

★★★ 中等职业教育通用教材

zhongdengzhiyejiaoyu

数 学

SHUXUE

主编 陈猛 闫俊杰

兰州大学出版社

数字
资源

PDG

出版说明

我国当前的教育格局是:第一,普及义务教育;第二,大力发展职业教育;第三,提高高等教育的质量。其中,职业教育被置于需要大力发展的重要地位。但是,由于我国职业教育起步较晚,教材建设与职业教育快速发展的需要存在很大差距。近年来,职业教育教材似乎并不缺乏,但普遍存在着这样或那样的问题,如内容陈旧且难度偏大,不符合教学实际;重理论、轻实用,缺乏职业特色,偏离职教目标;脱离地区、行业职业发展实际,未能充分体现“以就业为导向”的职教方针,等等。就西部地区而言,从教学效果看,由于现行教材编写时没有充分考虑我国地域发展不平衡的现状,没有充分照顾到经济文化相对落后的西部地区的实际情况,教材使用中存在“水土不服”的现象。因此,针对现状,分析实际存在的问题,尽早尽快地进行教材改革和教材建设,打造适合西部地区生源状况、教学实际、就业需要的“本土教材”,就显得尤为必要。

去年以来,我社组织人力率先对甘肃、青海、宁夏、内蒙古等省区的高职高专、中职中专院校展开深入广泛的调研,了解各院校学生来源、师资力量、教材配置、就业形势等情况,专门召开了由教学一线优秀教师、专家共同参与的教材编写研讨会,反复探讨教学改革、教材建设的新理念、新路子,并针对多门学科教材的使用情况,多方商讨,精心编撰,于2008年秋季先期出版了高职高专、中职中专公共课、专业基础课近二十种职业教育教材,如《职业发展与就业指导》(高职)、《体育与健康》(高职)、《数学》、《语文》、《英语》、《计算机应用基础》、《AutoCAD》、《就业指导》(中职)等。今后几年内,其他公共课、专业基础课、专业主干/核心课、稀有特色课程教材的研发仍是我社工作的重点。

这套教材有以下特点:

1.体现国际最新职业教育理念,且具有鲜明的“本土特色”。

2.力求打破传统教材模式,采用模块式编写思路,以项目/任务驱动教学,贴近教学改革,凸现职教特色。

3.内容以“够用”为度,定位准确,难易适中;教师易教,学生易学。

4.重实操、轻理论,着力于应用型人才的培养。

本书在写作过程中,各参编学校的教师、专家与我们通力合作,在时间紧、任务重、要求高的情况下,耗费心血,不辞辛劳,保质保量地完成了书稿的编写任务。在此,向他们表示最诚挚的感谢。在出版过程中,我们虽竭尽全力,但限于时间和水平,难免在内容、形式以至编校质量上存在不足,这有赖于教学实践的检验。我们诚恳地希望广大师生提出宝贵意见,以便于修订再版。

信息反馈邮箱:1005205860@qq.com 或 suoxiaomei@lzu.edu.cn

兰州大学出版社

2008年7月

前 言

本书根据教育部职业教育与成人教育司制定的《中等职业学校数学教学大纲》的要求及中等职业学校的培养目标编写。在编写过程中,努力贯彻“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,体现中职学校的教学要求和特点。

本书的内容主要包括:数(式)、方程与不等式,集合与函数,三角函数,三角函数的应用,数列,平面向量,直线与圆,二次曲线,复数,排列与组合,概率初步,空间直线、平面和简单几何体。在内容的编排上,尽量做到由浅入深,由易到难,由具体到抽象,循序渐进。

本书中的练习包括课堂练习、习题和自测题。教材中每讲一个知识点,后面都有与该知识点相关的课堂练习,以便做到边讲边练,帮助学生消化当堂学过的内容;各节后安排有习题,可作为学生的课外作业,帮助学生巩固课堂上学过的知识;每章末配有自测题,用于检测学生对各章内容的掌握情况。除此之外,书中还设有“思考”栏目,旨在培养学生探究问题的能力。

本教材具有以下特点:

