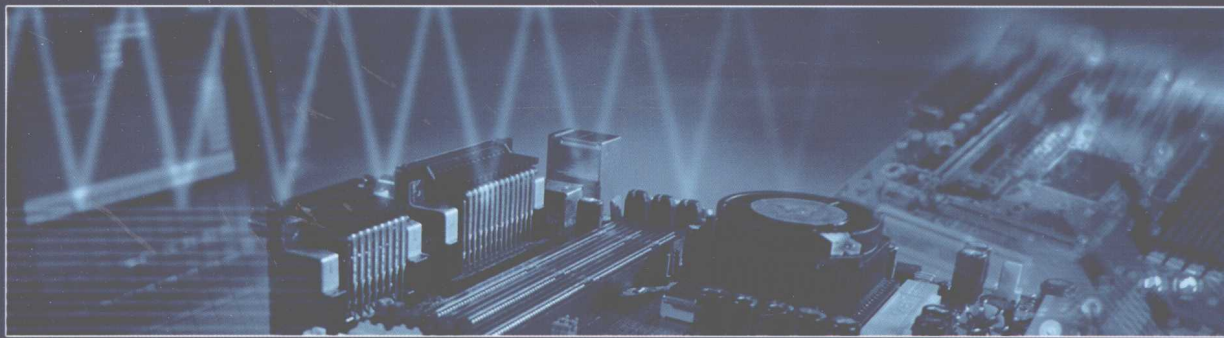


21世纪高等院校电子类课程系列教材

电磁场与电磁波

DIANCICHANG YU DIANCIBO

雷虹 余恬 刘立国 编著

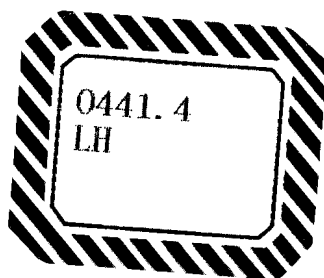


北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

21 世纪高等院校电子类课程系列教材

电磁场与电磁波

雷虹 余恬 刘立国 编 著



北京邮电大学出版社

• 北京 •

内 容 提 要

本书系统地阐述了电磁场与电磁波的基本理论和方法,内容包括:矢量分析;电磁场的基本规律;静态电磁场;平面电磁波在无界空间的传播以及在界面处的反射和透射,导行电磁波;电磁波的辐射。并适当介绍一些基础性的工程应用内容,如波导、谐振腔、天线等。全书从麦克斯韦方程组出发,展开对各类电磁问题的讨论,便于读者提纲挈领地把握内容,掌握分析电磁问题的基本思路和方法。

本书适用于普通高等院校相关专业本科生。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波/雷虹,余恬,刘立国编著. —北京:北京邮电大学出版社,2008

ISBN 978-7-5635-1679-7

I. 电… II. ①雷…②余…③刘… III. ①电磁场②电磁波 IV. O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 033917 号

书 名: 电磁场与电磁波

作 者: 雷 虹 余 恬 刘立国

责任编辑: 李欣一

出版发行: 北京邮电大学出版社

社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号(邮编:100876)

发 行 部: 电话: 010-62282185 传真: 010-62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京市梦宇印务有限公司

开 本: 787 mm×1 092 mm 1/16

印 张: 14.75

字 数: 366 千字

印 数: 1—3 000 册

版 次: 2008 年 6 月第 1 版 2008 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-1679-7

定 价: 26.00 元

· 如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

前 言

电磁场与电磁波是高等院校电子信息类本科生的重要专业基础课程。这门课程的主要目的是让学生了解和掌握电磁场与电磁波的基本理论和分析方法。主要内容包括静态电磁场以及电磁波的传播和辐射等。通过本课程的学习,学生可以掌握分析电磁场和电磁波问题的基本思路 and 主要方法,为进一步的学习、研究及应用奠定基础。

麦克斯韦方程组揭示了电磁现象和电磁运动的基本规律,是电磁场理论的基石。以麦克斯韦方程组为主线展开本课程的内容,有利于学生从总体上理解电磁场的理论体系,从而能够提纲挈领地把握课程内容。基于这一想法,我们对教材做如下安排:

场论是电磁场理论的必要数学工具。为建立场的概念和熟悉场的数学方法,本书第1章扼要地介绍梯度、散度和旋度的概念以及相关的积分公式,给出不同坐标系中梯度、散度和旋度的表达式。

