图，房屋建筑图，透视图和计算机绘图。

其中计算机绘图采用AutoCAD2007中文版，分为三章，即AutoCAD的基本知识，平面图形的绘制和零件图装配图的绘制。

全书（上、下册）是高等院校机械类、近机类和其他工程类专业的必修教材。上册是本课程的“基础知识公共平台”，适用于上述所有各专业选用。下册是提高课程起点，更新知识结构，拓宽知识面，加大信息量，反映新知识、新理论和新技术的重点篇章，是本课程“培养创新能力、提高综合素质、反映学生个性的重要平台”。主要适用于机械类、近机类等专业选用。教师可根据不同专业特点和培养高层次人才的需要选择其中的内容，以便因专业、因学时和因人组织施教，确保培养出来的学生基础扎实，知识面广，创新能力强，综合素质高，且独具个性。

全书也可供高等院校的教师和工程技术人员参考使用。

与本书配套的《现代工程图学习题集》也同时修订出版，供选用。

目　　录

第 14 章　曲线与曲面

§14-1　概　　述

在日常生活中曲线曲面比比皆是，从宏观来看如河流、道路、空中架设的电线、子弹在空中飞行的轨道、人造地球卫星在太空中的运行轨道等等均可看作为曲线。像凸凹不平的高山、各种机械零件和建筑物的表面、汽车的外壳、飞机的机身及船体的表面等等均为曲面。曲线曲面普遍存在于整个宇宙空间之中，并被广泛应用于工程实际之中。

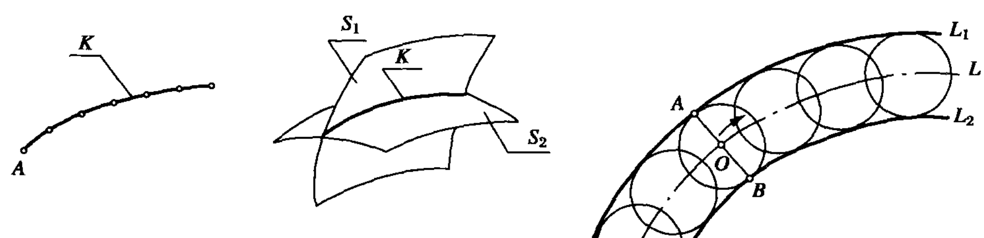
曲线曲面造型设计一直是工程界和图学界的主攻研究方向。因此对曲线曲面的研究，无论在理论上，还是在实际应用中都具有极其重要的意义。特别是在计算机技术飞速发展的今天，这种研究无疑对利用计算机生成和处理曲线曲面及用计算机进行曲线曲面的造型设计都更具有实际意义。

本章将重点研究工程上应用广泛的曲线曲面。同时还将介绍曲线的拟合，曲面的骨架给定等内容，为曲线曲面的造型设计打下基础。

§14-2　曲线的基本概念、投影及其性质

一、曲线的形成

（1）轨迹法：曲线是点运动的轨迹［图 14-1（a）］。



(a) 点的运动轨迹　(b) 两曲面的交线　(c) 线族的包络线一般是曲线

图 14-1　曲线的形成

（2）交线法：曲线可看作是平面与曲面或曲面与曲面的交线［图 14-1（b）］。

（3）包络线法：曲线也可看作是由某一线束（直线族、曲线族）包络而成［图 14-1（c）］。

实际上，后两种形成方法可以归并到第一种形成方法，因为交线是两个面共有点的轨

迹，包络线是接触点（切点）的轨迹。

二、曲线的分类

曲线可分为平面曲线和空间曲线。如果曲线上所有的点都在同一平面内时，叫平面曲线，如圆锥曲线；曲线上任意连续的四个点不在同一平面内时，叫做空间曲线，如螺旋线。

点按一定规律运动形成的曲线称为规则曲线，否则为不规则曲线；规则曲线可用图形或数学方程式表示，例如正弦曲线，既可用 $y=\sin x$ 的方程式表示，也可以用图形来表示，因此是规则的平面曲线。同理，螺旋线是规则的空间曲线。不规则曲线只能用图形或近似的数学方程式近似地表示（曲线拟合）。如机翼曲线就是非规则曲线。

三、曲线的图示给定

曲线是点的集合，曲线的投影可以用连接曲线上各点的同面投影的方法给定（图 14－2）。为了确切地表示出曲线，常常将曲线上的一些特殊点，如起点、终点、极限点、反曲点、曲率极值点以及重影点等画出，并予以标注。如图 14－3（a）、（b），两图的投影相同，但标注不同，因此其曲线的形状也不同。

四、曲线的一般投影性质

（1）曲线的投影一般仍为曲线（图 14－3）。其投影的次数不变，即二次曲线的投影仍为二次曲线，如圆锥曲线（圆、椭圆、抛物线、双曲线）的投影仍为圆锥曲线。特殊情况下，空间曲线的投影次数可能减少，但不可能投影为直线。