1. **重应用,轻推导。**根据中职学生的实际需求,本书在编写中略去了大部分理论烦琐的证明、推导过程,只要求学生掌握原理、公式等的应用即可,简明扼要。

2. **与实践紧密结合。**从学生身边的例子出发,引出各种命题,同时举出了所讲知识在生产、生活中应用的实例,培养学生的数学应用意识和能力。

3. **具有一定的弹性。**适应中职学校专业范围广的特点,本书各部分内容既有连贯性,又相对独立,教师可根据各专业的实际需要,灵活掌握,选择讲授其中的内容。

本书既可作为中等职业学校的基础课教材,也可作为职业培训教材,或供有关人员参考。

由于编者水平所限,书中难免存在不足之处,恳请读者给予批评指正。

编者

2008年6月



目 录

1 数(式)、方程与不等式	1
1.1 数、式的概念和运算	1
1.2 解方程(组)	5
1.3 解不等式	8
2 集合与函数	17
2.1 集合的有关概念	17
2.2 集合的运算	22
2.3 函数的有关概念	26
2.4 函数的单调性和奇偶性	31
2.5 幂指数与指数函数	35
2.6 对数与对数函数	40
3 三角函数	51
3.1 角的概念的推广	51
3.2 弧度制	53
3.3 任意角的三角函数	55
3.4 同角三角函数的基本关系	58
3.5 三角函数的简化公式和求值	60
3.6 三角函数的图像和性质	64
4 三角函数的应用	70
4.1 两角和与差的正弦、余弦及正切	70
4.2 二倍角公式	74
4.3 正弦型函数的图像和性质	78
4.4 解三角形	82
5 数列	92
5.1 数列的基本知识	92



5.2 等差数列	95
5.3 等比数列	100
6 平面向量	106
6.1 向量的概念	106
6.2 平面向量的运算	107
6.3 平面向量的直角坐标及线性运算	110
6.4 向量的内积及其运算	113
7 直线与圆	118
7.1 直线方程的几种形式	118
7.2 两条直线平行与垂直的条件	122
7.3 两条直线的夹角及点到直线的距离公式	123
7.4 圆	125
8 二次曲线	131
8.1 抛物线	131
8.2 椭圆	136
8.3 双曲线	141
9 复数	150
9.1 复数的概念	150
9.2 复数的几何表示	152
9.3 复数的三角形式和指数形式	156
9.4 复数的运算	158
9.5 复数的简单应用	163
10 排列与组合	167
10.1 加法原理与乘法原理	167
10.2 排列	170
10.3 组合	177
11 概率初步	184
11.1 事件与概率	184
11.2 古典概率	187
11.3 互斥事件有一个发生的概率	190
11.4 相互独立事件同时发生的概率	192
11.5 独立重复试验的概率	195
12 空间直线、平面和简单几何体	199
12.1 平面及其基本性质	199
12.2 空间中点、直线、平面间的关系	201
12.3 常见几何体及其面积、体积的计算	210

1 数(式)、方程与不等式

本章主要复习初中数学中已经学过的有关数(式)的概念和运算,简单一元一次方程、一元二次方程及二元一次方程组的解法,简单的一元一次不等式(组)、一元二次不等式、分式不等式、绝对值不等式的解法.

1.1 数、式的概念和运算

1.1.1 有关数的概念

1. 数轴

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴(如图 1-1).

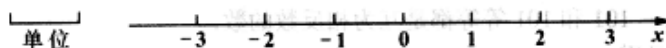


图 1-1

例 1 把下列各数用数轴上的点表示出来:

$$1, -2, \frac{5}{2}, 4, 3, -\frac{1}{2}.$$

解:先画数轴,然后在数轴上找出相应的点.

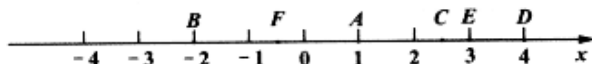


图 1-2

图 1-2 中的 A、B、C、D、E、F 点分别表示数 $1, -2, \frac{5}{2}, 4, 3, -\frac{1}{2}$.

