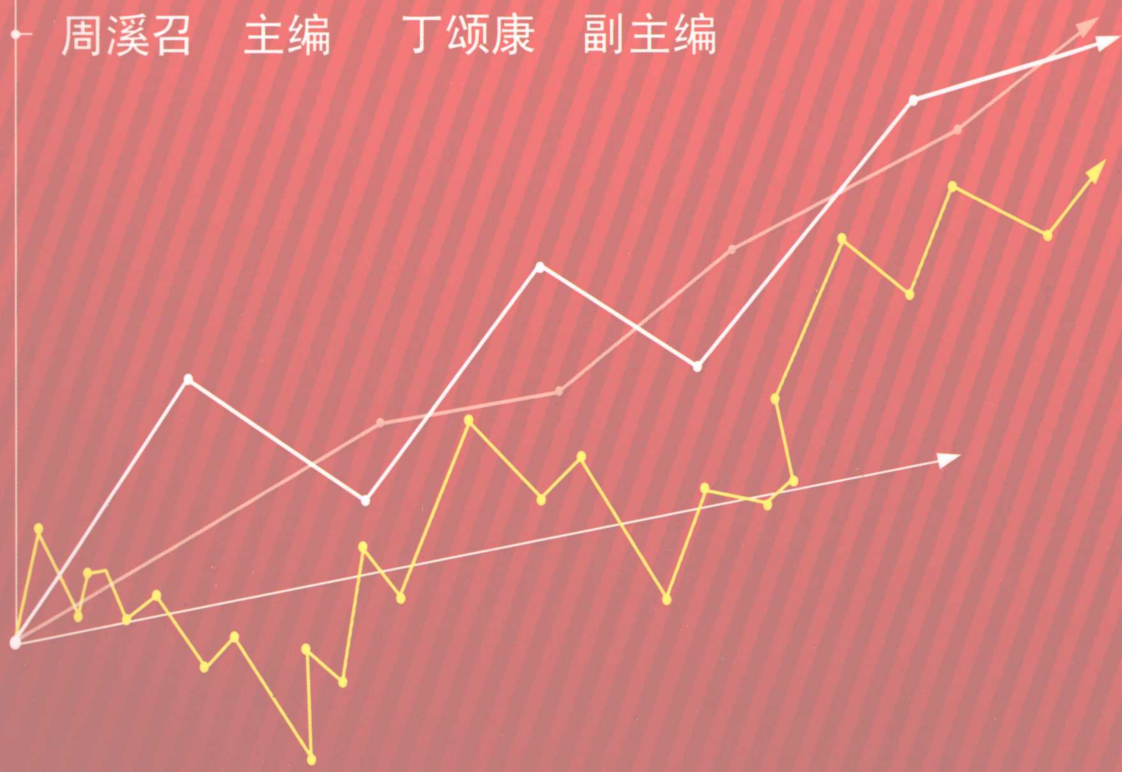
普通高等教育“十一五”规划教材

上海市教委重点课程建设教材

Operations Research & Applications

运筹学及应用

周溪召　主编　　丁颂康　副主编



化学工业出版社

普通高等教育“十一五”规划教材

上海市教委重点课程建设教材

Operations Research & Applications

运筹学及应用

周溪召　主编
丁颂康　副主编

化学工业出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

运筹学及应用/周溪召主编．—北京：化学工业出版社，2009.1
普通高等教育“十一五”规划教材
ISBN 978-7-122-04478-5

Ⅰ．运…　Ⅱ．周…　Ⅲ．运筹学　Ⅳ．O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 207827 号

责任编辑：尤彩霞　　文字编辑：贺婷婷　张　娟
责任校对：王素芹　　装帧设计：张　辉

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　装：化学工业出版社印刷厂
720mm×1000mm　1/16　印张 14¾　字数 390 千字　2009 年 3 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：29.80 元

前言

本书是上海市教委重点课程建设之一——《运筹学》课程建设的教材部分。

运筹学主要研究经济活动和军事活动中能用数量来表达的有关策划、管理方面的问题。当然，随着社会的进步和科技的发展，运筹学的许多内容不但用于研究经济和军事活动，有些已经深入到日常生活当中了。运筹学可以根据问题的要求，通过数学上的分析、运算，得出各种各样的结果，最后提出综合性的合理安排，以达到最好的效果。