麦克斯韦方程组有着坚实的实验基础。第2章在电磁现象的基本实验定律,以及涡旋电场、位移电流假设的基础上建立麦克斯韦方程组,导出电磁场的边界条件,并介绍电磁场的能量和能流等重要物理量。

麦克斯韦方程组是解决一切电磁场问题的出发点。从第3章起论述麦克斯韦方程组在各种具体情况下的求解及其应用。

比较简单的情況是由静止电荷或稳恒电流所产生的场——静态电磁场。根据静态电磁场的特性,可以引入电位描写静电场和稳恒电场、引入磁位描写稳恒磁场。第3章对此作了详细阐述,并对无界空间中的静电场、稳恒电场和稳恒磁场进行了求解和讨论。边界的存在对电磁场的分布有很大影响,静态场边值问题的基本解法在第4章中讨论。

随时间变化的电磁场可以脱离其激励源向远处传播,这就是电磁波。第5章讨论无界空间中时谐平面电磁波的传播特性。第6章应用场的边界条件讨论平面电磁波在两种媒质分界面上的反射与折射。第7章讨论在由导体界面构成的有界空间中传播的电磁波——导行电磁波,主要阐述导行电磁波的求解方

法、场的结构特点及传输特性,并介绍谐振腔的场结构及其特点。

第8章论述由时变电荷、电流激发的电磁场的分析方法,导出了基本振子以及对称振子的辐射场。在对均匀直线阵列天线辐射场的讨论中,突出了利用方向性乘积原理绘制方向图的便捷方法。此外,还介绍了面天线辐射场的求解方法,并分析其辐射特性。

三位作者经过多次讨论,以前使用多次的自编讲义为基础,形成了本书的框架,并对各章节内容的安排和表述达成一致认识。在此基础上分工:第1~3章由余恬执笔,第4~6章由雷虹执笔,第7章和第8章由刘立国执笔,全书由雷虹统稿。由于作者水平和视野所限,书中定有纰漏甚至可能出现错误,敬请读者予以指正。

山东大学信息科学与工程学院副教授杨修伦博士在使用讲义的过程中提出了许多宝贵的意见,学院领导对本书的编写给予了有力的支持,在此谨致谢忱!

作者
于山东大学

目 录

第 1 章 矢量分析

1.1 标量场的梯度	1
1.1.1 方向导数	1
1.1.2 梯度	2
1.1.3 梯度的运算法则	2
1.2 矢量场的散度	4
1.2.1 通量	4
1.2.2 散度	4
1.2.3 散度的运算法则	5
1.2.4 格林恒等式	6
1.3 矢量场的旋度	7
1.3.1 环量	7
1.3.2 旋度	7
1.3.3 旋度的运算法则	9
1.3.4 旋度定理	10
1.4 正交曲线坐标系	11
1.4.1 正交曲线坐标系概述	11
1.4.2 正交曲线坐标系中的梯度、散度、旋度的表达式	11
1.4.3 圆柱坐标系	12
1.4.4 球坐标系	13
1.5 矢量场的唯一性定理与亥姆霍兹定理	14
1.5.1 矢量场的唯一性定理	14
1.5.2 亥姆霍兹定理	14
习题 1	15

第 2 章 电磁场的基本规律

2.1 真空中的静电场	16
2.1.1 库仑定律 电场强度	16
2.1.2 高斯定理 静电场的散度	17
2.1.3 静电场的环路定理和旋度	18

2.2 电流连续性方程	19
2.2.1 电流密度	19
2.2.2 电流连续性方程	20
2.3 真空中的稳恒磁场	21
2.3.1 安培定律 毕奥-萨伐尔定律	21
2.3.2 磁通连续性原理 磁场的散度	22
2.3.3 安培环路定理 稳恒磁场的旋度	23
2.4 电磁感应定律	25
2.4.1 电磁感应定律	25
2.4.2 涡旋电场	25
2.5 介质的电磁特性	26
2.5.1 介质的极化	26
2.5.2 介质的磁化	29
2.5.3 本构方程	31
2.6 麦克斯韦方程组	32
2.6.1 一般情况下的总电位移	32
2.6.2 位移电流	32
2.6.3 麦克斯韦方程组	33
2.7 电磁场的边界条件	35
2.7.1 电磁场矢量法向分量的边界条件	36
2.7.2 电磁场矢量切向分量的边界条件	37
2.7.3 界面上的电流连续性方程	39
2.8 电磁能量和能流	40
2.8.1 电磁力密度 电磁功率密度	40
2.8.2 坡印廷定理	41
2.8.3 电磁场的能量密度和能流密度	42
2.8.4 导体在能量传输中的作用	43
习题 2	45

