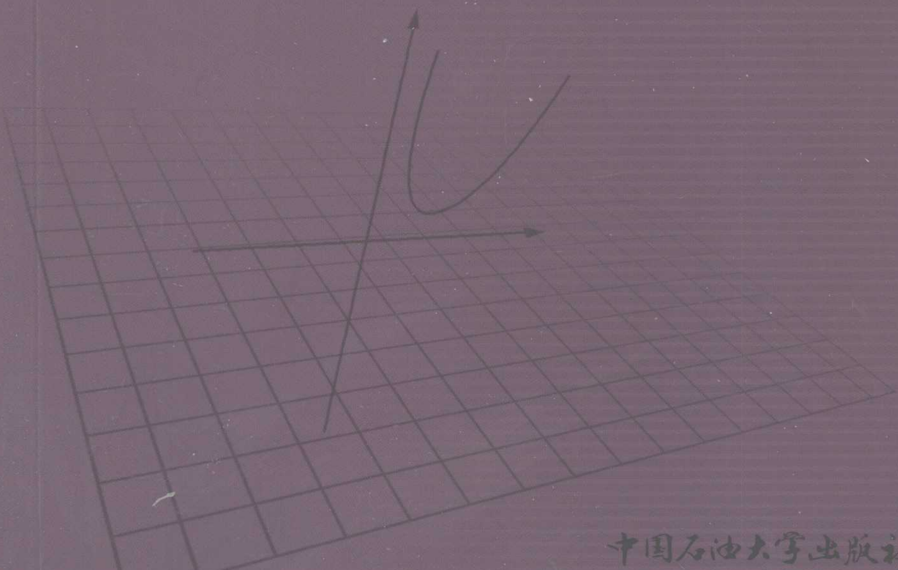
函数方程引论

■ 李文荣　张全信　田家财　编著



中国石油大学出版社

滨州学院教材出版基金资助

函数方程引论

李文荣 张全信 田家财 编著

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

函数方程引论/李文荣，张全信，田家财编著. —东营：中国石油大学出版社，2008.4

ISBN 978-7-5636-2572-7

Ⅰ. 函… Ⅱ. ①李…②张…③田… Ⅲ. 泛函方程 Ⅳ. O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 052106 号

书　　名：函数方程引论
作　　者：李文荣　张全信　田家财

责任编辑：高　颖(电话　0546—8393394)
封面设计：九天设计

出 版 者：中国石油大学出版社(山东 东营　邮编 257061)
网　　址：http://www.uppbook.com.cn
电子信箱：shiyoujiaoyu@126.com
印 刷 者：青岛星球印刷有限公司
发 行 者：中国石油大学出版社(电话　0546—8392791，8392563)
开　　本：140×202　印张：4.5　字数：111 千字
版　　次：2008 年 5 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：15.00 元

内容提要

本书是一本关于函数方程理论的入门书，主要论述单变量函数方程问题. 本书在阐述函数方程的概念、分类和解的基础上，介绍了函数方程的若干种解法，并进一步论述了某些函数方程的非负解、单调解、凸解、连续解、C^r类解和解析解，其中还涉及某些迭代函数方程解析解的存在唯一性问题，最后从几个侧面展示了函数方程的巧妙应用. 本书可作为高等学校有关专业学生的课外读物，也可作为各类数学竞赛的参考书.

PREFACE 前言

顾名思义，函数方程是一类这样的方程，其中作为未知的不是数，而是函数. 然而，现代函数方程已不再包括微分方程、积分方程与算子方程等. 函数方程的本质特征是它的解完全依赖于某个函数类，可分别讨论函数方程的连续解、可微解、解析解、单调解和凸函数解等. 与微分方程有相似之处，人们最早也是致力于寻找函数方程的某些解，后来才逐步转向研究函数方程的解的存在性、唯一性和稳定性的. 由于函数方程的求解涉及许多数学技巧，所以函数方程问题常常被编入数学竞赛题中，受到数学教育界的关注.