由于社会发展的需要，运筹学课程在工科、管理类院校的开设越来越普遍，其重要性越来越突出。为适应相关专业的学生学习管理科学知识的需要，我们在总结多年教学工作和科研项目的基础上，编写了本书。

本书绪论、第二章、第三章、第四章、第六章、第十五章由周溪召编写，第一章、第七章、第八章由丁颂康编写，第五章、第十四章由贾晓霞编写，第九章、第十一章由王正编写，第十章、第十二章、第十三章由刘娟娟、智路平编写，全书由周溪召统稿。

本书可作为高等学校管理类专业本科生和研究生的教材，亦可作为广大管理人员、工程技术人员及领导干部的培训教材和自学参考书。

由于编者水平所限，疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2008 年 10 月

目录

绪　论

0.1 运筹学的发展历史及在我国的发展

何谓“运筹学”？它的英文名称是 operations research——“OR”，直译为“作业研究”，就是研究在经营管理活动中如何行动、如何以尽可能小的代价来获取尽可能好的结果，即所谓“最优化”问题。中国学者把这门学科意译为“运筹学”，就是取自古语“运筹于帷幄之中，决胜于千里之外”之意，其意为运算筹划，出谋献策，以最佳策略取胜。这就极为恰当地概括了这门学科的精髓。

在人类历史的长河中，运筹谋划的思想俯首皆是，经典的运筹谋划案例也不鲜见。《孙子兵法》就是我国古代战争谋略之集大成者；诸葛亮更是家喻户晓的一代军事运筹大师。然而，运筹学真正作为一门现代科学，是在第二次世界大战期间首先在英美两国发展起来的，有的学者把运筹学描述为就组织系统的各种经营作出决策的科学手段。P. M. Morse 与 G. E. Kimball 在他们的奠基著作中给运筹学下的定义是：“运筹学是在实行管理的领域，运用数学方法，对需要进行管理的问题统筹规划，作出决策的一门应用科学。”运筹学的另一个定义是：“管理系统的人为了获得关于系统运行的最优解而必须使用的一种科学方法。它使用许多数学工具（包括概率统计、数理分析、线性代数等）和逻辑判断方法，来研究系统中人、财、物的组织管理、筹划调度等问题，以期发挥最大效益。”

现代运筹学的起源可以追溯到几十年前，在某些组织的管理中最先试用科学手段的时候。然而，现在普遍认为，运筹学的活动是从第二次世界大战初期的军事任务开始的。当时迫切需要把各项稀少的资源以有效的方式分配给各种不同的军营及各项军事活动中，所以美国及随后美国的军事管理当局都号召大批科学家运用科学手段来处理战略与战术问题，实际上这便是要求他们对种种（军事）活动进行研究，这些科学家小组正是最早的运筹小组。

第二次世界大战期间，运筹学成功地解决了许多重要的作战问题，显示了科学的巨大物质威力，为运筹学后来的发展铺平了道路。

当战后的工业恢复繁荣时，由于组织内与日俱增的复杂性和专门化所产生的问题，使人们认识到这些问题基本上与战争中所曾面临的问题类似，只是具有不同的现实环境而已，运筹学就这样潜入工商企业和其他部门，并于20世纪50年代以后得到了广泛的应用。运筹学学者们通过对系统配置、聚散、竞争的运用机制进行了深入的研究和应用，形成了比较完备的一套理论，如规划论、排队论、存储论、决策论等，由于其理论上的成熟和电子计算机的问世，又大大促进了运筹学的发展。这一时期世界上不少国家成立了致力于该领域及相关活动的专门学会，美国于1952年成立了运筹学会，并出版期刊《运筹学》，其他国家也先后创办了运筹学会与期刊，1957年成立了国际运筹学协会。

运筹学发展至今，已有六十多年的历史，其内容已相当丰富，所涉及的领域也十分广泛。以《运筹学国际文摘》收集的各国运筹学论文的内容为例，按技术分类就有五十多种。

现在这门新兴学科的应用已深入到国民经济的各个领域，成为促进国民经济多快好省、健康协调发展的有效方法。

现代运筹学被引入我国是在20世纪50年代后期。中国第一个运筹学小组在钱学森、许国志先生的推动下，在1956年于中国科学院力学研究所成立。可见，运筹学一开始就被理解为同工程有密切联系的学科。