第 3 章 静态电磁场

3.1 静电场的电位	48
3.1.1 静电场的电位	48
3.1.2 电荷体系引起的电位	49
3.1.3 电位满足的微分方程	51
3.1.4 电位满足的边界条件	52
3.2 静电场的能量	53
3.2.1 静电场能量与电荷和电位的关系	53
3.2.2 求电场力的虚位移法	54
3.3 导体系统的电容	56

3.3.1	电位系数	56
3.3.2	电容系数	57
3.3.3	部分电容	58
3.3.4	电容器的电容	59
3.4	稳恒电场和稳恒电流场	60
3.4.1	稳恒电场的基本方程和边界条件	60
3.4.2	稳恒电场的电位	61
3.4.3	解稳恒电流场的静电比拟法	62
3.5	稳恒磁场的矢量磁位	63
3.5.1	稳恒磁场的矢量磁位	63
3.5.2	库仑规范	63
3.5.3	磁位方程的积分解	65
3.5.4	磁偶极子	67
3.6	稳恒磁场的能量	67
3.6.1	用矢量磁位求磁场能量	67
3.6.2	载流回路的磁能公式	68
3.6.3	求磁场力的虚位移法	69
3.6.4	利用磁能求自感系数	70
3.7	标量磁位	72
习题 3		73

第 4 章 静态场的边值问题

4.1	唯一性定理	76
4.2	镜像法	77
4.2.1	导体平面镜像法	78
4.2.2	导体球面镜像法	79
4.2.3	导体柱面镜像法	80
4.2.4	介质平面镜像法	82
4.3	分离变量法	83
4.3.1	直角坐标系中的分离变量	83
4.3.2	圆柱坐标系中的分离变量	86
4.3.3	球坐标系中的分离变量	87
4.4	复变函数法	90
4.4.1	静电场的复位	90
4.4.2	保角变换原理	92
4.4.3	几种常用的保角变换	93
4.4.4	保角变换应用举例	94
习题 4		95

第5章 平面电磁波

5.1 无源空间的电磁波动方程	97
5.2 时谐电磁场的复数表示	98
5.2.1 时谐电磁场量的复数表示	98
5.2.2 场方程的复数形式	100
5.2.3 复介电常数和复磁导率	101
5.2.4 复坡印廷定理	102
5.3 理想介质中的均匀平面电磁波	103
5.3.1 均匀平面波解	103
5.3.2 均匀平面电磁波的特性	104
5.4 导电介质中的平面电磁波	107
5.4.1 导电介质中自由电荷的分布	108
5.4.2 导电介质中的平面电磁波	108
5.4.3 良导体	110
5.4.4 导体的损耗 表面电阻	111
5.5 电磁波的极化	113
5.6 群速度	115
习题5	116

第6章 平面电磁波的反射与折射

6.1 电磁波的反射、折射规律	119
6.1.1 反射、折射定律	120
6.1.2 反射系数与折射系数	120
6.2 平面电磁波对平界面的垂直入射	125
6.2.1 向理想导体的垂直入射	125
6.2.2 向理想非磁性介质的垂直入射	127
6.3 平面电磁波对平界面的斜入射	130
6.3.1 向理想导体的斜入射	130
6.3.2 向理想非磁性介质的斜入射	131
习题6	135

第7章 导行电磁波

7.1 导行电磁波的一般分析	138
7.1.1 导行电磁波的表达式	139
7.1.2 导波场纵向分量与横向分量的微分方程	139
7.1.3 导波场的横向分量与纵向分量之间的关系式	140
7.2 导行波波型的分类以及导行波的传输特性	141
7.2.1 导行波波型的分类	141