2. 绝对值

数轴上一个数 a 所对应的点到原点的距离叫做该数的**绝对值**, 记做 $|a|$. 由绝对值的定义可知:

- (1) 一个正数的绝对值是它本身;
- (2) 一个负数的绝对值是它的相反数;
- (3) 零的绝对值等于零. 即

$$|a| = \begin{cases} a (a > 0) \\ 0 (a = 0) \\ -a (a < 0) \end{cases}$$

例2 分别求 3 、 -2 、 $\frac{5}{2}$ 、 -0.35 的绝对值.

解: $|3| = 3$, $|-2| = 2$, $|\frac{5}{2}| = \frac{5}{2}$, $|-0.35| = 0.35$.

课堂练习

1. 在数轴上表示下列各数:

$$0, 2, -4, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}.$$

2. 说出 4 、 -4 、 $\frac{1}{2}$ 、 $-\frac{1}{2}$ 的绝对值.

3. 相反数

数轴上原点的两侧到原点的距离相等的两个点所表示的两个数互为**相反数**. 如 -1 和 1 、 -3.5 和 3.5 、 -101 和 101 等等都是互为相反数的数.

零的相反数是零.

例3 (1) 分别写出 5 与 -9 的相反数.

(2) $\frac{3}{5}$ 与 -0.28 各是什么数的相反数?

解: (1) 5 的相反数是 -5 , -9 的相反数是 9 .

(2) $\frac{3}{5}$ 是 $-\frac{3}{5}$ 的相反数, -0.28 是 0.28 的相反数.

课堂练习

1. 在数轴上表示下列各数:

$$2, 3, -4.5, -\frac{3}{2}.$$

2. 说出下列各数的相反数和绝对值:

$$2, 3, 0.3, b, -\pi, \frac{3}{4}, e.$$

3. 如果 $x < 0$ 且 $|x| = 2$, 那么 $x =$ _____; 如果 $x > 0$ 且 $|x| = 0.1$, 那么 $x =$ _____;
如果 $|x| = \sqrt{3}$, 那么 $x =$ _____.

1.1.2 整式与分式

1. 整式的加、减运算

代数式 $-x$ 、 $2xy^2$ 、 $3a^2b^3$ 等都是数与字母的乘积, 这样的代数式叫做**单项式**, 单独一个数或一个字母也是单项式. 几个单项式的和叫做**多项式**, 如 $4x - 5$ 、 $6x^2 - 2x + 7$ 、 $a^2 - ab + b^2$ 等.

单项式与多项式统称**整式**.

进行整式的加减运算时, 如果遇到括号, 按去括号法则先去括号, 然后合并同类项.

例4 计算:

$$(1) (7x^2 + 3 - 2x) + (-4 - 6x - 2x^2);$$

$$(2) (8xy - 3x^2) - 2(3xy - 2x^2).$$

解: (1) $(7x^2 + 3 - 2x) + (-4 - 6x - 2x^2)$

$$= 7x^2 + 3 - 2x - 4 - 6x - 2x^2$$

$$= 5x^2 - 8x - 1;$$

$$(2) (8xy - 3x^2) - 2(3xy - 2x^2)$$

$$= 8xy - 3x^2 - 6xy + 4x^2$$

$$= 2xy + x^2.$$

2. 分式的运算

整式 A 除以整式 B , 可表示成 $\frac{A}{B}$ 的形式, 如果除式 B 中含有字母, 则式子 $\frac{A}{B}$ 叫做**分式**, 其中 A 叫做分式的**分子**, B 叫做分式的**分母**. 如 $\frac{1}{x}$ 、 $\frac{x}{x-2}$ 、 $\frac{x-1}{4x+1}$ 都是分式.

对于任意一个分式, 分母都不能为零, 否则分式没有意义.

分式的基本性质

$$(1) \frac{A}{B} = \frac{A \times M}{B \times M} (M \neq 0) \quad (2) \frac{A}{B} = \frac{A \div M}{B \div M} (M \neq 0)$$

分式的加减运算法则是: 先通分, 化为同分母的分式后, 分母不变, 分子相加减.