1959年，第二个运筹学部门在中国科学院数学研究所成立。1960年，力学所运筹学小组与数学所运筹学小组合并成为数学研究所的一个研究室，当时的主要研究方向为排队论、非线性规划和图论，并有专家专门研究运输理论、动态规划和经济分析（如投入产出方法）。

1963年是中国运筹学教育史上值得一提的一年，数学研究所的运筹学研究室为中国科技大学应用数学系的第一届毕业生（1958届）开设了较为系统的运筹学专业课，这是第一次在中国的大学里开设运筹学专业并进行授课。今天，运筹学的课程已成为几乎所有大学的商学院、工学院乃至数学系和计算机系的基本课程。

20世纪50年代后期，运筹学在中国的应用集中在运输问题上，其中一个广为流传的例子就是“打麦场的选址问题”，目的在于解决当时在手工收割为主的情况下如何节省人力和时间的问题。国际上众所周知的“中国邮路问题”模型也是在那个时期由管梅谷教授提出的。所以，现在非常热门的“物流学”，在当时已有一些初步的研究。

改革开放后，中国数学会于1980年成立运筹学会，1982年中国运筹学会正式成为国际运筹学联合会（IFORS）的成员。1992年中国运筹学会成为全国一级学会。

近年来，中国运筹学工作者继续坚持运筹学研究与经济建设等重大问题的紧密结合。例如，山东省与大连市经济发展计划的制订，兰州铁路局铁路运输的优化安排，中外合资经营项目的经济评价，若干国家重大工程中的综合风险分析等方面，我国运筹学者都发挥了积极作用。近二十年来，信息科学、生命科学等现代高科技对人类社会产生了巨大影响，中国运筹学工作者还关注到其中一些运筹学起作用的新的工作方向。例如，运筹学工作者将全局最优化、图论、网络流等运筹学理论及方法应用于分子生物信息学中的DNA与蛋白质序列比较、芯片测试、生物进化分析、蛋白质结构预测等问题的研究；在金融管理方面，将优化及决策分析方法，应用于金融风险控制与管理、资产评估与定价分析模型等；在网络管理上，利用随机过程方法，研究排队网络的数量指标分析；在供应链管理问题中，利用随机动态规划模型，研究多重决策最优策略的计算方法。在这些重要的新方向上，我国运筹学工作者都取得了可喜的进展及成绩，有一些已进入国际先进水平的行列，被有关同行所认可。

0.2 运筹学的特点及内容

运筹学的特点是：①运筹学的应用不受行业、部门的限制，已被广泛应用于工商企业、军事部门、民政事业等组织内的统筹协调问题的研究；②运筹学既对各种经营进行创造性的科学研究，又涉及组织的实际管理问题，它具有很强的实践性，能为决策者提供建设性意见；③运筹学以整体最优为目标，从系统的观点出发，力图以整个系统的最佳方式来解决该系统各部门之间的利害冲突；④对所研究的问题求出最优解，寻求最佳的行动方案。所以它也可看成是一门优化技术，提供的是解决各类问题的优化方法。

运筹学的研究方法有：①从现实生活场合抽出本质的要素来构造数学模型，进而寻求一个跟决策者的目标有关的解；②探索求解的结构并导出系统的求解过程；③从可行方案中寻求系统的最优解。

运筹学的具体内容包括：规划论（包括线性规划、运输规划、非线性规划、整数规划和动态规划）、图与网络分析、决策论、对策论、排队论、存储论、系统模拟等。

数学规划即上面所说的规划论，是运筹学的一个重要分支，早在1939年苏联的康托洛维奇（Канторович）和美国的希奇柯克（F. L. Hitchcock）等人就在生产组织管理和制订交通运输方案方面首先研究和应用线性规划方法。1947年旦茨格等人提出了求解线性规划问题的单纯形法，为线性规划的理论与计算奠定了基础，特别是电子计算机的出现和日益完善，更使规划论得到迅速的发展，可用电子计算机来处理成千上万个约束条件和变量的大规模线性规划问题，从解决技术问题的最优化，到工业、农业、商业、交通运输业以及决策分析部门都可以发挥作用。从范围来看，小到一个班组的计划安排，大至整个部门，以至国民经济计划的最优化方案分析，运筹学都有用武之地，具有适应性强，应用面广，计算技术比较简便的特点。非线性规划的基础性工作则是在1951年由库恩（H. W. Kuhn）和达克（A. W. Tucker）等人完成的，到了20世纪70年代，线性规划无论是在理论上和方法上，还是在应用的深度和广度上都得到了进一步的发展。

