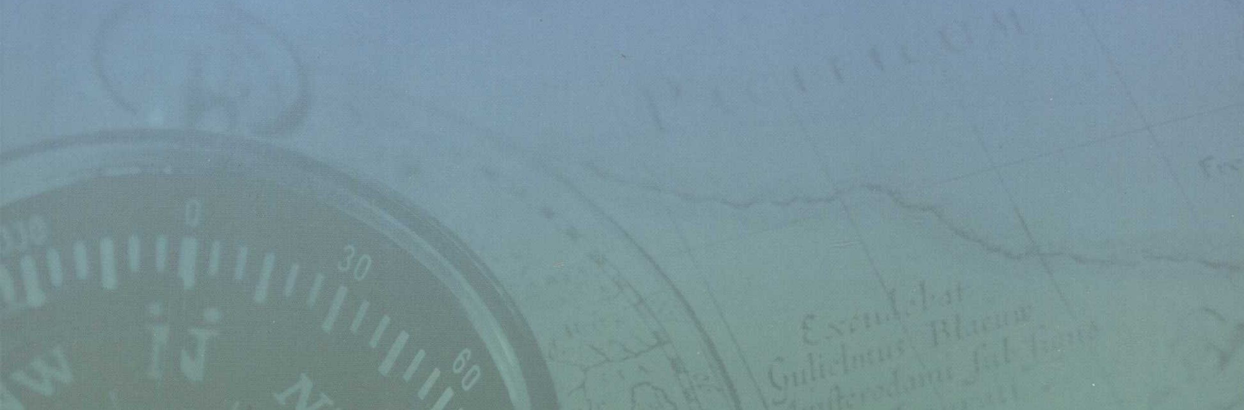
世纪普通高等教育基础课规划教材

北京市精品课程教材

高等数学例题与习题集

北京工业大学应用数理学院 编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21 世纪普通高等教育基础课规划教材
北京市精品课程教材

高等数学例题与习题集

北京工业大学应用数理学院　编

机 械 工 业 出 版 社

本书是《高等数学》第 2 版的配套学习指导书.

主要内容有极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分与定积分的应用、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程. 另外，本书单独分出两章来介绍综合性的例题，其中一章介绍一元微积分综合例题，另一章介绍整个微积分的综合例题.

本书适合高等院校工科类专业学生使用，也可作为自学、考研的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学例题与习题集/北京工业大学应用数理学院编.
—北京：机械工业出版社，2008. 9
21 世纪普通高等教育基础课规划教材
ISBN 978 -7 -111 -25002 -9

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 北…　Ⅲ. 高等数学 - 高等学校 - 习题
Ⅳ. 013 -44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 132103 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：李永联
责任编辑：李永联 韩效杰　版式设计：霍永明　责任校对：程俊巧
封面设计：鞠　杨　责任印制：邓　博
北京京丰印刷厂印刷
2008 年 10 月第 1 版 · 第 1 次印刷
169mm × 239mm · 22. 75 印张 · 441 千字
标准书号：ISBN 978 -7 -111 -25002 -9
定价：29. 80 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话：（010）68326294
购书热线电话：（010）88379639 88379641 88379643
编辑热线电话：（010）88379723

前　言

本书是《高等数学》教材（第2版）的配套学习指导书.

高等数学是众多专业课程的基础，其工具性尽人皆知，但更重要的是其思想性. 因此，在高等数学的教学中，尤其重要的是思想方法的训练与养成. 为学生们提供一整套的参考与训练材料，使之能够顺利掌握高等数学的知识与思想是本书的立意所在.

在内容的编排上，首先满足《高等数学教学大纲》的要求，强调对基本概念的理解和基本技巧的掌握，同时，为了适应优秀学生考研、竞赛的需求，在例题和习题中适当加入相关重点内容.

书中各章具有完全类似的结构：第一部分给出所在章节的主要内容和教学要求，可以方便读者了解高等数学教学大纲的要求；第二部分是精选的例题，读者可以从中学习典型的解题思想与基本技巧；第三部分是选编习题，习题量可以满足学习高等数学所必须的练习要求.

本书由范周田、张方统稿，参加编写的有丁津、田鑫、杨晓华、张方、李贵斌、张汉林、范周田、胡京兴.

