高等数学教程

第三卷 第一分册

B. И. 斯 米 尔 諾 夫 著
聶灵沼 丁石孙 王蕚芳譯

人 民 教 育 出 版 社

简装本说明

目前850×1168毫米规格纸张较少，本书暂以787×1092毫米规格纸张印刷，定价相应减少20%。希鉴谅。

高等数学教程

第三卷　第一分册

В．И．斯米尔诺夫著

聂灵沼　丁石孙　王萼芳译

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

重庆新华印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号13012·0332　开本787×1092　1/32　印张10　12/16

字数279,000　印数72,501—152,500　定价(6)￥0.80

1954年9月新1版　1979年8月重庆第18次印刷

第四版序言

在这一版中，由于补充了新的材料，第三卷分成两部分。第一部分包括关于綫性代数，二次型理論和群論的全部材料。在这一部分中主要的补充是关于群論的。在編写这些补充材料的过程中，Д. К. 法捷耶夫給了我很大的帮助。特别是关于轉动群与劳倫次群单純性的闡明，按結构常数来建立群与群上的积分 [70, 81, 87, 88, 89, 90] 这些部分的材料的說明是属于他的。对于他在这本书的准备工作中所給予的帮助我表示极大的謝意。

В. И. 斯米尔諾夫

第一分册目次

第一章 行列式与方程組的解法

§1. 行列式及其性質

1. 行列式的概念 我們从解一个簡单的代数問題，即从解一次方程組的問題来开始这一节。由于对这种問題的研究，我們获得了行列式的重要概念。

让我們从研究一些最簡单的特殊情形来开始。先取具有两个未知数的两个方程所成的方程組：

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\text{。}$$

未知数的系数 a_{ik} 带有两个指标，第一个指标說明这个系数出現在那一个方程中，而第二个說明它是那一个未知数的系数。

大家知道，这方程組的解具有下面的形式：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\text{。}$$

再看由具有三个未知数的三个方程所成的方程組：

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,$$

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,$$

这里我們仍用上面的关于系数的标記法，将头两个方程改写成下列形式：

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1-a_{13}x_3,$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2-a_{23}x_3\text{。}$$

按上面的公式，由这两个方程解未知数 x_1 与 x_2，即得

$$x_1=\frac{(b_1-a_{13}x_3)a_{22}-a_{12}(b_2-a_{23}x_3)}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},$$

$$x_2=\frac{a_{11}(b_2-a_{23}x_3)-(b_1-a_{13}x_3)a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}。$$

把这两个表达式代入方程組的最后一个方程中，即得一个仅含未知数 x_3 的方程。最后解这个方程，即得 x_3 的最終表达式：

$$x_3=$$

$$=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}。\tag{1}$$

我們来詳細地研究一下这表达式的結构。首先看到，将分母中未知数 x_3 的所有系数 a_{i3} 各用常数項 b_i 替換即得分子。这样，还待闡明的只是組成分母的規律了。分母不含有常数項而是純粹由方程組的系数組成的。先让我們把这些系数按它們在原来方程組中的位置写成一个正方形的表：

$$\left\|\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{matrix}\right\|。\tag{2}$$

这个表含有三行与三列。a_{ik} 这些数叫做它的元素。a_{ik} 的第一个指标表示它所在的行的序数，而第二个则表示它所在的列的序数。現在写出（1）式的分母：

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}。\tag{3}$$

我們看到，它是由六項組成的，其中每一項是（2）中三个元素的乘积，而且每个乘积含有每一行和每一列的元素。实际上，这些乘积具有下面的形式：

$$a_{1p}a_{2q}a_{3r},\tag{4}$$

其中 p, q, r 是整数 1, 2, 3 的某一个一定的排列。如此，正如所有第一指标一样，所有第二指标也正是整数 1, 2, 3 的全体，因而乘积（4）确实含有每行和每列的一个元素。为要得到（3）式中所有的項，只需要在乘积（4）中就第二指标 p, q, r 取所有可能的不同的排列。第二指标的所有可能的排列显然有以下六种：

$$1,2,3;\quad 2,3,1;\quad 3,1,2;\quad 1,3,2;\quad 2,1,3;\quad 3,2,1。\tag{5}$$

由是，我們卽得（3）式的六項。但是我們看到，乘积（4）在（3）式中出現时，有一些带正号，而另一些則带負号。于是只要再說明选擇正負号所依据的法則了。如我們所見，带正号的那些乘积（4）的第二指标形成下列的排列：