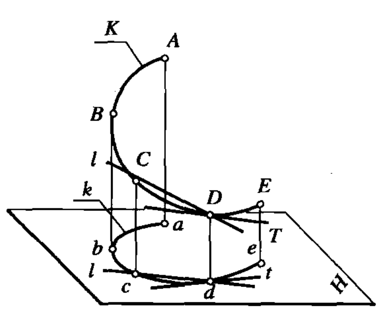


图 14－2　曲线的投影

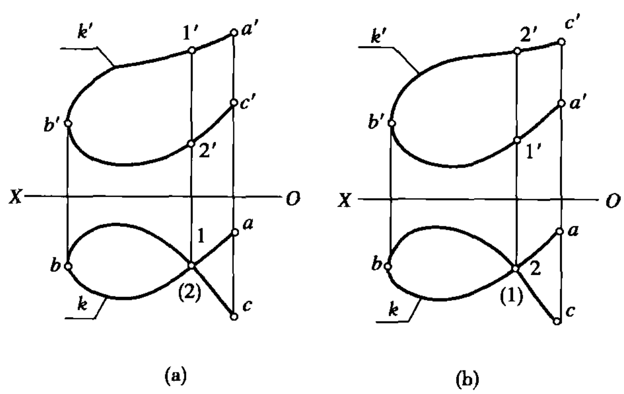


图 14－3　空间曲线的投影作法

（2）曲线上的点的投影必在曲线的同面投影上（图 14－2）。

（3）直线与曲线相交，其投影必定相交（图 14－2）。

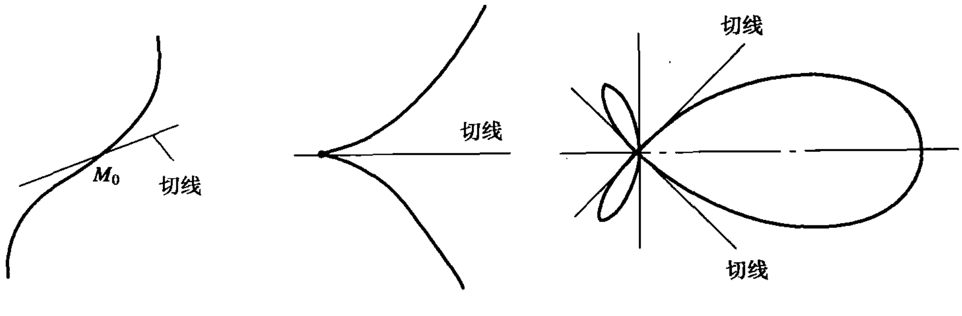
（4）直线与曲线相切，其投影也相切，且切点不变（图 14－2）。

（5）平面曲线上具有切点性质的奇异点，如反曲点（拐点）、尖点（回折点）、多重点（结点），投影后其性质不变，即反曲点、尖点、多重点的投影仍为反曲点、尖点、多重点（图 14－4）。这里要注意，空间曲线上的特殊点不一定具有这种投影性质，但空间曲线投射到平面上时，其投影可能会出现这种平面曲线的奇异点的情况（图 14－4）。

五、曲线的实长

工程上的曲线实长常采用近似图解法求得，作图时先将空间曲线展成平面曲线，再展成直线。如图 14－5 所示为一曲线 AE，欲求其实长，可将曲线分成若干段线段，用直角三角形法求出各段实长，顺次相连得平面曲线 A_0E_0，再将 A_0E_0 展开成一直线 AE，即为所求

曲线实长。



(a) 反曲点　　(b) 尖点　　(c) 多重结点

图 14－4　奇异点

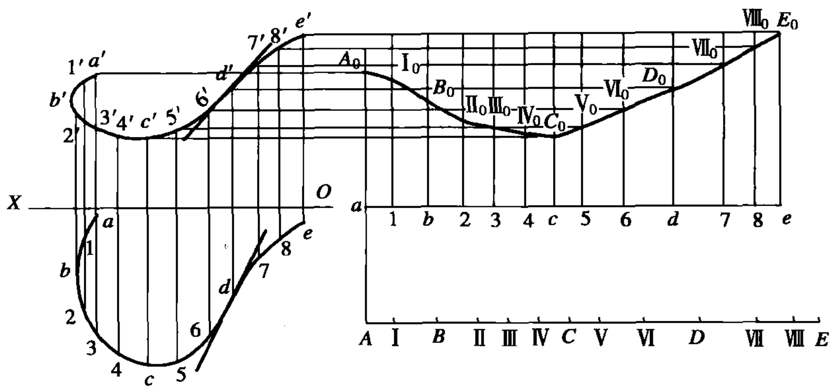


图 14－5　求曲线的实长

§ 14－3　工程上常用的曲线

工程实践中应用最广的平面曲线有圆锥曲线（二次曲线）及阿基米得螺线、渐开线、摆线等几种特殊的曲线；应用最广的空间曲线有螺旋线。

下面重点介绍几种重要曲线的投影、性质及其在工程上的应用。

一、二次曲线的方程

1. 二次曲线的一般方程

代数曲线方程 $F(x, y)=0$ 所有各项中的最高次项的次数为二次，则该曲线称为二次曲线，其方程可以写成下面的一般形式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{1}$$