分式的乘除运算法则是: 两个分式相乘, 把分子相乘的积作为积的分子, 把分母相乘的积作为分母; 两个分式相除, 把除式的分子和分母互换位置后再与被除式相乘.

例5 计算:

$$(1) \frac{x+3y}{x^2-y^2} - \frac{x+2y}{x^2-y^2}; \quad (2) \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}.$$

$$\begin{aligned} \text{解: (1)} \quad & \frac{x+3y}{x^2-y^2} - \frac{x+2y}{x^2-y^2} \\ &= \frac{(x+3y) - (x+2y)}{x^2-y^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{y}{x^2 - y^2};$$

$$\begin{aligned} (2) & \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} \\ &= \frac{x-y}{(x+y)(x-y)} + \frac{(x+y)}{(x-y)(x+y)} \\ &= \frac{2x}{x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

例6 计算:

$$(1) \frac{3a}{4y} \cdot \frac{12y^2}{3a^2}; \quad (2) \frac{a+2}{a-2} \cdot \frac{1}{a^2+2a}; \quad (3) 3xy^2 \div \frac{6y^2}{x}.$$

$$\text{解: (1) } \frac{3a}{4y} \cdot \frac{12y^2}{3a^2} = \frac{3y}{a};$$

$$\begin{aligned} (2) & \frac{a+2}{a-2} \cdot \frac{1}{a^2+2a} \\ &= \frac{a+2}{a-2} \cdot \frac{1}{a(a+2)} \\ &= \frac{1}{a(a-2)}; \end{aligned}$$

$$(3) 3xy^2 \div \frac{6y^2}{x} = 3xy^2 \cdot \frac{x}{6y^2} = \frac{1}{2}x^2.$$

例7 求当 x 为何值时, 下列分式有意义:

$$(1) \frac{x}{x-2}; \quad (2) \frac{x-1}{4x+1}$$

解: (1) 由 $x-2=0$, 得 $x=2$, 所以当 $x \neq 2$ 时, 分式 $\frac{x}{x-2}$ 有意义.

(2) 由 $4x+1=0$, 得 $x=-\frac{1}{4}$, 所以当 $x \neq -\frac{1}{4}$ 时, 分式 $\frac{x-1}{4x+1}$ 有意义.

课堂练习

1. 计算:

$$(1) (5a+4c+7b) + (5c-3b-6a);$$

$$(2) (2x^2+xy+3y^2) - (x^2-xy+2y^2).$$

2. 计算:

$$(1) \frac{1}{a+1} + \frac{a}{a+1}; \quad (2) \frac{1}{a-2} - \frac{1}{a+2}.$$

3. 计算:

$$(1) \frac{3x}{a} \cdot \frac{a^4}{5x^3}; \quad (2) \frac{a^2+2a}{a-2} \cdot \frac{1}{a+2}; \quad (3) 4a^2x^3 \div \frac{a^3x^2}{2y}.$$

4. 求当 x 为何值时, 下列分式有意义:

$$(1) \frac{4x}{5-x}; \quad (2) \frac{13-x}{2x+4}.$$



习题

1. 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 分式 $\frac{2x-3}{1-3x}$ 没有意义.

2. 当 $x \neq \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 分式 $\frac{2x+3}{11-3x}$ 有意义.

3. 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 分式 $\frac{4x+3}{5x-2}$ 的值为 0.

4. $\sqrt{(a-b)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 计算:

$$(1) \frac{3}{a} + \frac{12}{a} - \frac{5}{a}; \quad (2) \frac{a}{x-y} - \frac{b}{x-y}; \quad (3) \frac{5}{6ab} - \frac{2}{3ac} + \frac{3}{4abc};$$

$$(4) \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}; \quad (5) \frac{y^2}{3ax} \cdot \frac{5a^2x}{2y^3}; \quad (6) \frac{9ab^2}{28x^4y^2} \cdot \frac{7x^3y}{3ab};$$

$$(7) \frac{x+1}{x-2} \div (x^2+x); \quad (8) \frac{10ab^3}{21x^2y^4} \div \frac{5ab}{3x^2y^3}.$$

1.2 解方程(组)

含有未知数的等式叫做**方程**. 使方程左、右两边的值相等的未知数的值叫做**方程的解(根)**. 求方程的解的过程, 叫做**解方程**.