$$1,2,3;\quad 2,3,1;\quad 3,1,2。\tag{5_1}$$

而带負号的那些乘积的第二指标形成下列排列：

$$1,3,2;\quad 2,1,3;\quad 3,2,1。\tag{5_2}$$

現在来說明排列(5_1)与排列(5_2)的区别。在一个排列中，比較每一对数，如果大的在小的前面，則叫做一个逆序。我們来計算(5_1)中諸排列的逆序个数。其中第一个排列沒有逆序，就是說逆序的个数为零。再看第二个排列，逐次比較每一数与其后各数的大小，我們看出，这里有两个逆序。卽一个是 2 在 1 前面，一个是 3 在 1 前面。同样，不难看到，(5_1)中的第三个排列含有两个逆序。总之，可以說在 (5_1) 中的所有排列都含有偶数个逆序。用完全同样方法来研究 (5_2) 中的排列，我們看到，它們都含有奇数个逆序。現在，我們可以把表达式（3）中的正負号法則叙述如下：乘积（4）中，凡是第二指标所成排列的逆序数是偶数的，出現在表达式（3）中时，沒有任何改变。凡是第二指标所成排列的逆序数为奇数的，出現在表达式（3）中时，冠以負号。表达式（3）叫做对应于数表（2）的三阶行列式。現在不难把它推广到任意阶行列式的情形。

假定有 n^2 个数，安排在一个 n 行 n 列的正方形的表內：

$$\left\| \begin{array}{l} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{array} \right\|。\tag{6}$$

这个表内的元素 a_{ik} 是给定的复数，而 i 与 k 分别表示元素 a_{ik} 所在的行与列的序数。从数表（6）組成所有可能的这样的乘积，使得这些乘积恰好含有每行和每列的一个元素，这些乘积具有下面的形式：

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},\tag{7}$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是数 $1, 2, \cdots, n$ 的某一个排列。为了要得到所有可能的形式如（7）的乘积，我們需要取第二指标的所有可能的排列。从初等代数得知，这样的排列的总数等于整数 n 的阶乘：

$$1\cdot2\cdot3\cdots n=n!$$

每个这样的排列，与基本排列

$$1, 2, 3, \cdots, n$$

来比較，就有一些逆序。

所有那些乘积（7），如果由它們的第二指标所成的排列含有偶数个逆序，则不加任何改变，而所有那些乘积（7），如由它們的第二指标所成的排列含有奇数个逆序，则加上一个負号。这样得到的所有乘积的和就叫做对应于表（6）的 n 阶行列式。这个和显然含有 $n!$ 項。我們不难将这个定义用公式表出来。为此須引进一些符号。令 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为数 $1, 2, \cdots, n$ 的某一个排列。用符号

$$[p_1, p_2, \cdots, p_n]$$

来記这个排列所含逆序的个数。

于是，以上所給的对应于表（6）的行列式的定义可写成下面

的公式，我們把表（6）用两根竖綫夹起来作为行列式的記号：

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)} (-1)^{[p_1,p_2,\cdots,p_n]} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}。 \quad (8)$$

等式右端要对第二指标的所有可能的排列取和，也就是对所有可能的排列 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 取和。如果我們只談表的本身，而不是讲由它构成的行列式，就把这表写在两双竖綫之間。

須注意，在（3）式的每个乘积中，我們把它的因子照这样的次序来安排，使第一指标恒組成基本排列 1, 2, 3，因此我們只要考虑由第二指标所形成的排列。与此相反，我們也可以把每个乘积中的因子重新安排，使第二指标都按上升次序排列；此时，（3）式可换写成下面的形式：

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}。 \quad (9)$$

这里第一指标取所有可能的排列 p, q, r，而且容易驗証，（9）式各項的正負号法則，可以完全用前面那样的說法表述出来，只不过就第一指标来說罢了。这就使我們除了考察和（8）以外，还要来考察下面这个类似的和：

$$\sum_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)} (-1)^{[p_1,p_2,\cdots,p_n]} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}。 \quad (10)$$

显然，这个和同样是由（8）的那些項所組成。以后我們会看到，它的項的正負号法則也是与在和（8）中相同的。那就是說，与 $n=3$ 的情形一样，和(10)与和（8）是全同的。

最后，再回到 $n=2$ 的情形，此时表取形式

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{matrix} \right\|$$

并且公式（8）給予一个与此表对应的二阶行列式的表达式：

$$\left\|\begin{matrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{matrix}\right\| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\text{。} \tag{11}$$