式中，A，B，C，D，E，F 为代数方程的系数，(1) 式两边同除以 x^2 项的系数 A，则得

$$x^2+\frac{B}{A}xy+\frac{C}{A}y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0 \tag{2}$$

由代数曲线的一般理论可知，二次曲线可由 $\frac{n(n+3)}{2}=5$ 个点所确定（n 为方程的

次数)。

二次曲线与任一直线相交于两点(实点和虚点)。

2. 圆锥曲线的方程

二次曲线方程(2)经过坐标变换和化简之后,可写成九种标准方程中的任一种形式,其中最常见的有

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{3}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4}$$

$$y^2=2px \tag{5}$$

与之相应的曲线分别称之为椭圆(3)(当 $a=b$ 时为圆),双曲线(4),抛物线(5)。其中圆、椭圆、双曲线为有心曲线,抛物线为无心曲线,由于这些曲线可用平面截切正圆锥面而得到(图 14-6),故称这些曲线为圆锥曲线。

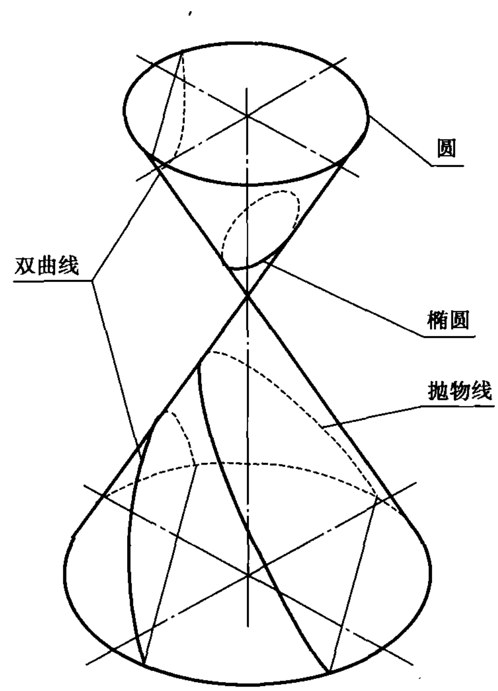


图 14-6 圆锥曲线

二、圆的投影及其性质

圆是平面曲线中最常见的一种曲线,除了具有前面提到的平面曲线的投影特性之外,还具有它本身的一些特有性质。

(1) 倾斜于投影面的圆,其投影为椭圆(图 14-7)。

(2) 倾斜于投影面的圆上任意一对互相垂直的直径,投射成椭圆的一对共轭直径*(图 14-7)。

(3) 倾斜于投影面的圆上一对互相垂直的直径,其中有一条直径为投影面平行线时,则它们在该投影面上的投影为椭圆的一对长、短轴(图 14-8)。

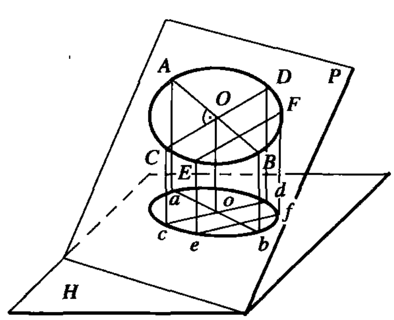


图 14-7 倾斜投影面的圆的投影

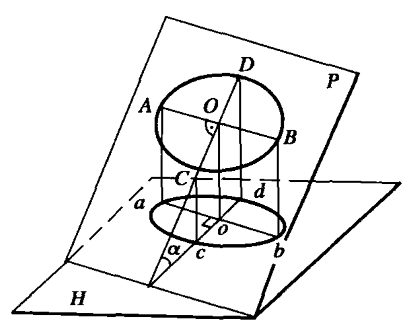


图 14-8 直径投影成长、短轴

只要知道椭圆的长、短轴或一对共轭直径便可用作图法画出椭圆。