1.2.1 解一元一次方程

含有一个未知数并且未知数的次数是一次的方程叫做**一元一次方程**. 一元一次方程的一般形式为:

$$ax + b = 0 (a \neq 0)$$

一元一次方程 $ax + b = 0 (a \neq 0)$ 的解为:

$$x = -\frac{b}{a}$$

例 1 解方程 $-\frac{2}{5}x + 3 = 0$.

解: 由 $-\frac{2}{5}x + 3 = 0$, 得 $-\frac{2}{5}x = -3$.

方程两边同时除以 $-\frac{2}{5}$, 得 $x = -3 \div (-\frac{2}{5})$, 即

$$x = \frac{15}{2}.$$

课堂练习

解方程:

(1) $3x - 5 = 0$; (2) $7 - 6x = 0$.

1.2.2 解一元二次方程

含有一个未知数并且未知数的最高次数是二次的方程叫做一元二次方程. 一元二次方程的一般形式为:

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$$

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的求根公式为:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(1) 当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根;

(2) 当 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根;

(3) 当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时, 方程没有实数根.

例 2 解方程 $5x^2 + 2x - 4 = 0$.

解: 因为 $\Delta = 2^2 - 4 \times 5 \times (-4) = 84 > 0$, 所以 $x = \frac{-2 \pm \sqrt{84}}{2 \times 5} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{5}$, 即

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{5}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{5}.$$

例 3 判断方程 $x^2 + 3x - 2 = 0$ 的根的情况.

解: 因为 $\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) = 9 - (-8) = 17$,

所以, 方程 $x^2 + 3x - 2 = 0$ 有两个不相等的实数根.

设一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根分别是 x_1, x_2 , 则

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

这个结论描述了一元二次方程的系数与根之间的关系, 常称做韦达定理.

例 4 已知两个数的和等于 8, 积等于 9, 求这两个数.

解: 根据根与系数的关系可知, 这两个数是方程 $x^2 - 8x + 9 = 0$ 的两个根, 解这个方程, 得

$$x_1 = 4 + \sqrt{7}, x_2 = 4 - \sqrt{7}.$$

因此, 这两个数是 $x_1 = 4 + \sqrt{7}, x_2 = 4 - \sqrt{7}$.

课堂练习

1. 解方程:

(1) $x^2 - 6x - 7 = 0$; (2) $3x^2 - 8x + 3 = 0$.

2. 判断下列方程根的情况:

$$(1) 3x^2 + 2x - 1 = 0; \quad (2) 2x^2 - 4x + 2 = 0; \quad (3) 6x^2 + 2x + 3 = 0.$$

3. 已知两个数的和等于4,积等于-3,求这两个数.

1.2.3 解二元一次方程组

几个二元一次方程组成的方程组,叫做二元一次方程组.

二元一次方程组的常用解法有:

(1) 代入消元法;

(2) 加减消元法.

例5 用代入消元法解方程组
$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 & \text{①,} \\ x + 4y = 13 & \text{②.} \end{cases}$$

解:由②得:

$$x = 13 - 4y. \quad \text{③}$$

将③式代入①式,得

$$2(13 - 4y) + 3y = 16,$$

解得 $y = 2$.

将 $y = 2$ 代入③式,解得 $x = 5$.

所以,原方程组的解为:
$$\begin{cases} x = 5, \\ y = 2. \end{cases}$$

例6 用加减消元法解方程组
$$\begin{cases} 4x - 9y = 1 & \text{①,} \\ 2x + 3y = 2 & \text{②.} \end{cases}$$

解:② $\times$ 3得:

$$6x + 9y = 6. \quad \text{③}$$

①+③,得

$$10x = 7,$$

所以 $x = \frac{7}{10}$.

将 $x = \frac{7}{10}$ 代入②得:

$$2 \times \frac{7}{10} + 3y = 2,$$

解得 $y = \frac{1}{5}$.