7.2.2 导行波的传输特性	141
7.3 矩形波导	144
7.3.1 矩形波导中的 TE 波	144
7.3.2 矩形波导中的 TM 波	146
7.3.3 矩形波导的截止波长	147
7.3.4 矩形波导中的 TE_{10} 模	148
7.4 圆柱形波导	150
7.4.1 圆波导中的 TE 波	150
7.4.2 圆波导中的 TM 波	152
7.4.3 圆波导的传输特性	153
7.4.4 圆波导中的常用模式	154
7.5 波导的损耗	156
7.5.1 波导壁损耗	156
7.5.2 介质损耗	157
7.6 同轴线	158
7.6.1 同轴线中 TEM 波的场分布	158
7.6.2 同轴线中 TEM 波的传输特性	159
7.6.3 同轴线中的高次模	161
7.6.4 同轴线的单模传输条件和尺寸选择	161
7.7 谐振器	162
7.7.1 谐振器产生振荡的物理过程	163
7.7.2 谐振器的基本参数	163
7.7.3 矩形谐振腔	165
7.7.4 圆柱形谐振腔	168
习题 7	172

第 8 章 电磁波的辐射

8.1 时变场的位函数	174
8.1.1 有源区域的波动方程	174
8.1.2 时变场的位函数	175
8.1.3 滞后位	176
8.2 电基本振子的辐射	178
8.2.1 电基本振子的电磁场	178
8.2.2 电基本振子的近区场(感应场)	179
8.2.3 电基本振子的远区场(辐射场)	180
8.3 磁基本振子的辐射场及对偶原理	182
8.3.1 磁基本振子的辐射场	182
8.3.2 对偶原理	183
8.4 天线的电参数	186

8.4.1	归一化方向性函数与方向图	186
8.4.2	方向性系数	187
8.4.3	其他电参数	187
8.5	对称振子天线	189
8.5.1	对称振子天线的辐射场	189
8.5.2	对称振子的方向性函数和方向图	190
8.5.3	对称振子的辐射功率与辐射电阻	191
8.6	均匀直线阵	191
8.6.1	均匀直线阵的辐射场	191
8.6.2	均匀直线阵阵因子特性	193
8.6.3	例题分析	194
8.7	面天线的辐射	197
8.7.1	基尔霍夫公式	197
8.7.2	口径面的辐射场	199
8.7.3	同相等幅矩形口径面的辐射	200
8.7.4	同相不等幅矩形口径面的辐射	202
习题 8		204
附录 A	常用矢量公式	206
附录 B	圆柱坐标系和球坐标系	207
附录 C	梯度、散度、旋度和拉普拉斯算符展开式	208
附录 D	“面散度”公式的推导	211
附录 E	电磁量单位	212
习题参考答案		214

第 1 章 矢量分析

在物理学中,某一物理量的空间分布构成一个物理的“场”。标量型物理量(如电位等)的空间分布构成标量场,而矢量型物理量(如电场强度等)的空间分布则构成矢量场。在数学上,这些场用标量函数 $\phi(\mathbf{r}, t)$ 或矢量函数 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ 来表示,分析、处理场的数学方法是矢量分析。因此,矢量分析是学习电磁场所必需的数学工具,其主要内容是关于标量场的梯度、矢量场的散度和旋度的运算。本章将给出梯度、散度和旋度的定义和相关的运算法则及公式,以及它们在直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系和一般正交曲线坐标系中的表达式。

1.1 标量场的梯度

1.1.1 方向导数

标量场的方向导数描写标量函数在标量场中每一点上沿给定方向的变化率。

设 M_0 是空间中的某一点, l 是发自 M_0 沿着某一方向的射线, M 是 l 上 M_0 的近邻点, 见图 1-1-1。

定义标量函数 $\phi(\mathbf{r}, t)$ 在点 M_0 沿 l 方向的方向导数为

$$\frac{\partial \phi}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\phi(M) - \phi(M_0)}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta l} \quad (1-1-1)$$

若 $\frac{\partial \phi}{\partial l} > 0$, 表示在点 M_0 处 ϕ 沿 l 方向是增大的。

在直角坐标系中, 有

$$\Delta \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \Delta z = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cos \gamma \right) \Delta l$$

其中, $\cos \alpha = \frac{\partial x}{\partial l}$, $\cos \beta = \frac{\partial y}{\partial l}$, $\cos \gamma = \frac{\partial z}{\partial l}$ 是 l 方向的方向余弦。

于是, 按式(1-1-1), 直角坐标系中方向导数的表达式为

$$\frac{\partial \phi}{\partial l} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cos \gamma \quad (1-1-2)$$