* 共轭直径——有一直径对(或直径偶),其中每条直径平分那些与另一直径平行的弦,称椭圆中的这两直径是互为共轭的直径。

〔**例 14－1**〕已知▱1234 为一般位置平面，今在其上以 O 点为圆心，作一直径为 $2R$ 的圆，试作出其两面投影（图 14－9）。

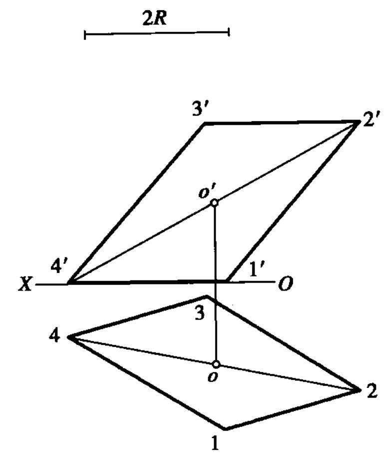


图 14－9　求作一般位置平面上圆的投影

分析　由于一般位置平面对 H，V 面都倾斜，故过 o 所作的圆的投影均为椭圆。于是只要确定其长、短轴，便可作出其投影。

解　用最大斜度线定短轴的方向和长度（图 14－10）。

（1）求水平投影椭圆的长、短轴。

如图 14－10（a）所示，过点 O 作属于平面的水平线 MN（mn，$m'n'$），在 mn 上取 $oa=ob=R$，ab 即为长轴。再过点 O 作属于平面的对 H 的面的最大斜度线 OK，用直角三角形法求出它的实长 OK_0，并在 OK_0 上取线段 R，求得对应的水平投影长度 oc，再在 ok 的延长线上取 $od=oc$，cd 即为短轴。

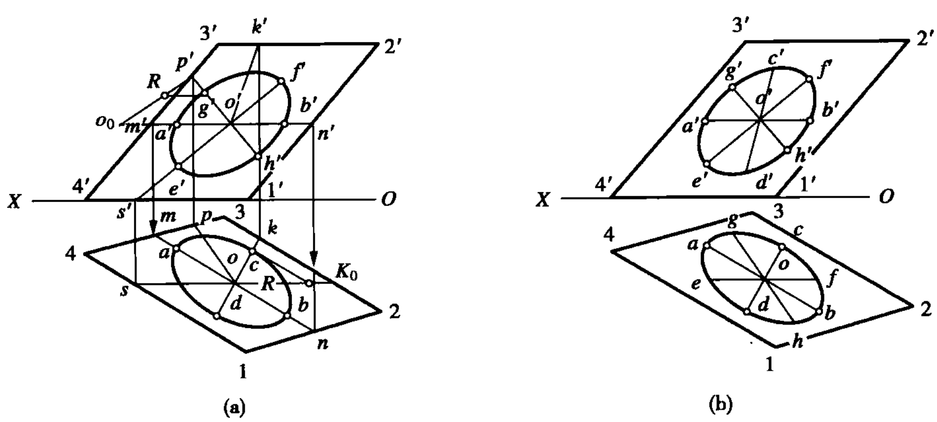


图 14－10　用最大斜度线求圆的投影

（2）用同样的作图方法求出正面投影椭圆的长、短轴。

图 14－10（b）画出所求圆的两面投影。

三、椭圆及其投影特性

椭圆也是常见的平面曲线，它除了具有上述曲线及平面曲线的所有投影性质外，还具有下列投影特性。

（1）在特定条件下，椭圆的投影可能为一圆（图 14－11）。

如图 14－11 所示，当椭圆的短轴平行于投影面，而长轴的投影长度恰等于短轴时，其投影为圆。

（2）椭圆的一对共轭直径，投影后性质不变，即仍为其投影椭圆的一对共轭直径（图 14－12）。

根据椭圆的任意一对共轭直径，便可作出椭圆。

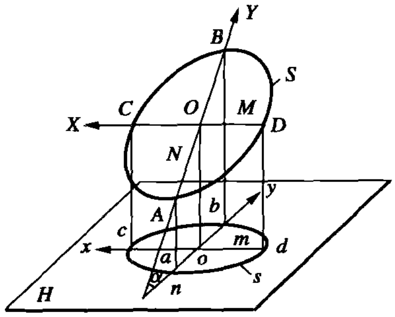


图 14-11　椭圆的投影为圆的情况

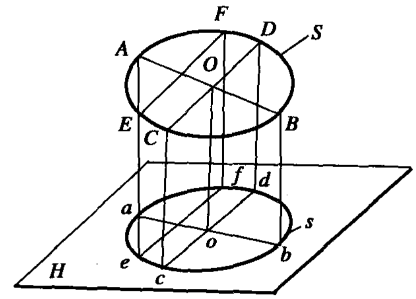
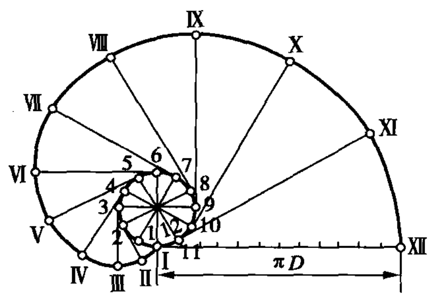