所以,原方程组的解为:
$$\begin{cases} x = \frac{7}{10}, \\ y = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

思考 如果要上题中的 x 先消去,该如何做?

课堂练习

1. 用代入消元法解方程组 $\begin{cases} 4x + 3y = 5, \\ x - 2y = 4. \end{cases}$

2. 用加减消元法解下列方程组:

(1) $\begin{cases} 4x - 3y = 14, \\ 5x + 3y = 31; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ 4x - 5y = 0. \end{cases}$



习题

1. 填空:

(1) 已知 $2x = 3$, 则 $x =$ _____; (2) 已知 $-2x = 0$, 则 $x =$ _____;

(3) 已知 $\frac{1}{2}x = 3$, 则 $x =$ _____; (4) 已知 $-\frac{2}{3}x = 5$, 则 $x =$ _____;

(5) 已知 $\frac{1}{3}x = \frac{2}{5}$, 则 $x =$ _____; (6) 已知 $2x = -a$, 则 $x =$ _____;

2. 解下列方程(用公式法):

(1) $x^2 + 2x - 2 = 0$; (2) $3x^2 + 4x - 7 = 0$;

(3) $2x^2 + 8x - 1 = 0$; (4) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

3. 若方程 $9x^2 + 2mx + 16 = 0$ 有两个相等的实数根, 则 $m =$ _____.

4. 已知两个数的和等于 -6 , 积等于 2 , 求这两个数.

5. 用代入消元法解下列方程组:

(1) $\begin{cases} x + 3y = 12, \\ 3x + 2y = 10; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + y = 2, \\ 3x = 2y. \end{cases}$

6. 用加减消元法解下列方程组:

(1) $\begin{cases} 5x + 2y = 25, \\ 3x + 4y = 15; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 4x - 7y = -1, \\ 3x - 2y = 3. \end{cases}$

1.3 解不等式

1.3.1 不等式及其性质

实数是可以比较大小的, 任意两个实数 a 和 b 之间具有以下性质:

$$a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$$

$$a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$$

根据这个性质, 要比较两个实数的大小, 只要看它们的差的符号就可以了.

例1 比较 $(a+3)(a-1)$ 与 $(a+5)(a-3)$ 的大小.

$$\begin{aligned}
 \text{解: 因为 } & (a+3)(a-1) - (a+5)(a-3) \\
 &= (a^2 + 2a - 3) - (a^2 + 2a - 15) \\
 &= 12 > 0,
 \end{aligned}$$

所以 $(a+3)(a-1) > (a+5)(a-3)$.

用不等号 $<$ 、 $>$ 、 $\leq$ 、 $\geq$ 连接起来的代数式叫做不等式. 如 $2x+3 > 5x$ 、 $x^2-3x+2 \geq 0$ 等都是不等式.

从实数比较大小的方法出发, 可得不等式的下列性质:

性质 1(传递性) 若 $a > b$, $b > c$, 则 $a > c$.

性质 2(加法法则) 若 $a > b$, 则对于任意实数 c 有 $a+c > b+c$.

性质 2 表明, 不等式两边加上(或减去)同一个实数, 不等号的方向不变.

例 2 已知 $a+b > c$, 求证 $a > c-b$.

证明: $a+b > c$

$$\Rightarrow a+b+(-b) > c+(-b)$$

$$\Rightarrow a > c-b.$$

这就告诉我们, 不等式中的任何一项变号后可以从一边移到另一边.

性质 3(可乘性) 若 $a > b$, $c > 0$, 则 $ac > bc$; 若 $a > b$, $c < 0$, 则 $ac < bc$.

性质 3 表明, 如果不等式两边同乘一个正数, 则不等号的方向不变; 如果不等式两边同乘一个负数, 则不等号的方向改变.

课堂练习

1. 填空:

(1) $2x > 1$, 则 x _____; (2) $3x < 6$, 则 x _____;

(3) $-2x < 10$, 则 x _____; (4) $-3x > -5$, 则 x _____.

2. 如果 $1 < x < 2$, 确定 $(x-1)(x-2)$ 的符号.