函数方程理论是一个历史悠久、内容丰富、应用广泛的重要数学分支，有许多大数学家涉猎这个领域，但终因函数方程理论异常复杂，所以 200 多年来发展缓慢. 尽管已经发表过有关论著数千种，但未建立起系统的理论基础，只是到了近半个世纪，人们发现函数方程在数学的许多分支和自然科学乃至社会科学的许多领域都有重要的应用，函数方程理论才有了长足的发展. 特别是近年来，迭代函数方程理论方兴未艾，使得函数方程在动力系统、混沌理论诸新兴学科中发挥了重要作用. 与此同时，研究函数方程理论的波兰学派、加拿大学派、美国学派、俄罗斯学派等应运而生，呈现了函数方程理论研究的活跃局面.

作 者

2008 年 1 月

CONTENTS 目录

第1章 函数方程的概念、分类和解

§1.1 函数方程的概念

函数方程理论是一个历史悠久、内容丰富、应用广泛的数学分支.

在一段相当长的时间内，函数方程被认为是含有未知函数的等式.也就是说，这类方程中未知的是函数.但是，目前已很少以这种方式来定义函数方程了，因为按此种定义，函数方程包括的范围过于庞大，就连已成为数学独立分支的微分方程、积分方程及算子方程等都被包括在函数方程之中了.

20世纪中叶以来，一种由J. Aczél等给出的所谓函数方程的现代定义得到了普遍的认可.这种定义规定：函数方程两端的表示式是由有限个(包括已知的和未知的)函数与变数的有限次迭加所构成的.从这个意义上讲，函数方程不包括那些对未知函数施行无穷小运算的方程.不言而喻，微分方程、积分方程等都不是现代意义上的函数方程.下列方程是函数方程的典型例子：

Cauchy 函数方程 $\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)$等，

Gamma 函数方程 $\varphi(x+1)=x\varphi(x)$，

Schröder 函数方程 $\varphi[f(x)]=s\varphi(x)$，

Abel 函数方程 $\varphi[f(x)]=\varphi(x)+c, c\neq 0$，

Babbage 函数方程 $\varphi^n(x)=x$.

这里，$\varphi^n(x)$表示$\varphi(x)$的n次迭代；$\varphi(x)$表示未知函数.

函数方程有两个重要特征：其一是在哪个集合上讨论函数方

程,它的解就完全依赖于哪个集合,例如 Cauchy 函数方程 $\varphi(xy)=\varphi(x)+\varphi(y)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有唯一的解 $\varphi(x)\equiv 0$,在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上还有解 $\varphi(x)\equiv c\ln|x|$(c 为常数);其二是在哪个函数类中讨论解的个数或解的性态,它的解就强烈地依赖于哪个函数类,例如 $\varphi(x)\equiv c\ln|x|$ 是所述方程在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的连续解,但该方程在同样的集合上还有不连续解.

函数方程的这些特性决定了它与其他方程有着本质的差异.譬如,在微分方程中就不出现类似上述的现象,因为微分方程中待求的未知函数通常要受到可微性条件的约束.另外,由于函数方程中不含未知函数的微分或积分,所以不能求助于直观的几何意义,这就给函数方程的研究带来极大的困难.

函数方程的出现可以追溯到 Archimedes 时代,而后的数学家 d'Alembert,Euler,Lagrange,Cauchy,Weierstrass,Hardy 等都十分关注函数方程的进展.由于函数方程理论异常复杂和困难,所以从 18 世纪到 20 世纪的 200 多年间发展缓慢,步履维艰.其间虽然产生了数以千计的文献,取得了许多有价值的理论成果与应用成果,但并未建立起系统的理论基础.直到 20 世纪 20 年代,特别是近 30 年来,人们发现函数方程在数学的各分支和自然科学乃至社会科学的许多领域都有意想不到的、巧妙的应用,函数方程理论才有了较大的发展,对若干函数方程的连续解、可微解、解析解、凸解、单调解、可测解、可积解的构造方法、存在性、唯一性、渐近性以及稳定性等都获得了一大批有深刻意义的结果,并大大地拓展了函数方程的应用范围和深度.函数方程在微分方程、算子方程、概率论、数学规划、信息论、动力系统、fractal 几何、群论、空气动力学、图论、量子场论以及经济与决策领域中都起着重要的作用.关于函数方程方面的工作可参考 J. Aczél 和 M. Kuczma 等的专著.