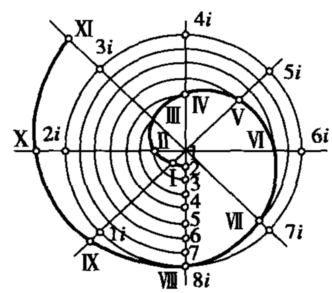
图 14-12　共轭直径的投影性质

四、几种特殊的平面曲线

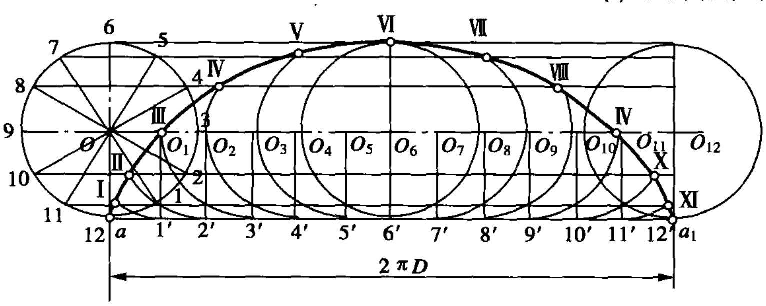
工程中常用到的特殊平面曲线有渐开线、阿基米德螺线和摆线等，如图 14-13 所示。在第 16 章中读者还可见到著名的高次代数曲线，如三次或四次曲线。



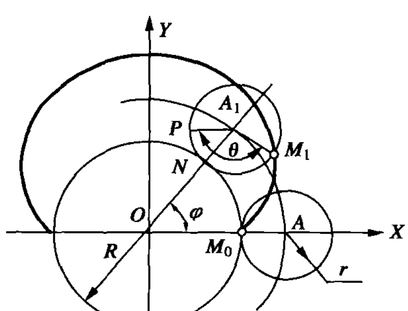
(a) 渐开线



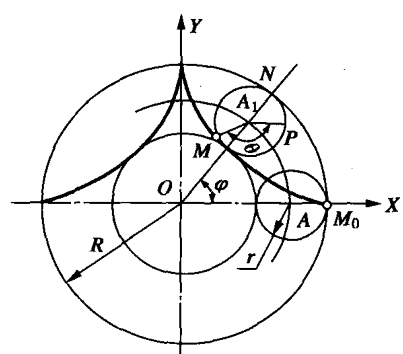
(b) 阿基米德螺线



(c) 平摆线



(d) 外摆线



(e) 内摆线

图 14-13　特殊平面曲线

五、圆柱螺旋线

工程上应用最广的空间曲线是圆柱螺旋线，机械零件中的螺纹、圆柱螺旋弹簧等都是圆柱螺旋线具体应用的例子。

1. 圆柱螺旋线的形成

一动点 A 沿圆柱母线作等速直线运动，同时该母线又绕圆柱的轴线作等速旋转运动，点在空间形成的复合运动轨迹称为圆柱螺旋线（图 14－14）。

2. 圆柱螺旋线的三个基本要素

（1）圆柱螺旋线所在的圆柱面称为导圆柱面，导圆柱面的轴线即为螺旋线的轴线，导圆柱面的直径即为螺旋线的直径。

（2）当母线按不同方向旋转时，分别形成右螺旋线和左螺旋线，我们把螺旋线的旋转方向简称为旋向。判别左、右螺旋线可分别用左、右手法则；拇指指向为点沿母线移动的方向，另四指弯曲的方向为母线旋转方向。显然，图 14－14 符合右手法则，为右螺旋线。

（3）母线旋转一周，动点上升的高度称为导程，用 P_h 表示，如图 14－14 所示。

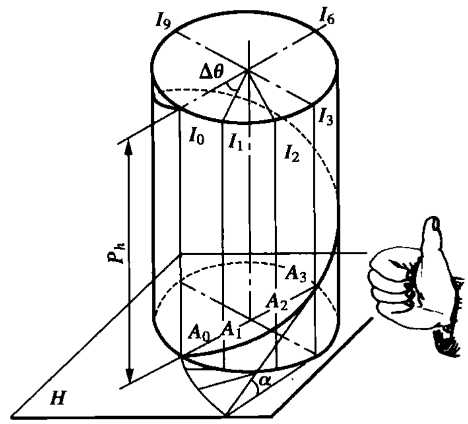


图 14－14　圆柱螺旋线的形成

导圆柱面的直径、旋向和导程是确定螺旋线形状的三个要素，只要改变螺旋线的基本要素，就可以得到不同的螺旋线。

3. 圆柱螺旋线的投影

设导圆柱面垂直 H 面，直径为 D，导程为 P_h，动点的原始位置为 O，螺旋线的投影如图 14－15（a）所示，作图步骤如下：

（1）画出导圆柱的投影，将底圆和导程分为 n 等份（图中 $n=12$）。

（2）由圆周上各等分点作垂线，与导程上的相应等分点作的水平直线相交，得出 $1'$，$2'$，…即为螺旋线上点的正面投影。

（3）依次光滑连接 $1'$，$2'$，$3'$，…点，即得到螺旋线的正面投影。由图可知，螺旋线的正面投影为一正弦曲线，圆柱后面部分的$\overset{\frown}{6'12'}$用虚线表示，水平投影积聚为一周。