由上面直接可知，为要闡明行列式的性质，必須对排列的性质有較深的认識。我們立即轉向这个問題。

2. 排列 假設有任意的 n 个元素，把它們按一定的次序排列起来，我們把这叫做由这 n 个元素形成的一个排列。首先我們来証明，这样的不同的排列恰有 $n!$ 个。当 $n=2$ 时，这是显然的，因为两个元素可以形成两个不同的排列。当 $n=3$ 时，这只要数一下排列(5)的个数即可直接推知，那里的数 1, 2, 3 就是元素。不难知道，(5)已給出了由三个元素而成的所有可能的排列。現在用归納法来証明我們的論断对于任何的正整数 n 总是对的。假定我們的論断对某一个 n 成立，由此来証明它对于 $n+1$ 个元素也成立。就是說，假定 n 个元素产生 $n!$ 个排列，让我們来考虑任何的 $n+1$ 个元素产生的排列。把这 $n+1$ 个元素記作:

$$C_1, C_2, \cdots, C_{n+1}\text{。}$$

首先注意第一个元素为 C_1 的那些排列。为了要得到所有可能的这样的排列，应当把 C_1 放在第一个位置，然后写下其余 n 个元素的所有可能的排列。按照假定这样的排列的个数是 $n!$。因此，由 $C_1, C_2, \cdots, C_{n+1}$ 形成的以元素 C_1 为首的排列总数是 $n!$。完全一样，由 $C_1, C_2, \cdots, C_{n+1}$ 形成的以元素 C_2 为首的排列总数也是 $n!$。总的說来，$C_1, C_2, \cdots, C_{n+1}$ 的不同排列总数等于

$$n!\,(n+1) = 1\cdot 2\cdots n\cdot(n+1) = (n+1)!,$$

这样，就証明了以上的論断。

当然，我們可以把从 1 开始的一些整数取作元素，以后我們就这样来做。在一个排列中对調两个元素的位置，这样一个动作就叫做一个对換。显然可直接看出，由某一个排列經过一些对換可以得到任何一个其他的排列。例如，取四个元素的两个排列

$$1, 3, 4, 2;\quad 2, 4, 1, 3\text{。}$$

由这里第一个排列經下列一串对换就得到第二个排列：

$$1, 3, 4, 2 \to 2, 3, 4, 1 \to 2, 4, 3, 1 \to 2, 4, 1, 3\text{。}$$

为了把第一个排列变成第二个排列，这里我們用了三个对换。如果我們换个方式来施行对换，也可能由其他的方法利用对换把第一个排列变成第二个排列，换句話說，就是把第一个排列变成第二个排列所需要的对换的个数并不是一个确定的数。虽然可以用不同数目的对换把一个排列变成另一个排列。但是可以証明一件重要的事实：对于两个給定的排列，这些不同的对换数目或者全是偶数或者全是奇数。这也就是說这些数目总有同一的奇偶性。为了說明这一点，我們引用前一小节用过的逆序概念。試看由 n 个元素 $1, 2, \cdots, n$ 形成的排列。按照递升的次序排列起来的排列

$$1, 2, \cdots, n, \tag{12}$$

叫做基本排列。如果一个排列中两元素的相互次序与它們在基本排列(12)中的相互次序相反（就是說大的在小的左边），这就叫做該排列中的一个逆序。凡逆序的数目为偶数的排列叫做第一类排列，而逆序数目为奇数的排列叫做第二类排列。下面这个定理对以下的論述来讲是基本的。

由一个对换而引起的逆序数目的改变是一个奇数。

取定某一个排列

$$a, b, \cdots, k, \cdots, p, \cdots, s, \tag{13}$$

并且假設，我們把 k 与 p 的对换施于这个排列，就是說在排列中对調这两个元素的相互位置。經过这样的对换之后，元素 k 与 p 对于在 k 之左或在 p 之右的元素的相互位置保持不变。只有这排列中介于 k 与 p 之間的那些元素与 k, p 的相互位置有所改变，当然 k 与 p 的彼此相互位置也有所改变。我們来計算逆序改变的总数。假設在排列(13)中 k 与 p 之間总共有 m 个元素，并且設这些中間