§1.2 函数方程的分类

由于函数方程异常复杂，所以对它进行分类是相当困难的，通常有以下几种分类方法：

(1) 按元分.函数方程中未知的函数自变量有 n 个，就称该函数方程是 n 元的，如 Cauchy 函数方程属于多元函数方程(或多变量方程)，Gamma 函数方程属于一元函数方程(或单变量函数方程).

(2) 按未知函数的个数分.上节所列的函数方程都是含有一个未知函数的函数方程，而方程

$$F(x+y)G(x-y)=H(x)+I(y)$$

是含有四个未知函数 F,G,H 和 I 的函数方程.

(3) 单变量函数方程又可分为不含未知函数迭代的方程和含有未知函数迭代的方程，其一般形式可分别写成

$$F[x,\varphi(x),\varphi(f_1(x)),\cdots,\varphi(f_n(x))]=0 \tag{1.2.1}$$

和

$$F[x,\varphi^{n_1}(x),\varphi^{n_2}(x),\cdots,\varphi^{n_m}(x)]=0. \tag{1.2.2}$$

这两种方程差异极大.对于方程(1.2.1)的研究较为深入，而关于方程(1.2.2)的结果却寥若晨星，只是在近年来才有较大的进展.在方程(1.2.1)与(1.2.2)中，$\varphi(x)$是未知函数；$F,f_1,\cdots,f_n$ 是已知函数；$\varphi^{n_i}(x)$是 φ 的 $n_i(i=1,\cdots,m)$ 次迭代.当 $f_i(x)=f^i(x)$ $(i=1,\cdots,n)$时，便得到方程(1.2.1)的重要的特殊形式：

$$F[x,\varphi(x),\varphi(f(x)),\varphi(f^2(x)),\cdots,\varphi(f^n(x))]=0. \tag{1.2.3}$$

对于形如(1.2.1)或(1.2.3)的方程，我们定义它的阶为在其中出现的数 n.例如，方程

$$F[x,\varphi(x),\varphi(f(x))]=0 \tag{1.2.4}$$

就是一阶的.前述的 Schröder 函数方程就是一个特殊的一阶方

程. 形如 $F[x,\varphi(x)]=0$ 的零阶方程就是熟知的一个隐函数方程.

另外，前述的 Babbage 函数方程和著名的 Feigeubaum 函数方程 $\varphi[\varphi(x)]=\lambda\varphi(x)$ 就是属于方程(1.2.2)型的含未知函数迭代方程的重要特例.

(4) 对于方程(1.2.1)和(1.2.2)，当 F 是线性函数时，方程就称为**线性的**；当 F 是非线性函数时，方程就称为**非线性的**.

从单变量函数方程的研究现状来看，我们认为没有必要引进更详尽的分类，且现在似乎还没有一种令人满意的分类.

§1.3　函数方程的解

对函数方程来说，含有任意常数(或根本不含任意常数)的解称为**特解**，而含有任意函数的解称为**通解**. 例如，方程

$$f(x+2\pi)=f(x)$$

有仅含任意常数 A 的特解 $f(x)=A\sin x$，也有含有任意函数的通解 $f(x)=\Phi(\sin x)$. 其中，Φ 是任意函数.

顺便指出，函数方程有实函数解与复函数解之分，有时也有常数解，甚至还有明显解(即等于零的解).

在函数方程理论中，寻求方程通解或揭示通解的结构具有重要意义. 1960 年，M. Kuczma 首先在 $f[f(x)]=x$ 的条件下研究了一阶非线性方程

$$\varphi[f(x)]=G[x,\varphi(x)] \tag{1.3.1}$$

的通解. 1965 年，他又得到了关于方程(1.3.1)通解结构的深刻结果，这些结果至今仍很重要.