图论是一个古老但又十分活跃的分支，它是网络技术的基础。图论的创始人是数学家欧拉（Euler）。1736年他发表了图论方面的第一篇论文，解决了著名的“哥尼斯堡七桥难题”，相隔一百年后，在1847年基尔霍夫（Kirchhoff）第一次应用图论的原理分析电网，从而把图论引进到工程技术领域。20世纪50年代以来，图论的理论得到了进一步发展，将复杂庞大的工程系统和管理问题用图描述，可以解决很多工程设计和管理决策的最优化问题，例如，如何使完成工程任务的时间最少、距离最短、费用最省等。图论受到数学、工程技术及经营管理等各方面越来越广泛的重视。

排队论又称为随机服务系统理论。1909年丹麦的电话工程师爱尔朗（A. K. Erlang）用概率论方法研究电话通话问题，开始了排队问题的研究，1930年以后，数学家们开始了更为一般情况的研究，取得了一些重要成果。1951年以后，堪道尔（D. G. Kendall）对排队论作了系统的研究，理论工作有了新的进展。排队论主要研究各种系统的排队队长、排队的等待时间及所提供的服务等各种参数，以便求得更好的服务。它是研究系统随机聚散现象的理论。

决策论研究的是决策问题。所谓决策就是根据客观可能性，借助一定的理论、方法和工具，科学地选择最优方案的过程。决策问题是由决策者和决策域构成的，而决策域又由决策空间、状态空间和结果函数构成。研究决策理论与方法的科学就是决策科学。决策论所要解决的问题多种多样，从不同角度有不同的分类方法，按决策者所面临的自然状态的确定与否可分为确定型决策、风险型决策和不确定型决策；按决策所依据的目标个数可分为单目标决策与多目标决策；按决策问题的性质可分为战略决策与策略决策；以及按不同准则划分成的种种决策问题类型。不同类型的决策问题应采用不同的决策方法。决策的基本步骤为：①确定问题，提出决策的目标；②发现、探索和拟订各种可行方案；③从多种可行方案中，选出最满意的方案；④决策的执行与反馈，以寻求决策的动态最优。

如果决策者的对方也是人（一个人或一群人），并且双方都希望取胜，这类具有竞争性的决策称为对策或博弈型决策。构成对策问题的三个根本要素是：局中人、策略与一局对策的得失。目前对策问题一般可分为有限零和两人对策、阵地对策、连续对策、多人对策与微分对策等。

存储问题是人们最熟悉、最需要研究的问题之一。例如商店储存的商品，存储太少，会发生缺货现象，以致商品脱销，将影响销售利润和竞争能力；存储太多，一时售不出去，将影响资金周转并带来积压商品的有形或无形损失。一方面说明了存储问题的重要性和普遍性，另一方面又说明了存储问题的复杂性和多样性。专门研究这类有关存储问题的科学，叫做存储论。

系统模拟是20世纪40年代末以来伴随着计算机技术的发展而逐步形成的一门新兴学

科。模拟就是通过建立实际系统模型并利用所建模型对实际系统进行实验研究的过程。最初，模拟技术主要用于航空、航天、原子反应堆等价格昂贵、周期长、危险性大、实际系统试验难以实现的少数领域，后来逐步发展到电力、石油、化工、冶金、机械等一些主要工业部门，并进一步扩大到社会系统、经济系统、交通运输系统、生态系统等一些非工程系统领域。可以说，现代系统模拟技术已经成为任何复杂系统，特别是高技术产业不可缺少的分析、研究、设计、评价、决策和训练的重要手段。

运筹学是软科学中“硬度”较大的一门学科，兼有逻辑的数学和数学的逻辑的性质，是系统工程学和现代管理科学中的一种基础理论和不可缺少的方法、手段和工具。运筹学已被应用到各种管理工程中，在现代化建设中发挥着重要的作用。