由于编者水平有限，对书中不妥之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

目　录

第一章　极限与连续

一、本章主要内容及教学要求

主要内容　函数的定义，函数的基本性质，基本初等函数，复合函数，反函数，初等函数，数列极限的 ε—N 定义，数列收敛的条件，函数极限的 ε—N 定义，函数极限的 ε—δ 定义，函数的左右极限，极限的四则运算，两个极限存在准则，两个重要极限，无穷小与无穷大的定义，无穷小与函数极限的关系，无穷小的比较，函数连续的定义，间断点，连续函数的和、差、积、商的连续性，连续函数的反函数的连续性，连续函数的复合函数的连续性，基本初等函数和初等函数的连续性，闭区间上连续函数的最大值、最小值定理及介值定理.

基本要求

1. 理解函数的概念.

2. 了解函数奇偶性、单调性、周期性和有界性.

3. 理解复合函数的概念，了解反函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.

5. 会建立简单实际问题中的函数关系式.

6. 理解极限的概念（对极限的 ε—N、ε—δ 定义可在学习过程中逐步加以理解，对于给出 ε 求 N 或 δ 不做过高要求）.

7. 掌握极限四则运算法则.

8. 了解两个极限存在准则（夹逼准则和单调有界准则），会用两个重要极限求极限.

9. 了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念. 会用等价无穷小求极限.

10. 理解函数在一点连续的概念.

11. 了解间断点的概念，并会判断间断点的类型.

12. 了解连续函数的和、差、积、商的连续性，连续函数的反函数的连续性，连续函数的复合函数的连续性，基本初等函数和初等函数的连续性，及闭区间上连续函数的性质（介值定理和最大最小值定理）.

重点　函数的概念，数列极限的 ε—N 定义，函数极限的 ε—δ 定义，无穷小，极限的四则运算，函数的连续性.

难点 抽象函数符号的使用，复合函数的分解，分段函数，数列极限的 ε—N 定义，函数极限的 ε—δ 定义.

深度和广度 中学学过的有关函数的内容只需加以复习提高，不必再做详细讲解. 但对于函数符号 $f(x)$ 的意义和用法、复合函数的分解应有足够的说明和训练，还应当介绍分段函数，举例说明建立函数式的方法. 对某些函数要求对给定的 ε 会求 N 或 δ，不定式求极限的训练主要放在 L' Hospital 法则中进行；对第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{x}=\mathrm{e}$，只需证明 x 为正整数的情况；基本初等函数的连续性可不全证；对于连续函数在闭区间上的性质，只要求作几何说明.

二、例题

例 1.1 设 $u_n=\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$，用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，并说明：$n$ 从何值开始，才能使 $|u_n|<0.001$.

证明
$$|u_n-0|=\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right|=\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|}{n}$$

$\forall\varepsilon>0$,要使 $\dfrac{\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|}{n}<\varepsilon$，注意到 $\left|\sin\dfrac{n\pi}{2}\right|\leqslant 1$，所以只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 即可.

取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有 $|u_n-0|=<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

由上面的证明过程，当 $\varepsilon=0.001$，n 从 $\left[\dfrac{1}{0.001}\right]+1=1001$ 开始，能使 $|u_n|<0.001$.

例 1.2 用定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}=\dfrac{4}{3}$

证明 $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}-\dfrac{4}{3}\right|<\varepsilon$，由
$$\left|\frac{4n^2+1}{3n^2+2}-\frac{4}{3}\right|=\frac{5}{9n^2+6}<\frac{9}{9n}=\frac{1}{n},$$
所以只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 即可.

取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有 $\left[\dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}-\dfrac{4}{3}\right]<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{3n^2+2}=\frac{4}{3}.$$

例 1.3　若 x_n、y_n 都收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，用定义证明，$x_n-y_n$ 也收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=A-B$.

证明　对于 $\forall\varepsilon>0$：

由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，存在 $N_1>0$，当 $n>N_1$，有 $|x_n-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$；

由 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，存在 $N_2>0$，当 $n>N_2$，有 $|y_n-B|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$，有

$$|x_n-y_x-(A-B)|\leqslant|x_n-A|+|y_n-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

所以，
$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=A-B.$$

例 1.4　如果一个数列的两个子数列有相同的极限，原数列是否收敛？请举例说明.