因为函数方程的通解含有任意函数，所以即便是方程(1.3.1)也有一个巨大的通解族. 在解决具体问题时，这样复杂的通解族处理起来十分棘手，是不可取的. 我们希望找到能确切描述原始问题的解，于是产生了这样的问题：是否存在以某确定的特殊性质为特

征的唯一解(或唯一有穷参数解族)呢？回答是肯定的.也就是说，在一个广泛函数类 Φ 上讨论方程的解是不适宜的，我们可以在更小的函数类 $\Phi^* \subset \Phi$ 上寻找方程的解，譬如取连续函数类、可微函数类、解析函数类、单调函数类及凸函数类等作为上面的 Φ^*.在 Φ^* 中能否给出方程的唯一解，这取决于方程的形式和假定的条件.

研究单变量函数方程的重要内容之一就是讨论多种方程在不同函数类 Φ^* 中解的构造方法和各种性质.在函数方程的研究中，方程中已知函数的不动点扮演着重要的角色，保证方程解的存在唯一性的条件总是与解在不动点处或不动点附近的性质有关.

§1.4 函数方程解的存在唯一性

19 世纪以前，也就是在函数方程研究的初级阶段，人们主要着眼于用代换法、赋值法、归纳法、柯西法、微分法和幂级数法等方法具体寻求某些函数方程的解.从 19 世纪 20 年代起，数学家们开始把注意力转向讨论多种方程解的存在唯一性的条件，获得了许多新的进展.

众所周知，函数方程解的存在唯一性定理的确立具有十分重要的理论意义和实用价值.首先，它保证了用函数方程描述实际问题的完整性和合理性；其次，它是函数方程的数值解法的前提与基础，搞不清解的存在唯一性就会使近似求解失去意义.此外，存在性定理的证法往往同时提供了寻求近似解和解的无穷表达式的有效途径.

每考察一类函数方程，都力图给出这类方程在不同函数类中的解的存在唯一性条件.已出现的大量的解的存在唯一性定理构成了函数方程基本理论的主要内容.

通常，证明函数方程在各函数类中解的存在性有三种基本方

法. 其一是逐次逼近法或压缩映象法. 用于证明逐次逼近序列收敛性的方法是多种多样的，而压缩映象法实际上是逐次逼近法的抽象. 其二是利用 Ascoli-Arzela 引理或不动点定理的方法. 这两种方法本质上是一致的. 其三是优级数法. 在应用压缩映象法和优级数法证明解的存在性的同时也证明了解的唯一性.

第 2 章 函数方程的初等解法

如前所述，在函数方程研究的早期，人们用初等方法在某种假定下寻找方程的解或确定方程无解. 本章主要叙述函数方程具体的初等解法，这对涉猎函数方程的人来说是必须要了解的. 这些解法不少是技巧性很强的、有趣的，但同时又有很大的局限性. 事实上，能够用初等方法求解的函数方程是很少的，而且是限制在某种函数类中求解的. 众所周知，近年来国内外不少数学竞赛试题都涉及函数方程的初等解法.

§2.1 代换法

所谓代换法，就是对函数方程的未知函数或未知函数的自变量作代换，得到一个新的更简单的函数方程，以达到求解函数方程的目的. 这种方法多用于单变量函数方程.

例 1 设已知函数 $H(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有定义，未知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别为奇函数和偶函数. 试解函数方程

$$f(x)+g(x)=H(x).$$

解 在方程中以 $-x$ 代 x，可得到方程组

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=H(x), \\ f(-x)+g(-x)=H(-x). \end{cases}$$

考虑到 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的奇偶性，方程组就变为：

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=H(x), \\ f(x)-g(x)=-H(-x). \end{cases}$$

由此可解得

$$f(x)=\frac{H(x)-H(-x)}{2},\quad x\in[-a,a];$$

$$g(x)=\frac{H(x)+H(-x)}{2},\quad x\in[-a,a].$$

例 2 设 $ab\neq 0$,解函数方程

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\phi(x),\quad x\neq 0.$$

其中,$f(x)$是未知函数.