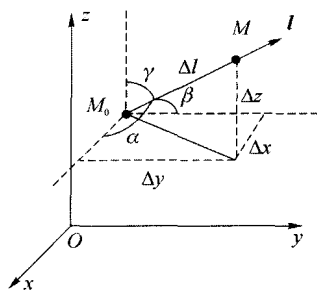


图 1-1-1 发自 M_0 的射线 l

1.1.2 梯度

标量场的梯度定义为空间点的矢量函数,其方向是标量场在该点有最大增加率的方向,其值则为沿该方向的方向导数值。

下面导出梯度的表达式。设射线 l 的单位矢为

$$\mathbf{e}_l = \mathbf{e}_x \cos \alpha + \mathbf{e}_y \cos \beta + \mathbf{e}_z \cos \gamma \quad (1-1-3)$$

引入矢量

$$\mathbf{G} = \mathbf{e}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1-1-4)$$

则由式(1-1-2)~式(1-1-4),有

$$\frac{\partial \phi}{\partial l} = \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{G} = |\mathbf{G}| \cos (\mathbf{G}, \mathbf{e}_l) \quad (1-1-5)$$

显然,当 $\mathbf{e}_l$ 与 $\mathbf{G}$ 同向时, $\frac{\partial \phi}{\partial l}$ 有正的最大值 $|\mathbf{G}|$ 。因此,矢量函数 $\mathbf{G}$ 同时给出了有最大方向导数的方向和该最大导数值。按前面的定义, $\mathbf{G}$ 就是标量场 $\phi(\mathbf{r}, t)$ 的梯度,记为 $\text{grad } \phi$ 。

因此,直角坐标系中梯度的表达式为

$$\text{grad } \phi \equiv \mathbf{G} = \mathbf{e}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1-1-6)$$

引入哈密顿算符 ∇ , 在直角坐标系中

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-1-7)$$

可见, ∇ 算符为矢量微分算符,规定其作用于右边的函数或矢量上时,总是先做微分运算,后做矢量运算。

利用 ∇ 算符,梯度可写成

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi \quad (1-1-8)$$

于是,式(1-1-5)可写为

$$\frac{\partial \phi}{\partial l} = \mathbf{e}_l \cdot \nabla \phi \quad (1-1-9)$$

应当注意,梯度 $\nabla \phi$ 的定义式是式(1-1-5)或式(1-1-9),即 ϕ 沿任意方向的方向导数等于其梯度在该方向的分量。

注意到 ϕ 为任意标量函数,故可有算符等式

$$\frac{\partial}{\partial l} = \mathbf{e}_l \cdot \nabla \quad (1-1-10)$$

标量场中,使函数 $\phi(x, y, z)$ 取相等数值的所有空间点组成的曲面称为等值面,其方程为

$$\phi(x, y, z) = \text{const}$$

因此, ϕ 沿等值面的任一切向(单位矢为 $\mathbf{e}_l$)的导数为零,即 $\frac{\partial \phi}{\partial l} = \mathbf{e}_l \cdot \nabla \phi = 0$ 。可见梯度矢量总垂直于等值面。

1.1.3 梯度的运算法则

设 u, v 为标量函数,根据式(1-1-7),易证明以下运算法则成立(证明从略):

$$\nabla C=0 \quad (C \text{ 为空间常数}) \quad (1-1-11)$$

$$\nabla(Cu)=C\nabla u \quad (1-1-12)$$

$$\nabla(u \pm v)=\nabla u \pm \nabla v \quad (1-1-13)$$

$$\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v \quad (1-1-14)$$

$$\nabla\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v^2}(v\nabla u-u\nabla v) \quad (1-1-15)$$

$$\nabla[f(u)]=\frac{df}{du}\nabla u \quad (1-1-16)$$

【例 1.1.1】 对标量函数 $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 求 ∇r 和 $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$ 。

解

$$\begin{aligned} \nabla r &= e_x \frac{\partial r}{\partial x} + e_y \frac{\partial r}{\partial y} + e_z \frac{\partial r}{\partial z} \\ &= \frac{e_x x + e_y y + e_z z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

事实上, 标量函数 r 的等值面是以原点为心的球面, 显然 r 沿径向 ($\mathbf{e}_r$ 方向) 的变化最快, 而且其变化率为 $\frac{dr}{dr} = +1$, 故有 $\nabla r = \mathbf{e}_r$ 。