元素与 k 比較得到 α 个順序与 β 个逆序，又設它們与 p 比較得到 α_1 个順序与 β_1 个逆序，显然有

$$\alpha+\beta=\alpha_1+\beta_1=m\text{。}\tag{14}$$

施行对换的結果，順序变成逆序而且逆序变成順序。更确切地說，如果元素 k 与某一个中間元素在对换前它是順序，則在对换后就变成逆序，而且反过来也对。对于元素 p 也是一样。因此，k 与 p 对于中間元素的逆序数目在对换之前总共是 $\beta+\beta_1$，而在对换之后总共是 $\alpha+\alpha_1$，就是說逆序数的改变是

$$\gamma=(\alpha+\alpha_1)-(\beta+\beta_1)\text{。}$$

利用(14)，这个数目可改写成

$$\gamma=(\alpha+\alpha_1)-(m-\alpha+m-\alpha_1)=2(\alpha+\alpha_1-m),$$

由此直接推出，这个数 γ 是一个偶数。現在来看元素 k 与 p 的相互位置。如果在对换之前它們作成一个順序，則在对换之后它們作成一个逆序，而且反过来也对，这就是說，这里的逆序数的改变等于 1 。因此，由于对换而引起的逆序改变的总数是一个奇数。

現在来叙述从这定理所得到的一些推論。

系 I. 如果写出全部 $n!$ 个排列，并且对于每一个排列作两个固定元素的对换，例如 1 与 3 的对换。則全部第一类排列都变成第二类排列，反过来也是如此，总的說来，我們仍然得到 $n!$ 个排列的全体。由此直接推出，第一类与第二类排列的数目相等。

系 II. 任何一个排列都可以由基本排列經过一些对换得到。从上面定理直接推出，凡可由基本排列用偶数个对换得到的那些排列作成第一类，而凡可由基本排列用奇数个对换得到的那些排列則作成第二类。

系 III. 基本排列的选擇完全可以任意。不用排列(12)而用其他任何一个排列作为基本排列都是可以的，在这情况下，規定逆序时，自然就应当以該排列与这个基本排列比較，就是說，应当以

元素在基本排列中的次序为根据。不难看出，如果我們取第一类中任何一个排列以代替排列 (12) 作为基本排列，則原来属于第一类的排列現在依然属于第一类，而原来属于第二类的現在依然属于第二类。反之，如果我們取第二类中任何一个排列作为基本排列，則原来第二类的排列成为現在的第一类的排列，而第一类的排列成为現在的第二类的排列。

例如，在元素 1, 2, 3 的六个排列中，我們可以取排列 2, 1, 3 作为基本排列，則下列排列是第一类排列：

$$2, 1, 3;\quad 1, 3, 2;\quad 3, 2, 1。$$

其中的第二个排列有两个逆序；1 在 2 前与 3 在 2 前，而在基本排列中 2 在 1 前且 2 在 3 前。下列的排列是第二类排列：

$$1, 2, 3;\quad 2, 3, 1;\quad 3, 1, 2。$$

其中的第一个排列与基本排列 2, 1, 3 比較有一个逆序，卽 1 在 2 前。

根据以上所讲的，我們可以把表达式 (8) 中的正負号法則叙述如下：如果一个乘积的因子的第二指标所作成的排列属于第一类，則在这乘积之前冠以正号，如果属于第二类，則在它的前面冠以負号，这里是把排列 1, 2, …, n 作为基本排列的。

現在我們来闡明行列式的一个基本性质。在給出行列式的那个表中将第一二两列对調。原来用 a_{ik} 所記的数，調换后仍然用带有同一指标的同一文字来表示。于是，从表 (6) 我們得到下面的表：

$$\left\|\begin{matrix} a_{12}, & a_{11}, & a_{13}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{22}, & a_{21}, & a_{23}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2}, & a_{n1}, & a_{n3}, & \cdots, & a_{nn} \end{matrix}\right\|。\tag{15}$$

根据由公式 (8) 所規定的行列式的定义，我們可以求得对应于表 (15) 的行列式。在这个表中的列的号碼排列如下：2, 1, 3,

…, n, 于是我們应当把这个排列看作基本排列。它是由原来的基本排列用一个对換而得到的,因此,它原来是属于第二类的。所以原来的第二类排列对于这个新的基本排列而言成了第一类的排列而且反过来也是如此。因此,对应于表(15)的行列式就是在公式(8)中出現的那些項的一个和,但是,由于剛才談到的第二指标所作成的排列的类的变更,这个新和的各項的正負号与和(8)中相当項的正負号相反,就是說,当两列对調时,行列式的值改号。对一二两列对調的情形我們已經証明了这个性質。对于任意两列对調的情形上述的証明也仍然适用,例如,下面的等式成立:

$$\begin{vmatrix} 1, 0, 3 \\ 2, 7, 6 \\ 5, 3, 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1, 3, 0 \\ 2, 6, 7 \\ 5, 0, 3 \end{vmatrix}。$$