第1章 线性规划基础及单纯形法

线性规划（linear programming，LP）是运筹学最重要最基本的问题之一。它主要研究在一系列的线性方程或线性不等式约束条件下，使得某个线性指标最优的问题。它在工农业生产、交通运输、经济、管理决策等领域都有着广泛的应用。自 1947 年 G. B. Dantzig 提出一般线性规划求解的单纯形算法以来。线性规划在理论上已日趋成熟，在实用上已更加广泛。

1.1 线性规划问题及其数学模型

为了说明线性规划问题的特点，我们先看几个例子。

例 1 某工厂生产 A_1、A_2、A_3、A_4 四种产品，需要使用 B_1、B_2、B_3 三种原料。生产 1t 不同产品可获得的利润和所消耗的原料数量，以及每月可供应的原料数见表 1.1。问：工厂每月应如何安排生产计划，才能使总利润最大？

表 1.1 可供应的原材料数

产品 / 原料	A_1	A_2	A_3	A_4	可供原料总量/t
B_1	0.8	0.6	0.5	0.8	200
B_2	1.5	0.9	0.8	1.6	300
B_3	1.3	0.8	1.0	1.2	250
可获利润/(元/t)	250	220	210	280	

为了用数学形式来表达这一问题，我们用 x_1、x_2、x_3、x_4 分别表示四种产品每月的计划产量。这样，原料 B_1 的消耗量为 $0.8x_1+0.6x_2+0.5x_3+0,8x_4$(t)，但是原料 B_1 每月的供应量为 200t，因此必须满足

$$0.8x_1+0.6x_2+0.5x_3+0.8x_4\leqslant 200$$

类似地，原料 B_2、B_3 的消耗量和供应量应当满足

$$1.5x_1+0.9x_2+0.8x_3+1.6x_4\leqslant 300$$

$$1.3x_1+0.8x_2+1.0x_3+1.2x_4\leqslant 250$$

此外，产品产量不应为负数，即有

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0$$

根据题意，所获得总利润是

$$f=250x_1+220x_2+210x_3+280x_4$$

我们要求的是 f 的最大值。

综合起来，这个问题的数学形式为

$$\max f=250x_1+220x_2+210x_3+280x_4$$

$$\begin{cases} 0.8x_1+0.6x_2+0.5x_3+0.8x_4\leqslant 200 \\ 1.5x_1+0.9x_2+0.8x_3+1.6x_4\leqslant 300 \\ 1.3x_1+0.8x_2+1.0x_3+1.2x_4\leqslant 250 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，x_1、x_2、x_3、x_4称为决策变量，$f=250x_1+220x_2+210x_3+280x_4$称为目标函数，记号 $\max f$ 表示求函数 f 的最大值。不等式组（1.1）称为约束条件。满足约束条件的一组变量｛x_1、x_2、x_3、x_4｝称为此问题的可行解，能使目标函数取得最大值的可行解称为最优解，而此时的目标函数值称为最优值。这样的一种最优化问题称为线性规划问题。从制订生产计划的角度来看，可行解是安排生产的一个方案，最优解是一个最好的方案。

例2 饲养场饲养动物，每只动物每天至少需要摄入 700g 蛋白质，30g 矿物质，50mg 维生素。现有四种饲料可供选用，各种饲料每千克营养成分含量及单价如表 1.2 所示。问：四种饲料应各使用多少，才能使总费用最小？

表 1.2 各种饲料每千克营养、成分含量及单价

饲料	蛋白质/g	矿物质/g	维生素/mg	价格/(元/kg)
1	30	1	0.5	0.8
2	20	0.5	1	1.2
3	10	0.2	0.3	0.6
4	50	2	2.5	2

用 $x_j(j=1,2,3,4)$ 分别表示四种饲料的使用量，则该问题的数学表达式为

$$\min f=0.8x_1+1.2x_2+0.6x_3+2x_4$$

$$\begin{cases} 30x_1+20x_2+10x_3+50x_4\geqslant 700 \\ x_1+0.5x_2+0.2x_3+2x_4\geqslant 30 \\ 0.5x_1+x_2+0.3x_3+2.5x_4\geqslant 50 \\ x_j\geqslant 0 \quad (j=1,2,3,4) \end{cases}$$