答　不一定，例如：$x_n=\begin{cases}2, & n=3k+1\\ \dfrac{n}{n+1}, & n=3k+2\\ \dfrac{n-1}{n+2}, & n=3k+3\end{cases}$，$k=0,1,2,\cdots$.

由 $2,5,8,\cdots,3k+2,\cdots$ 诸项构成的子数列极限是 1；

由 $3,6,9,\cdots,3k+3,\cdots$ 诸项构成的子数列极限也是 1，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 发散.

例 1.5　若 x_n 收敛，y_n 发散，问 x_n+y_n 和 $x_n\cdot y_n$ 如何.

答　x_n+y_n 发散.

若不然，设 $z_n=x_n+y_n$，若 z_n 收敛，则 $y_n=z_n-x_n$，由例 1.3，两收敛数列之差 y_n 应该收敛，与题设矛盾.

$x_n\cdot y_n$ 可能收敛，也可能发散.

收敛的例子：$x_n=\dfrac{1}{n}$，$y_n=\begin{cases}1, & n=1,3,5,\cdots\\0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$

发散的例子：$x_n=\dfrac{n}{n+1}$，$y_n=\begin{cases}1, & n=1,3,5,\cdots\\2, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$

例 1.6　若 x_n 和 y_n 均发散，问 x_n+y_n 和 $x_n\cdot y_n$ 如何？

答　x_n+y_n 和 $x_n\cdot y_n$ 都可能收敛，也可能发散.

x_n+y_n 和 $x_n\cdot y_n$ 都收敛的例子：

$$x_n=\begin{cases}1, & n=1,3,5,\cdots\\ -1, & n=2,4,6,\cdots\end{cases},\quad y_n=\begin{cases}-1, & n=1,3,5,\cdots\\ 1, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

x_n+y_n 和 $x_n\cdot y_n$ 都发散的例子：

$$x_n=\begin{cases}1 & n=1,3,5,\cdots\\ -1, & n=2,4,6,\cdots\end{cases},\quad y_n=\begin{cases}1 & n=1,3,5,\cdots\\ 1 & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

例 1.7 若 x_n 和 y_n 都收敛，且 $x_n>y_n$，是否一定有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n>\lim\limits_{n\to\infty}y_n$？

答 不一定，例如：$x_n=\dfrac{1}{n}$，$y_n=\dfrac{1}{2n}$，则有 $x_n>y_n$，但是，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

例 1.8 设数列 x_n 的奇项组成的子列 x_{2k-1}，$(k=1,2,3\cdots)$ 的极限为 a，x_n 的偶项组成的子列 x_{2k}，$(k=1,2,\cdots)$ 的极限也是 a，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证明 由 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=a$ 及 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$ 可知，

$\forall\varepsilon>0$，$\exists K>0$，当 $k>K$ 时，有 $|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$ 与 $|x_{2k}-a|<\varepsilon$ 同时成立.
于是，当 $n>2K$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

例 1.9 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$.

解 设 $S_n=\left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$，

当 $n=2k-1$，$(k=1,2,\cdots)$ 时，得到 S_n 的奇项组成的子列：

$$S_{2k-1}=\left|\frac{1}{2k-1}-\frac{2}{2k-1}+\cdots+\frac{2k-3}{2k-1}-\frac{2k-2}{2k-1}+\frac{2k-1}{2k-1}\right|=\frac{k}{2k-1},$$

$$\lim_{k\to\infty}S_{2k-1}=\frac{1}{2}$$

当 $n=2k$，$(k=1,2,\cdots)$ 时，得到 S_n 的偶项组成的子列：

$$S_{2k}=\left|\frac{1}{2k}-\frac{2}{2k}+\cdots+\frac{2k-1}{2k}-\frac{2k}{2k}\right|=\left|\frac{-k}{2k}\right|=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{k\to\infty}S_{2k}=\frac{1}{2}$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|=\dfrac{1}{2}$.

例 1.10 用定义证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{5x^3}=\dfrac{1}{5}$.

证明 $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{1+x^3}{5x^3}-\dfrac{1}{5}\right|=\dfrac{1}{5\cdot|x|^3}<\varepsilon$，只要

$$|x|>\sqrt[3]{\frac{1}{5\varepsilon}}.$$

取 $X=\sqrt[3]{\frac{1}{5\varepsilon}}$，则当 $|x|>X$ 时，必有 $\left|\frac{1+x^3}{5x^3}-\frac{1}{5}\right|<\varepsilon$ 成立，故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{5x^3}=\frac{1}{5}.$$

例 1.11　用定义证明：$\lim\limits_{x\to2}x^3=8$.