第二个行列式是由第一个經二三两列对調而得到的。

現在再說明行列式的一个性質。取定和(8)中的某一項

$$(-1)^{[p_1, p_2, \cdots, p_n]} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}。 \tag{16$_1$}$$

只要調換上面乘积中的因子,我們可以得到第二指标的递升排列,这时第一指标形成某个排列 $q_1, q_2, \cdots, q_n$, 上式就可以写成

$$(-1)^{[p_1, p_2, \cdots, p_n]} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}。 \tag{16$_2$}$$

从 (16_1) 到 (16_2) 的过程可以借一些因子間的对換来完成。每一个这样的对換不仅是第一指标所成的排列的对換同时也是第二指标所成的排列的对換。如果从 (16_1) 过渡到 (16_2) 所需要的对換的个数是偶数,则由此可以推得,排列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 属于第一类。因为它既然可借偶数个对換变成基本排列 $1, 2, \cdots, n$, 显然可知,它也可借偶数个对換从基本排列得到。而且,此时排列 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 也属于第一类,因为它是借同样的偶数个对換从基本排列得到的。由同样的理由,如果 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 属于第二类,则

$q_1, q_2, \cdots, q_n$ 也属于第二类。由此推出，

$$(-1)^{[p_1,p_2,\cdots,p_n]}=(-1)^{[q_1,q_2,\cdots,q_n]},$$

因此我們有

$$(-1)^{[p_1,p_2,\cdots,p_n]}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^{[q_1,q_2,\cdots,q_n]}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}。$$

总之，如果我們比較和（8）与和(10)的对应項，則可看出，这两个和恰好全同，在和 (10) 中行所起的作用正如在和（8）中列所起的作用。由我們的討論直接推得，如果在表中所有的行用列代替而且所有的列用行代替，但不改变它們的次序，則此表的行列式的值不变。

例如，下列两个三阶行列式相等：

$$\begin{vmatrix} 2, & 3, & 5 \\ 7, & 0, & 1 \\ 2, & 1, & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2, & 7, & 2 \\ 3, & 0, & 1 \\ 5, & 1, & 6 \end{vmatrix}。$$

3．行列式的基本性质　I．首先叙述剛才証明过的性质——当用列替代行时，行列式的值不变。以后凡对于列已經証明了的一切結果对于行都也适用而且反过来也对。

II．在前一小节中我們看出，两列互換只改变行列式的正負号。这对于行也是一样，就是說，两行（列）互換，行列式的值只改变它的正負号。

III．如果行列式具有两相同的行，則当它們互換之后，一方面行列式沒有什么改变，另一方面，根据 II，行列式改变正負号，那就是說，如用 $\varDelta$ 表行列式的值，遂有 $\varDelta=-\varDelta$ 卽 $\varDelta=0$。总之，如果行列式有两行（或列）相同，則它的值等于零。

IV．变数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的沒有常数項的一次多項式叫做这些变数的綫性齐次函数，就是說它可以表成下面的形式：

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,$$

其中系数 a_i 与 x_s 无关。这样的函数具有下面两个很明显的性质：

$$\varphi(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n) = k\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

$$\varphi(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n) =$$
$$= \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \varphi(y_1, y_2, \cdots, y_n)。$$

后一个性质对于任意多組变数的和也成立。現在回到公式(8)，我們看到，和式(8)中每一項恰好含有每一行的一个元素作为它的因子。由此得出，行列式是任何一行(或任何一列)的元素的綫性齐次函数。

因此，如果某一行(列)的所有元素含有一个公共因子，則可把它提到行列式的記号之外。

对应于表(6)的行列式的值常常記作如我們已經提到过的形式：

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

或者簡記作：

$$|a_{ik}| \qquad (i, k=1, 2, \cdots, n)。$$

上述性质对于特殊情形可写成，例如，下面的形式

$$\begin{vmatrix} ka_{11}, & ka_{12}, & ka_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}。$$

由上述綫性齐次函数的第二个性质得到下面的行列式的性质：如果某一行(列)的元素是相同数目的諸項的和，則这行列式等于一些行列式的和，和中的每个行列式是将上面提到的那一行(列)換成单独的一項而得到的。例如

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c+c' \\ d, & e, & f+f' \\ g, & h, & i+i' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ d, & e, & f \\ g, & h, & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a, & b, & c' \\ d, & e, & f' \\ g, & h, & i' \end{vmatrix}。$$