这里，目标函数为 $f=0.8x_1+1.2x_2+0.6x_3+2x_4$，约束条件为一组不等式，问题是求目标函数的最小值。

以上两个具体问题，尽管实际背景很不相同，但从数学角度来看，它们具有共同的特性，都是线性规划问题。

一般地，所谓线性规划问题，就是求一组变量的值，使得这组变量满足一些线性不等式或者线性方程的约束，并且能使某个线性目标函数取得最优值（最大值或最小值）。

具有一组变量的线性规划问题可以表示成以下形式。

求
$$\max(\min) f=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \ * \ b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \ * \ b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \ * \ b_m \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0 \end{cases}$$

其中“max”表示最大值，“min”表示最小值，“*”表示可以取“=”、“⩽”、“⩾”中的某一个。

利用求和记号“Σ”，可以简记为

$$\max(\min) f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j * b_i & i=1,2,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0 & j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

为了讨论方便，我们规定线性规划问题的标准型为

$$\max\ f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \cdots,\ x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

即约束条件均为等式，决策变量均取非负值。不失一般性，方程组的所有常数项 b_i，均为非负值。不然的话，方程两边同乘以 -1，即可使之成为正值。

$$\max\ f = \boldsymbol{CX}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

这里 $\boldsymbol{X}$ 是 n 维列向量，$\boldsymbol{C}$ 是 n 维行向量，$\boldsymbol{b}$ 是 m 维列向量，$\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{X} \geqslant 0$ 表示向量 X 的所有分量均为非负的。

对于非标准型的情况，我们可通过以下途径化为标准型。

(1) 当目标函数为求最小值时，即求

$$\min\ f = \boldsymbol{CX}$$

则可视为求 $-f$ 的最大值。

(2) 当约束条件为不等式时，可通过引进新变量将其改为等式。

① 若为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i$，则可引进非负的松弛变量 x_{n+i} 使之成为等式，即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\quad x_{n+i} \geqslant 0$$

② 若为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i$，则可引进非负的剩余变量 x_{n+i} 使之成为等式，即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i,\quad x_{n+i} \geqslant 0$$

(3) 在某些问题中，有些变量没有非负限制，这种变量叫做自由变量。如果遇到 x_j 是自由变量的情况，可以令 $x_j = x_j' - x_j''$，其中 $x_j' \geqslant 0$，$x_j'' \geqslant 0$。目标函数和约束条件中的 x_j 也作相应的变换。

通过以上步骤，就可把一般的线性规划问题统一转化为标准型。

例 3　将下述线性规划问题转化为标准形式。

$$\min\ f = 2x_1 + 3x_3 - 5x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geqslant 5 \\ 2x_1 + x_3 \leqslant 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4\ \text{无约束} \end{cases}$$

解：这里是求目标函数 f 的最小值，应当化为求 $f'=-f$ 的最大值；约束条件中有不等式，应当添加剩余变量 x_5 和松弛变量 x_6，将它们化为方程；决策变量 x_1 为非正，应当化为 $x_1'=-x_1$ 为非负变量；x_4 为自由变量，也应作相应的调整，化为 $x_4=x_4'-x_4''$，其中 $x_4'\geqslant 0$，$x_4''\geqslant 0$。因此，上述问题的标准形式为

$$\max f'=2x_1'-3x_3+5x_4'-5x_4''$$
$$\begin{cases}-x_1'+x_2-x_3+x_4'-x_4''-x_5=5\\-2x_1'+x_3+x_6=4\\x_2+x_3+x_4'-x_4''=6\\x_1',x_2,x_3,x_4',x_4'',x_5,x_6\geqslant 0\end{cases}$$

1.2　线性规划图解法

对只有两个变量的线性规划问题，可用平面上作图的方法来求解，下面用一具体例子说明求解的方法。

例 4

$$\max z=2x_1+5x_2$$
$$\begin{aligned}&x_1\leqslant 4\\&x_2\leqslant 3\\&x_1+2x_2\leqslant 8\\&x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0\end{aligned}$$

解：我们把 x_1，x_2 看成坐标平面上的坐标，满足约束条件中每一个不等式的点集就是一个半平面，因为约束条件是由 5 个不等式组成，所以满足约束条件的点集就是这 5 个半平面的交集，即图 1.1 中凸多边形 $OABCD$ 内的阴影部分。也就是说，凸多边形 $OABCD$ 内的任意一点均满足约束条件的 5 个不等式，而凸多边形外任意一点不能同时满足约束条件的 5 个不等式，因此，图中的阴影部分表示出了本例给出的线性规划的可行域。