证明　因 $x\to2$，故只考虑 $x=2$ 近旁的值，不妨设 $1<x<3$. 于是

$$|x^3-8|=|x-2|\cdot|x^2+2x+4|<19|x-2|$$

因此，$\forall\varepsilon>0$，要使 $|x^3-8|<\varepsilon$，只要 $19|x-2|<\varepsilon$，即 $|x-2|<\frac{\varepsilon}{19}$.

取 $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{19}\right\}$，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，恒有 $|x^3-8|<\varepsilon$ 成立，故

$$\lim_{x\to2}x^3=8.$$

例 1.12　用定义证明：$\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-2}{x+4}=1$.

证明　因 $x\to-2$，故只考虑 $x=-2$ 近旁的值，

可设 $|x+2|<1$，即 $-3<x<-1$，此时，$|x+2|^2<|x+2|$，且 $|x+4|>1$.

$\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{x^2-2}{x+4}-1\right|<\varepsilon$，因

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^2-2}{x+4}-1\right|&=\left|\frac{x^2-x-6}{x+4}\right|\\&<|x^2-x-6|=|x^2+4x+4-5x-10|\\&\leqslant|x+2|^2+5|x+2|<|x+2|+5|x+2|=6|x+2|\end{aligned}$$

故只要 $6|x+2|<\varepsilon$，即 $|x+2|<\frac{\varepsilon}{6}$.

因此，取 $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{6}\right\}$，则当 $0<|x+2|<\delta$ 时，有 $\left|\frac{x^2-2}{x+4}-1\right|<\varepsilon$ 成立，即 $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-2}{x+4}=1$.

例 1.13　已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n}=+\infty$，$a>1$，试证：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x}=+\infty$.

证明　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n}=+\infty$，$a>1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n+1}=+\infty$.

即对 $\forall M>0$，存在自然数 $N>0$，当 $n>N$ 时，$\frac{a^n}{n+1}>M$ 成立.

置 $[x]=n$，则 $n\leqslant x<n+1$，且 $\frac{a^x}{x}>\frac{a^n}{n+1}$.

取 $X=N+1$，则当 $x>X$ 时，有 $n>N$，此时，$\frac{a^x}{x}>\frac{a^n}{n+1}$，且 $\frac{a^n}{n+1}>M$，即 $\frac{a^x}{x}>$

M, 故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x}=+\infty,\ a>1$$

例 1.14 当 $x\to0$ 时, 研究函数 $f(x)=\frac{1}{x}\tan\frac{1}{x}$ 的极限.

解 若取点列 $x_n=\frac{1}{n\pi}\to0$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}n\pi\cdot\tan n\pi=0$;

又取点列 $x_n'=\dfrac{1}{n\pi+\frac{\pi}{4}}\to0$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n')=\lim_{n\to\infty}\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\tan\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)=+\infty.$$

因此, 当 $x\to0$ 时, $f(x)$ 的极限不存在, 且 $f(x)$ 不是无穷大量.

例 1.15 任何两个非零的无穷小量都能比较阶的高低吗?

答 不能, 例如: 当 $x\to0$ 时, $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ 与 $g(x)=x$ 都是无穷小, 但 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

例 1.16 讨论函数 $f(x)=(e^{\frac{1}{x^2}}-1)(2-\cos x)$ 在 $(-\infty, -2]$ 的有界性.

解 因 $|2-\cos x|\leqslant3$, 有界, 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{\frac{1}{x^2}}-1)=0$,

即 $e^{\frac{1}{x^2}}-1$ 是 $x\to-\infty$ 时的无穷小, 据无穷小的性质, 有 $f(x)$ 在 $(-\infty, -X]$ 上有界. $(X<-2)$

又 $f(x)$ 在 $[-X, -2]$ 上是连续函数, 一定有界, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2]$ 有界.

例 1.17 求 $\lim\limits_{x\to0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]$.