4. 螺旋线的两个基本性质

图 14－15（b）为圆柱螺旋线的展开图（其作图方法见第 18 章），系按图 14－5 求空间曲线实长的作法画出。由于点运动时水平方向与铅垂方向都作等速运动，即母线旋转的弧长（$r\cdot\theta$）与动点上升的距离 P_h 之比为一常数，所以圆柱螺旋线展开应成一直线，它是以导圆柱底圆周长（πD）和导程（P_h）为两直角边的直角三角形的斜边。

由展开图可知，圆柱螺旋线与圆柱上所有母线相交成定角 β，称之为螺旋角，β 的余角 α 称为圆柱螺旋线的升角。对于同一条螺旋线来说，它的 α，β 角是一常数。由此得出：

（1）从圆柱螺旋线上的任一点所作的切线与水平面成相等的 α 角（图 14－14），故称圆柱螺旋线为定倾曲线。由图 14－15 知，其升角

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{P_h}{\pi D}$$

在一个导程内，螺旋线的长度

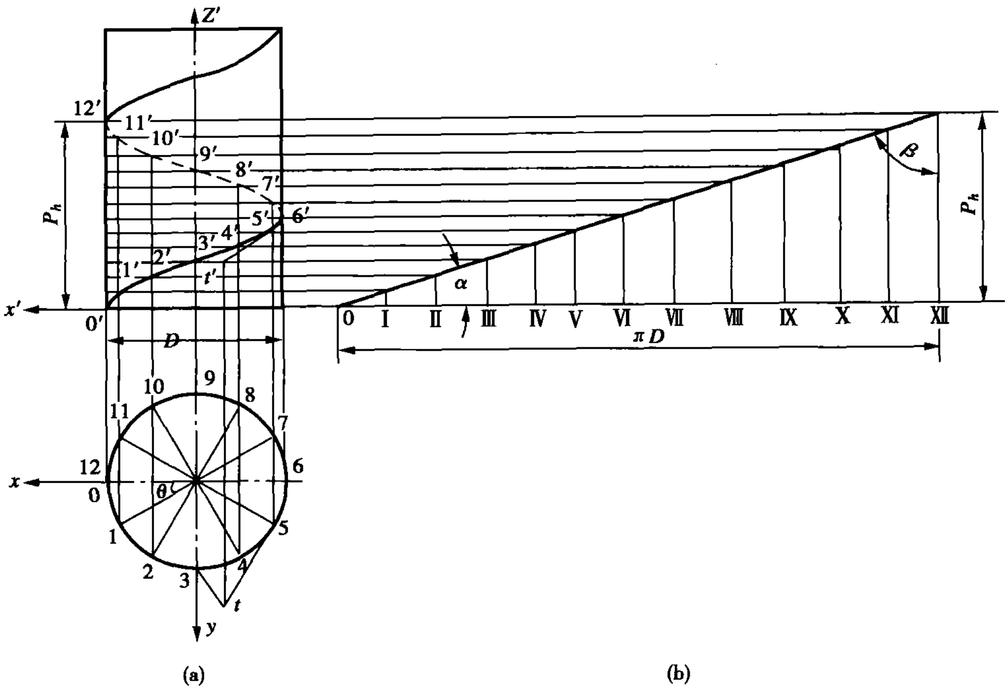


图 14－15　圆柱螺旋线的画法及展开

$$L=\sqrt{P_h^2+(\pi D)^2}$$

（2）圆柱螺旋线是圆柱面上不在同一素线上的两点之间最短距离的连线，称为圆柱面上的测地线。

5. 圆柱螺旋线的参数方程

取动点所在的母线绕轴线（Z 轴）的旋转角 θ 作为参数，则有：

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=K\theta \end{cases} \tag{6}$$

式中 r 为导圆柱的半径，$K=\dfrac{P_h}{2\pi}$，P_h 为导程。圆柱螺旋线的投影亦可按（6）式根据点的运动规律形成螺旋线的方法作出。

从（6）消去参数 θ，可以得到螺旋线方程的一般形式

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ y=r\sin\dfrac{z}{K} \end{cases} \tag{7}$$

或
$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ x=r\cos\dfrac{z}{K} \end{cases} \tag{8}$$

这说明，不管动点的始点在 X 轴上还是在 Y 轴上，螺旋线的水平投影为一圆周，其正面投影可能是余弦曲线（始点在 X 轴上）或正弦曲线（始点在 Y 轴上）。

6. 圆柱螺旋线的切线作法

由曲线的投影性质可知，曲线上某点的切线，它的投影与曲线在同一投影面上的投影

仍相切。如欲在螺旋线上的V点作切线，则切线的水平投影必与圆柱螺旋线的水平投影（圆周）切于5，$5t$即为该切线的水平投影，根据圆柱螺旋线的性质，过V点的切线与水平面成相等的升角α。如图14－15（a）所示，取$5t=\widehat{53}$，过t作OX轴的垂线交过$3'$所作OX轴的平行线于t'，连$5't'$即为所求。线段VT的水平投影为$\frac{2}{12}\pi D$，正面投影的Z坐标差为$\frac{2}{12}P_h$，由直角三角形法求线段实长的原理可知，此时线段VT与H面的夹角等于α，且又过切点V，故VT为所求的切线。