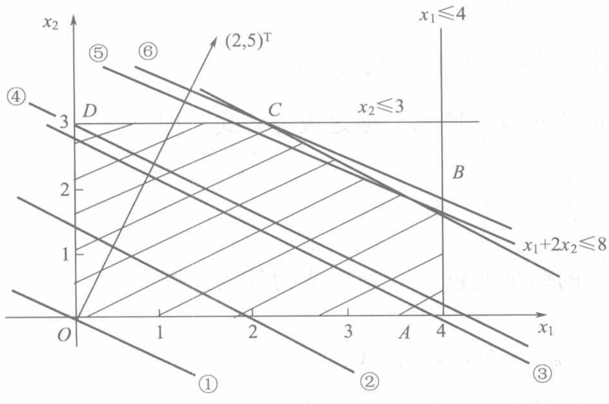


图 1.1　例 4 的图解法

目标函数 $z=2x_1+5x_2$ 的梯度方向为 $(2,5)^T$，在图中做出该向量，同时作 $2x_1+5x_2=h$ 的一簇平行线，称为目标函数的等值线（图中用标号①，②…⑥标出）。

① 为通过（0，0），方程为 $2x_1+5x_2=0$ 的直线。

② 为通过（2，0），方程为 $2x_1+5x_2=4$ 的直线。

③ 为通过 $A(4，0)$，方程为 $2x_1+5x_2=8$ 的直线。

④ 为通过 $D(0，3)$，方程为 $2x_1+5x_2=15$ 的直线。

⑤ 为通过 $B(4，2)$，方程为 $2x_1+5x_2=18$ 的直线。

⑥ 为通过 $C(2，3)$，方程为 $2x_1+5x_2=19$ 的直线。

在同一等值线上目标值相等，如等值线③上任一点的目标值均为 8。

原问题为求目标函数 $2x_1+5x_2$ 的最大值，必须在可行域内找一点使 $z=2x_1+5x_2$ 最大，而上述等值线沿梯度方向越来越大，到临界状态⑥目标值为 19，继续沿梯度方向上升，目标函数值会更大，但与可行域无交点，即找不到满足所有约束条件，并且使目标函数值比 19 大的点。因此原问题的最优解为临界等值线与可行域的交点，$x^*=(2,\ 3)^{\mathrm{T}}$，最优值为 19。

图解方法有以下 3 个基本步骤。

① 做出问题的可行域 D；

② 标出目标函数的梯度方向；

③ 做出目标函数的等值线，使其与可行域 D 有交点。若求最大值，将等值线沿梯度方向推进；若求最小值，将等值线沿负梯度方向推进，直至临近状态（与可行域有交点，但继续下去将无交点，此时称临近状态）。临界等值线与可行域 D 的交点即为最优解，等值线的值为最优值。

例 5

$$
\begin{aligned}
&\max z=x_1+x_2\\
&2x_1+5x_2\leqslant 20\\
&2x_1+x_2\leqslant 8\\
&x_1+x_2\leqslant 5\\
&x_1,x_2\geqslant 0
\end{aligned}
$$