解 对任意实数 t, 都有 $t=[t]+\{t\}$,

其中 $\{t\}$ 表示 t 的小数部分, $0\leqslant\{t\}<1$. 据此,

$$\frac{1}{x}=\left[\frac{1}{x}\right]+\left\{\frac{1}{x}\right\},\ 即\left[\frac{1}{x}\right]=\frac{1}{x}-\left\{\frac{1}{x}\right\}.$$

所以

$$\lim_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to0}x\cdot\left(\frac{1}{x}-\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)=\lim_{x\to0}\left(1-x\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)=1$$

其中 $\lim\limits_{x\to0}x\left\{\frac{1}{x}\right\}=0$ 是因为, 当 $x\to0$, 无穷小量 x 与有界变量 $\left\{\frac{1}{x}\right\}$ 的乘积还是无穷

小量.

例 1.18　在 $x=-1$ 处，研究函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)(-1)^{[x]}}{x^2-1}$ 的左、右极限.

解　注意到 $\lim\limits_{x\to-1-0}[x]=-2$，$\lim\limits_{x\to-1+0}[x]=-1$，所以

$$f(-1-0)=\lim_{x\to-1-0}\frac{(x-1)(-1)^{[x]}}{x^2-1}=\lim_{x\to-1-0}\frac{(-1)^{-2}}{x+1}=-\infty$$

$$f(-1+0)=\lim_{x\to-1+0}\frac{(x-1)(-1)^{[x]}}{x^2-1}=\lim_{x\to-1+0}\frac{(-1)^{-1}}{x+1}=-\infty$$

因此，$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-\infty$.

例 1.19　若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ 都存在，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 一定存在吗?

答　因 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}\{[f(x)+g(x)]-f(x)\}$，

由极限的运算性质，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 一定存在.

例 1.20　若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$ 都存在，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 一定存在吗?

答　不一定存在，例如：$f(x)=x$，$g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，$a=0$.

例 1.21　求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3-(1+x+x^2)}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)(2+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}=1$

例 1.22　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2}-\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}\right)$.

解
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}-\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}-\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)-n(n+1)}{2(n+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+2)}=\frac{1}{2}$$

例 1.23　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right)$.

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)}{n^3}=\dfrac{1}{3}$

例 1.24　计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x-2)^{30}}{(3x+5)^{50}}$.

解 该有理分式的分子、分母展开后都是多项式，最高次数相同，都是 50，该极限等于最高次项的系数之比，故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x-2)^{30}}{(3x+5)^{50}}=\frac{2^{20}3^{30}}{3^{50}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$$

例 1.25 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}$.

解 分子、分母同时除以$\sqrt{x}$，原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}}}}{1}=1.$

例 1.26 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[e^{3x}\left(1+\dfrac{2}{e^{3x}}\right)\right]}{\ln\left[e^{2x}\left(1+\dfrac{3}{e^{2x}}\right)\right]}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^{3x}+\ln\left(1+\dfrac{2}{e^{3x}}\right)}{\ln e^{2x}+\ln\left(1+\dfrac{3}{e^{2x}}\right)}=\frac{3}{2}$$

例 1.27 计算 $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

解 $$\text{原式}=\lim_{x\to-8}\frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(4-2\cdot\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2)}{(2+\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x}+3)(4-2\cdot\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2)}$$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{-(x+8)(4-2\cdot\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2)}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)}$$

$$=-\lim_{x\to-8}\frac{4-2\cdot\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{1-x}+3}=-2$$

例 1.28 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求常数 a 和 b.

解 由

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(1-a)x^2-ax+1}{x+1}-b\right)=0$$

知$\dfrac{(1-a)x^2-ax+1}{x+1}$的分子中，二次项系数必须为 0，

不然，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(1-a)x^2-ax+1}{x+1}-b\right)=\infty$.

由此得，$1-a=0$，即 $a=1$.

将 $a=1$ 代入 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，

有 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-x-b\right)=0$，故

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{x+1}=-1$$

例 1.29　$\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]$，其中 $|x|<1$.

解　因

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})&=\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}\\&=\frac{(1-x^4)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}=\cdots\\&=\frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x}=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\end{aligned}$$

注意到 $|x|<1$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0$，故

$$\lim_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x},\quad |x|<1.$$

例 1.30　计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$.

解　令
$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}\\&=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

所以

$$原式=\lim_{n\to\infty}S_n=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

例 1.31　极限计算中，等价无穷小替换时，通常的规则是：作为因式中的无穷小，可以用它的等价无穷小替换，作为和、差中的和式不作替换，为什么？

答　设 $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ 都是某一极限过程下的无穷小量，且 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$.