六、圆锥螺旋线

图14－16为一左旋圆锥螺旋线的投影图和展开图；圆锥螺旋线的形成、性质及作图与圆柱螺旋线相似，即由一动点沿一正圆锥的母线作匀速直线运动，同时该母线又绕圆锥轴线作匀速转动，该动点的轨迹即为圆锥螺旋线。其导面为圆锥面，导程Ph沿母线度量，也可沿轴线度量。

圆锥螺旋线的投影作法：将导程或圆锥底圆的水平投影分成n等份（图中$n=8$）。过圆锥底圆的各分点引母线的正面投影和水平投影，过正面投影上的各导程分点引OX轴的平行线交相应的母线，从而得出一些点的正面投影，再求出这些点的水平投影，光滑连接各点，则得到圆锥螺旋线的两投影。其水平投影及展开图为一阿基米德螺线，正面投影为一条振幅逐渐缩小的正弦曲线。

圆锥螺纹、圆锥螺旋弹簧及某些凸轮都是圆锥螺旋线应用的实例。

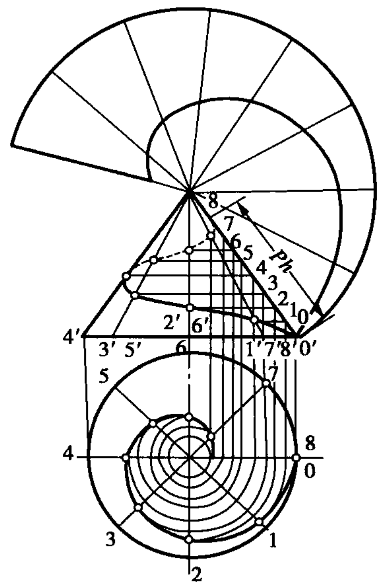


图14－16　圆锥螺旋线的画法及展开

七、圆弧面螺旋线

（1）形成　当一动点沿圆弧回转面上的母线（圆弧）作等速的圆弧形运动，而该母线又作等角速度旋转时，动点的合成运动轨迹即为圆弧面螺旋线。母线回转一周时，点在母线上移动的弧长称圆弧面的导程P_h，导面为回转面。

（2）画法　圆弧面螺旋线的画法与圆柱螺旋线相同，具体画法见图14－17（a）。

（3）应用　图14－17（b）为圆弧面螺旋线应用于圆弧面蜗杆的情况。

§14－4　曲线的拟合

飞机的机翼、发动机和汽轮机的叶片及舰船等曲线的形状都是通过风洞试验、水池试验或其他一些实验确定得来的，这些曲线目前还无法用数学方程进行确定，而只能用一些离散的型值点（简称离散点或型值点）来描述它们的大致走向。为了进一步分析这些曲线的几何性质，或者为了加工出这些曲线，常常需要将离散的型值点构造出符合实际要求的连续曲线，根据离散的型值点求得一条连续的曲线使它符合实际的要求，称为曲线的拟合。

在曲线拟合中，还提出如何用简单的曲线代替复杂的曲线这一要求的问题。例如，用

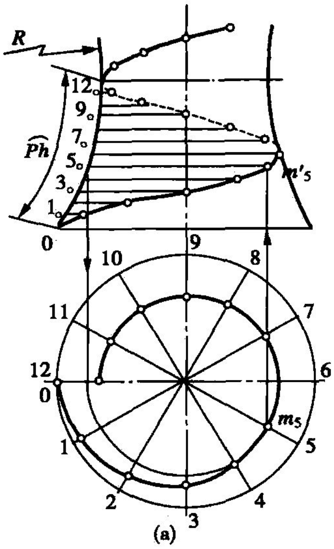


图 14 - 17　圆弧画螺旋线的画法及应用

线切割机可以切割直线和圆弧，更复杂一点也不过用来切割抛物线和三次曲线，但是运用一定的数学方法，便能使它切割一些更复杂的曲线。

曲线拟合的方法很多，可以用插值、圆弧曲线、样条等方法拟合，下面简单介绍这三种曲线拟合。

一、线性拟合（用分段直线代替曲线）

线性拟合就是运用所谓的“线性插值法”求某两个数据之间的数据，我们在查取三角函数表格中的某些数据时，用的就是这种方法。线性插值法是插值的最简单形式，其基础就是通过点（x_1，y_1）和（x_2，y_2）的线性逼近，如图 14 - 18 所示。