利用上面结果以及式(1-1-16), 又有

$$\nabla \frac{1}{r} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \nabla r = -\frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

本例的结果常会用到。

【例 1.1.2】 若 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $r = e_x x + e_y y + e_z z$, $r' = e_x x' + e_y y' + e_z z'$ 。求 ∇R 和 $\nabla' R$ 。其中 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, ∇' 和 ∇ 分别对带撇和不带撇的坐标进行运算。

解

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \\ \nabla R &= e_x \frac{\partial R}{\partial x} + e_y \frac{\partial R}{\partial y} + e_z \frac{\partial R}{\partial z} \\ &= \frac{e_x(x-x') + e_y(y-y') + e_z(z-z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} = \frac{\mathbf{R}}{R} \\ \nabla' R &= e_x \frac{\partial R}{\partial x'} + e_y \frac{\partial R}{\partial y'} + e_z \frac{\partial R}{\partial z'} \\ &= -\frac{e_x(x-x') + e_y(y-y') + e_z(z-z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} = -\frac{\mathbf{R}}{R} \end{aligned}$$

注意, 本例证明了一个常用的公式:

$$\nabla' R = -\nabla R = -\frac{\mathbf{R}}{R} \quad (1-1-17)$$

类似地还可以证明

$$\nabla' \frac{1}{R} = -\nabla \frac{1}{R} = \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (1-1-18)$$

证明留给读者完成。

【例 1.1.3】 求 $\nabla e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$, 其中 $\mathbf{k}$ 为与坐标无关的常矢量。

解 按公式(1-1-16),有

$$\begin{aligned}\nabla e^{-jk \cdot r} &= e^{-jk \cdot r} \nabla (-jk \cdot r) = -j e^{-jk \cdot r} \nabla (k \cdot r) \\ &= -j e^{-jk \cdot r} \nabla (k_x x + k_y y + k_z z) \\ &= -j e^{-jk \cdot r} (e_x k_x + e_y k_y + e_z k_z) \\ &= -j k e^{-jk \cdot r}\end{aligned}$$

本例的结果在第5章以及其后的电磁波计算中常用。

1.2 矢量场的散度

1.2.1 通量

设 S 为空间中的某一曲面。在 S 上的一个给定点 (x, y, z) 处取一矢量面元 dS , 规定其法向单位矢量 e_n 与面元周界线的绕向成右手螺旋, 则矢量场 $A(x, y, z)$ 穿过面元 dS 的通量定义为

$$d\Phi = A \cdot dS \quad (1-2-1)$$

显然, $d\Phi > 0$ 意味着穿过面元 dS 的矢量 A 与法方向的夹角小于 90° 。

A 穿过整个曲面 S 的通量为

$$\Phi = \int_S A \cdot dS \quad (1-2-2)$$

若 S 为闭曲面, 则

$$\Phi = \oint_S A \cdot dS \quad (1-2-3)$$

对于闭曲面, 规定其法矢量向外。若 $\Phi > 0$, 则表示由闭曲面 S 中穿出的通量多于由外面穿入 S 中的通量, 这表明 S 中发出通量的“源”强于吸收通量的“洞”; 若 $\Phi < 0$, 则 S 中“洞”强于“源”。可见, 穿过闭曲面的通量反映了闭曲面所围空间内通量源的总体情况。但是, 有限大闭曲面的通量不能反映源在面内各点的具体分布。

1.2.2 散度

为了解矢量场 A 中某空间点 a 处通量源的强弱, 可以包围 a 点取一小的闭曲面, 然后令其向 a 点无限收缩。极限情况下, 单位体积内发出的通量就反映了点 a 处通量源的强弱; 这就是散度, 记为 $\text{div } A$, 即

$$\text{div } A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta V} \oint_S A \cdot dS \right] \quad (1-2-4)$$

式中 ΔV 是闭曲面 S 包围的体积, a 点始终在 S 内。

显然, 散度是标量。矢量场的散度构成标量场。

矢量场 A 的空间分布可用矢量线形象地表示: 矢量线上任一点的切线方向就是 A 在该点的方向, 穿过该点垂直于切线方向的单位面积的矢量线数目就等于 A 在该点的大小。由散度的定义可知, 矢量线发自 $\text{div } A > 0$ 处的“源”, 止于 $\text{div } A < 0$ 处的“洞”。