因式替换的根据是：

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\beta'}=\lim\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\frac{\beta'}{\beta}\cdot\frac{\alpha'}{\beta'}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$$

而和、差中的和式，如果替换，可能错误，

如：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$，正确结果是$\dfrac{1}{2}$，但替换后，会出错误结果 0.

例 1.32　证明：当 $x\to 0^+$ 时，$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x}$

证明　因

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x^{\frac{3}{4}}+\sqrt{x^{\frac{1}{2}}+1}}=1$$

故

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x},\ x\to 0^+.$$

例 1.33　证明：当 $x\to 0^+$ 时，$\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{x}}\sim-\dfrac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}$.

证明　因

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{x}}&=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2}\\&=\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}+1}\\&=\frac{-2\sqrt{x^3}}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2})}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{x}}}{-\dfrac{1}{4}\sqrt{x^3}}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2\sqrt{x^3}}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2})}\cdot\frac{-4}{\sqrt{x^3}}=1\end{aligned}$$

即

$$\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{x}}\sim-\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}},\ x\to 0^+$$

例 1.34　根据单调有界数列极限存在原理，

研究数列 $x_n=\dfrac{9}{1}\cdot\dfrac{10}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n+8}{3n-2}$的极限.

解　由 $x_{n+1}=x_n\cdot\dfrac{n+9}{3n+1}$可知，当 $n>4$ 时，$x_{n+1}<x_n$，数列 x_n 单调递减；

又 $x_n>0$，数列 x_n 有下界，根据单调有界数列必有极限原理，数列 x_n 收敛.

可设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，对 $x_{n+1}=x_n\cdot\dfrac{n+9}{3n+1}$ 的两端取极限，

得 $A=A\cdot\dfrac{1}{3}$，解得 $A=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

例 1.35　根据单调有界数列极限存在原理，研究数列 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{3}}}$（$n$ 层根号）的极限.

解　由 x_n 的定义可知，$x_{n+1}>x_n>\cdots>x_1=\sqrt{3}$，$(n=2, 3, \cdots)$，

即 x_n 单调递增；

再由 $x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$，$x_{n+1}^2=3+x_n$，即 $x_{n+1}=\dfrac{3}{x_{n+1}}+\dfrac{x_n}{x_{n+1}}<\dfrac{3}{x_1}+\dfrac{x_{n+1}}{x_{n+1}}=\sqrt{3}+1$，

可知，数列 x_n 有上界(当 $n=1$ 时，$x_1<\sqrt{3}+1$ 也成立).

故，数列 x_n 收敛，可设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

对 $x_{n+1}^2=3+x_n$ 两端取极限，得 $A^2=3+A$，注意到 $x_n>0$，进而 $A>0$，解得 $A=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$，

即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

例 1.36　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[nx]}{n}$.

解　由 $nx-1<[nx]\leqslant nx$，有 $x-\dfrac{1}{n}<\dfrac{[xn]}{n}\leqslant x$，

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x-\dfrac{1}{n}\right)=x$，$\lim\limits_{n\to\infty}x=x$，由极限存在的准则 1′(夹逼定理)，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[nx]}{n}=x$.

例 1.37　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1-2x}-1}{x}$.

解　当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[n]{1-2x}-1\sim\dfrac{-2x}{n}$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1-2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2x}{n}}{x}=-\frac{2}{n}$$

例 1.38　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解　由 $\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)$，

及 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，

所以有

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$$

例 1.39 计算$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

解 令 $x-e=t$，则当 $x\to e$ 时，有 $t\to0$，

同时，$\ln\left(1+\dfrac{t}{e}\right)\sim\dfrac{t}{e}$，因此原极限

$$\lim_{t\to0}\frac{\ln(e+t)-1}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(e+t)-\ln e}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t}{e}}{t}=\frac{1}{e}$$

例 1.40 计算$\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

解 $$\lim_{x\to1}(1-x)\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)=\lim_{x\to1}(1-x)\cot\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]$$

$$=\lim_{x\to1}(1-x)\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}$$

$$=\lim_{x\to1}(1-x)\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}{\frac{\pi}{2}(1-x)}=\frac{2}{\pi}$$

例 1.41 计算$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

解 当 $x\to0^+$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\dfrac{1}{2}x$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1+\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{1+\sqrt{\cos x}}=0$$