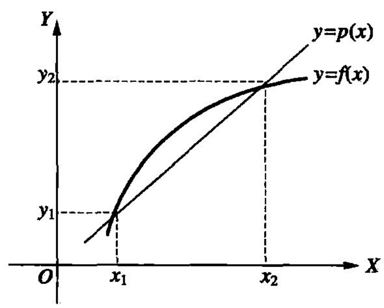


图 14 - 18　线性插值

若已知函数 $y=f(x)$ 在 x_1，x_2 上的值分别为 y_1，y_2，要求作一个一次多项式

$y=p_1(x)$，使 $p_1(x_1)=y_1$，$p_1(x_2)=y_2$

由直线的两点式知这条直线的方程为

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)=p_1(x) \tag{1}$$

式中 $p_1(x)$ 是 x 的一次函数，称为一次多项式，又叫线性插值。在区间 $[x_1, x_2]$ 上用 $y=p_1(x)$ 的值去近似 $y=f(x)$ 的值，其余项为：

$$R_1(x)=f_1(x)-p_1(x)$$

例如已知某曲线上两点 A（100，10），B（121，11），求位于 A，B 之间 $x=115$ 的 C 点的函数 y。

将 A，B 点的坐标值代入（1）式，可得插值多项式为：

$$y=10+\frac{11-10}{121-100}(x-100)$$

将 $x=115$ 代入得 $y=10.71428$。

二、圆弧拟合

如果需要在各型值点有连续的斜率，线性拟合就不能满足要求，这时可采用圆弧拟合。即用分段圆弧代替曲线，并且要求相邻两圆弧具有公切线。于是这条由不同圆弧（或加上一些直线）相切组成的新曲线拟合了给定的型值点，近似地接近已知曲线，我们称之为合成曲线（拟合弧）。此类曲线计算较为简单，在工程中得到广泛的应用（如用于圆屋顶、拱门、凸轮及机翼等外形设计上）。

例如某机翼模型的形状如图 14－19 所示。设圆 O 的半径为 P，圆 O' 的半径为 q，O' 的坐标为 (a, b)，又设机翼上缘的一些离散点是 $A_i(a_i, b_i)$ $(i=1, 2, \cdots, 10)$，现在要用分段圆弧光滑地连接这些离散点，并使它与圆 O 和圆 O' 均相切。

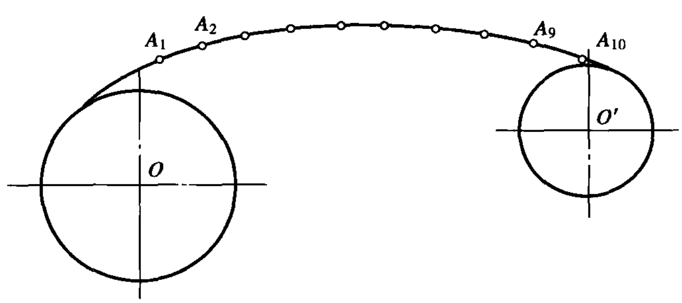


图 14－19　圆弧拟合

从圆的方程可知，要确定一个圆须有三个独立条件，为此，对上述问题，我们可以作如下考虑：

过 A_1，A_2 作圆 O_1 使和圆 O 相切，过 A_2，A_3 作圆 O_2 使它与圆 O_1 相切，一般的，过 A_i，A_{i+1} 作圆 O_i 使它与圆 O_{i-1} 相切……最后过 A_{10} 作圆 O_{10}，使它与圆 O_9 和圆 O' 相切。

由此可知，要确定这些圆，只要解决下面三类问题就够了。

（1）已知圆 O 和圆外两点 $A_1(a_1, b_1)$，$A_2(a_2, b_2)$ 求圆 O_1，使它通过 A_1，A_2，并且与圆 O 相切。

（2）已知圆 O_1 和圆外一点 $A_3(a_3, b_3)$，求圆 O_2 使它通过定点 A_3，并且和圆 O_1 相切于定点 $A_2(a_2, b_2)$。

（3）求作一圆与两圆相切，并且和其中一圆切于定点。

由以上分析可知，在切割机翼模型的问题中，求圆 O_1 属于第一类问题，求圆 $O_2 \cdots O_9$ 属于第二类问题，求圆 O_{10} 属于第三类问题。

由于圆弧曲线拟合的方法较多，如有双圆弧曲线拟合，圆弧样条曲线拟合等，在此不一一介绍。应当特别指出，圆弧曲线拟合只能达到一阶光滑。

三、样条拟合

圆弧拟合的光滑性比线性拟合有了提高，但它在型值点曲率还是有间断的，即整条曲线的二阶导数是不连续的。在实际问题中，往往需要一种具有连续的一阶导数和连续的二阶导数的拟合曲线，对于这类问题普遍采用的是样条拟合方法。

所谓样条曲线是指人们为了用一条光滑曲线拟合给定的一组平面离散点，而常用一种