散度运算实际上是一种矢量微分运算, 下面导出其运算公式。

在高等数学中,我们学过高斯公式:

$$\oint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \quad (1-2-5)$$

这里 V 是闭曲面 S 所围的体积, $\cos \alpha$ 等是面元矢量 dS 的方向余弦:

$$\cos \alpha dS = \mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S}, \quad \cos \beta dS = \mathbf{e}_y \cdot d\mathbf{S}, \quad \cos \gamma dS = \mathbf{e}_z \cdot d\mathbf{S} \quad (1-2-6)$$

将式(1-2-5)中的 P, Q, R 依次改为 A_x, A_y, A_z , 即有

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV \quad (1-2-7)$$

另一方面,利用式(1-1-7)给出的 ∇ 算符,注意到 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ 皆为常矢量,则可写出

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1-2-8)$$

于是式(1-2-7)成为

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-2-9)$$

将式(1-2-9)代入散度定义式(1-2-4),可得

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \right] = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (1-2-10)$$

此即散度的微分形式。式(1-2-8)是散度在直角坐标系中的计算公式。

式(1-2-9)称为散度定理,它是一个常用的公式。

1.2.3 散度的运算法则

设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为矢量函数, ϕ 为标量函数,利用直角坐标系中的矢量表达式和 ∇ 算符表达式(1-1-7),并注意到 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ 皆为常矢量,不难证明以下运算法则成立:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} \pm \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (1-2-11)$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (1-2-12)$$

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi \quad (1-2-13)$$

式(1-2-13)中, $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ 为拉普拉斯算符。在直角坐标系中,有

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1-2-14)$$

现在证明公式(1-2-12)。在直角坐标中,有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\phi A_x \mathbf{e}_x + \phi A_y \mathbf{e}_y + \phi A_z \mathbf{e}_z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\phi A_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\phi A_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\phi A_z) \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} A_x + \phi \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} A_y + \phi \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} A_z + \phi \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} A_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_z \right) + \phi \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \\ &= (\nabla \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi \nabla \cdot \mathbf{A} \end{aligned}$$

式(1-2-12)得证。

其余公式的证明与此类似,读者可自行完成。

【例 1.2.1】 试求 $\nabla \cdot \mathbf{r}$ 和 $\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}$, 设 $r \neq 0$ 。

解
$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z) = 3$$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \right) = \left(\nabla \frac{1}{r^3} \right) \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \mathbf{r} = -\frac{3}{r^4} \nabla r \cdot \mathbf{r} + \frac{3}{r^3} = 0$$

【例 1.2.2】 设 S 为以 $(0, 0, a)$ 为心, 半径为 $R (< |a|)$ 的球面。求积分 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$, 其中

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^3} \mathbf{r}。$$

解 根据散度定理, 有

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV$$

因为在 S 面内部, $r \neq 0$, 由例 1.2.1 知在 S 面内 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{q}{4\pi} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$, 于是

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

注意, 若 $R > |a|$, 则本题结果不成立。

1.2.4 格林恒等式

格林恒等式是场论中的重要公式, 可以由散度定理导出。

设函数 ϕ 和 Ψ 在闭区域 V 上有连续的一阶偏导数, 在 V 内有连续的二阶偏导数。在散度定理(1-2-9)中取 $\mathbf{A} = \phi \nabla \Psi$, 有

$$\int_V \nabla \cdot (\phi \nabla \Psi) dV = \oint_S \phi \nabla \Psi \cdot d\mathbf{S}$$

由式(1-2-12), 有

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \Psi) = \phi \nabla^2 \Psi + \nabla \phi \cdot \nabla \Psi$$

所以

$$\int_V (\phi \nabla^2 \Psi + \nabla \phi \cdot \nabla \Psi) dV = \oint_S \phi \nabla \Psi \cdot d\mathbf{S} \quad (1-2-15)$$

此即格林第一恒等式。

将式(1-2-15)中的 ϕ 和 Ψ 交换, 有

$$\int_V (\Psi \nabla^2 \phi + \nabla \Psi \cdot \nabla \phi) dV = \oint_S \Psi \nabla \phi \cdot d\mathbf{S}$$

将此式与式(1-2-15)相减, 即得格林第二恒等式:

$$\int_V (\phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \phi) dV = \oint_S (\phi \nabla \Psi - \Psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S} \quad (1-2-16)$$