解：① 做出此问题的可行域（如图 1.2 所示）。

② 目标函数梯度方向为 $(2,3)^{\mathrm{T}}$。

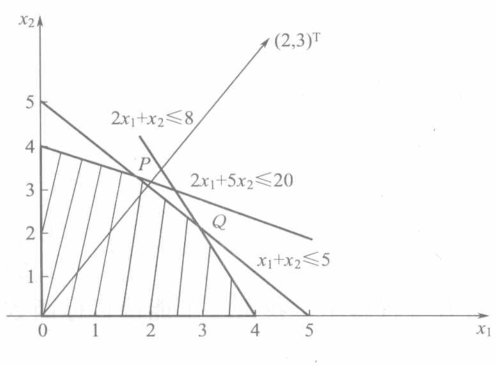


图 1.2　例 5 的图解法

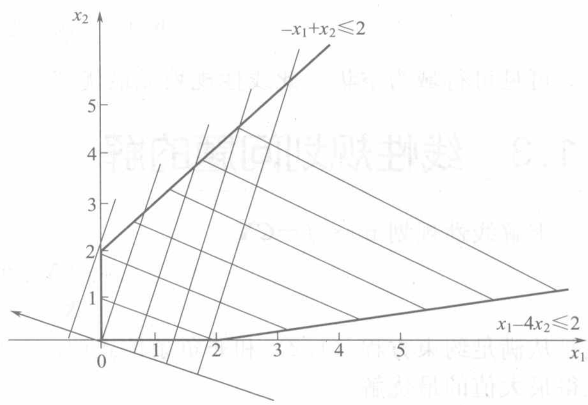


图 1.3　例 6 的图解法

③ 目标函数的等值线沿梯度方向推进，临界等值线为 $x_1+x_2=5$，与可行域交于一线段 PQ，$P\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{10}{3}\right)$，$Q(3,2)$，最优解为 PQ 上任一点，最优值为 5，最优解可写成

$$
\begin{aligned}
&x_1^*=\frac{5}{3}(1-\lambda)+3\lambda=\frac{4}{3}\lambda+\frac{5}{3}\\
&x_2^*=\frac{10}{3}(1-\lambda)+2\lambda=-\frac{4}{3}\lambda+\frac{10}{3}\quad (0\leqslant\lambda\leqslant 1)\\
&-x_1+x_2\leqslant 2\quad x_1-4x_2\leqslant 2
\end{aligned}
$$

例 6

$$
\begin{aligned}
&\min z=-2x_1+x_2\\
&-x_1+x_2\leqslant 2\\
&x_1-4x_2\leqslant 2\\
&x_1,x_2\geqslant 0
\end{aligned}
$$

解：做出此问题的可行域（如图 1.3 所示）。

例 6 的可行域是个无界区域；因为目标函数的梯度方向为 $(-2,1)^T$，目标函数的等值线沿负梯度方向推进，可一直进行下去，得不到临界等值线，故此例线性规划问题（LP）的目标值无下界，因此此例（LP）问题无最优解。

例 7

$$\begin{aligned}&\min z=-2x_1+3x_2\\&-x_1+2x_2\leqslant 2\\&2x_1-x_2\leqslant 2\\&x_2\geqslant 3\\&x_1,x_2\geqslant 0\end{aligned}$$

解：做此问题的可行域（如图 1.4 所示）。

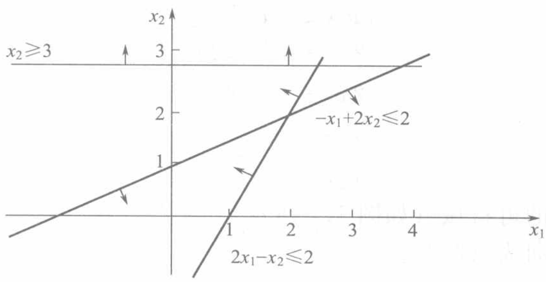


图 1.4　例 7 的图解法

可见可行域为空集，此线性规划无最优解。

1.3　线性规划问题的解

求解线性规划 $\max f=\boldsymbol{CX}$

$$\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b} & (1.2)\\ \boldsymbol{X}\geqslant 0 & (1.3)\end{cases}$$

就是从满足约束方程（1.2）和非负条件式(1.3）的所有可行解中，找出一个能使目标函数取得最大值的最优解。

$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$是一个 $m\times n$ 阶矩阵（$n\geqslant m$），不妨假定它满秩，即 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=m$。设 $\boldsymbol{B}$ 为由 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个线性无关的列向量构成的子矩阵，显然它是一个 m 阶的非奇异子矩阵，我们称它为线性规划问题的一个基。不失一般性，设 $\boldsymbol{B}$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的前 m 列组成，即

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{A}_m)$$

这里 $\boldsymbol{A}_j$是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 个列向量（$j=1,2,\cdots,m$）。与 $\boldsymbol{B}$ 的每一个列向量 $\boldsymbol{A}_j(j=1,2,\cdots,m)$ 相应的变量 x_j称为基变量。m 个基变量组成的向量记作 $\boldsymbol{X}_B$，即 $\boldsymbol{X}_B=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T$。基变量以外的变量称为非基变量，非基变量组成的向量记作 $\boldsymbol{X}_D$。非基变量对应的 $\boldsymbol{A}$ 的列向量 $\boldsymbol{A}_j(j=m+1,\cdots,n)$ 组成 $\boldsymbol{A}$ 的子矩阵 $\boldsymbol{D}$。用分块矩阵形式表示，即

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{D})$$

于是约束方程组（1.2）可以写成