解 以$\frac{1}{x}$代方程中的 x,可得到方程组

$$\begin{cases} af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\phi(x), & x\neq 0, \\ bf(x)+af\left(\dfrac{1}{x}\right)=\phi(\dfrac{1}{x}), & x\neq 0. \end{cases}$$

由此,可以得到如下结论:

当 $a^2-b^2\neq 0$ 时,原函数方程有唯一解

$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left[a\phi(x)-b\phi\left(\frac{1}{x}\right)\right],\quad x\neq 0;$$

当 $a^2-b^2=0$ 且 $\begin{vmatrix} \phi(x) & b \\ \phi\left(\dfrac{1}{x}\right) & a \end{vmatrix}=0$ 时,因 $ab\neq 0$,故原函数方程有无穷多个解;

当 $a^2-b^2=0$ 且 $\begin{vmatrix} \phi(x) & b \\ \phi\left(\dfrac{1}{x}\right) & a \end{vmatrix}\neq 0$ 时,原函数方程无解.

注 在例 1 中,函数方程中涉及未知函数的奇偶性,此时自变量 x 的位置具有互反性,用 $-x$ 代 x 所得新方程与原方程组成方程组,通过解方程组可求出未知函数;在例 2 中,函数方程中的函数自变量有互倒关系,可用$\frac{1}{x}$代 x,用类似的方法求出未知函数.

下面的例子也说明了这种方法的可行性.

例 3 求函数方程$\frac{x^2}{1+x^2}f(x^2)+xf\left(\frac{1}{x^2}\right)=4x$在$(0,+\infty)$上的解.

解 在方程中,以$\frac{1}{x}$代x,可得到方程组

$$\begin{cases}\frac{x^2}{1+x^2}f(x^2)+xf\left(\frac{1}{x^2}\right)=4x,\\ \frac{1}{1+x^2}f\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}f(x^2)=\frac{4}{x}.\end{cases}$$

可解出:

$$f(x^2)=\frac{4(x^2-x+1)(x^2+1)}{x^4+x^2+1}.$$

若以x代x^2,则可得到原函数方程在$(0,+\infty)$上的解为:

$$f(x)=\frac{4(x-\sqrt{x}+1)(x+1)}{x^2+x+1}.$$

§2.2 赋值法

对所给的函数方程,在函数定义域内给自变量以某些特殊值,从而求出未知函数,这种方法称为**赋值法**.这种方法对多变量函数方程的求解更为适用.

例 1 设多项式$p(x)$满足$p(0)=0$,且对任何实数x,有

$$p(x^2+1)=[p(x)]^2+1,$$

试求$p(x)$.

解 由于$p(0)=0$,所以当令$x=0$时,可得

$$p(1)=1.$$

再令$x=1$,可得

$$p(2)=[p(1)]^2+1=2.$$

再令 $x=2$,可得

$$p(5)=[p(2)]^2+1=5.$$

如此继续下去,可得

$$p(26)=26,$$
$$p(26^2+1)=26^2+1,$$
$$\cdots.$$

这样,$p(x)-x=0$ 有无穷多个根.由代数基本定理知,必有

$$p(x)-x\equiv 0,$$

即

$$p(x)\equiv x.$$

例 2 试求定义在自然数集上的函数 $f(x)$,使

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy,\quad f(1)=1.$$

解 令 $y=1$,则有

$$f(x+1)=f(x)+f(1)+x=f(x)+x+1,$$

即

$$f(x+1)-f(x)=x+1. \tag{2.2.1}$$

在式(2.2.1)中,分别令 $x=1,2,\cdots,m$,可得

$$f(2)-f(1)=2,$$
$$f(3)-f(2)=3,$$
$$\cdots$$
$$f(m)-f(m-1)=m.$$

将以上各式两边分别相加,可得

$$f(m)-f(1)=2+3+\cdots+m,$$

从而得

$$f(m)=1+2+3+\cdots+m=\frac{1}{2}m(m+1),$$

即

$$f(x)=\frac{1}{2}x(x+1).$$