3. 比较 $x^2-2x-15$ 与 x^2-2x+8 的大小.

1.3.2 解一元一次不等式(组)

1. 解一元一次不等式

只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是一次的方程叫做一元一次方程. 如

$$3x+5 > 0, 5(x-2) < 3, \frac{x+1}{2} > \frac{x-2}{3} + 1$$

等都是二元一次不等式.

解一元一次不等式时, 要利用不等式的性质对不等式进行变形, 直到变形后的不等式能直接表示未知数的取值范围为止.

例 3 解下列不等式:

(1) $4+7x > 6$; (2) $5-3x > 9$.

解: (1) 移项整理, 得

$$7x > 2.$$

两边同乘 $\frac{1}{7}$, 得

$$x > \frac{2}{7}.$$

所以不等式 $4 + 7x > 6$ 的解为 $x > \frac{2}{7}$.

(2) 移项整理, 得

$$-3x > 4.$$

两边同除以 -3 , 得

$$x < -\frac{4}{3}.$$

所以不等式 $5 - 3x > 9$ 的解为 $x < -\frac{4}{3}$.

2. 解一元一次不等式组

一元一次不等式组中各个不等式的解的公共部分叫做这个一元一次不等式组的解集. 求不等式组解集的过程叫做解不等式组.

例4 解不等式组 $\begin{cases} 10 + 2x \leq 11 + 3x, \\ 2x + 7 > 6 + 3x. \end{cases}$

解: $\begin{cases} 10 + 2x \leq 11 + 3x \\ 2x + 7 > 6 + 3x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3x \leq 11 - 10 \\ 2x - 3x > 6 - 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x \leq 1 \\ -x > -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x < 1.$$

所以原不等式组的解集是 $-1 \leq x < 1$.

课堂练习

1. 解下列不等式:

$$(1) 3 + x < 7; \quad (2) 3(1 - 2x) > 2(x - 2);$$

$$(3) \frac{2}{5}(x - 2) \leq x - \frac{2}{5}; \quad (4) 2x - 3 \geq 3x - 7;$$

$$(5) 1 + \frac{x}{3} \geq 5 - \frac{x + 10}{2}.$$

2. 写出下列不等式组的解集:

$$(1) \begin{cases} x > 3, \\ x > 2; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq -2; \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x < 3, \\ x \leq -2; \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq -2. \end{cases}$$

3. 解下列不等式组:

$$\begin{aligned} (1) \begin{cases} x+1 < 4, \\ x+3 < -1; \end{cases} & \quad (2) \begin{cases} x+2 \leq 5, \\ 3x-1 > 8; \end{cases} \\ (3) \begin{cases} 4-3x > 3x+1, \\ 2x-1 > 3x+2; \end{cases} & \quad (4) \begin{cases} 4x-4 > 3x, \\ 3x+1 \leq 2x-1. \end{cases} \end{aligned}$$

1.3.3 解一元二次不等式

含有一个未知数并且未知数的最高次数是二次的不等式叫做一元二次不等式. 一元二次不等式的一般形式是:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

或

$$ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$$

一元二次不等式的解见表 1-1:

表 1-1

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$ax^2 + bx + c > 0 (a > 0)$ 的解	$ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ 的解	备注
$\Delta > 0$	$x < x_1$ 或 $x > x_2$	$x_1 < x < x_2$	x_1, x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个实数根, $x_1 < x_2$
$\Delta = 0$	$x \neq -\frac{b}{2a}$	无解	$-\frac{b}{2a}$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的相等实数根
$\Delta < 0$	x 为任意实数	无解	

例 5 解下列不等式:

$$(1) x^2 - 4x + 3 > 0; \quad (2) -x^2 + x + 6 \geq 0.$$

解: (1) $a = 1 > 0, \Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0$,

方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 有两个不相等的实数根 $x_1 = 1, x_2 = 3$.

因此, 不等式 $x^2 - 4x + 3 > 0$ 的解为 $x < 1$ 或 $x > 3$.

(2) $a = -1 < 0$, 不等式两边同乘 -1 , 得 $x^2 - x - 6 \leq 0$,

此时 $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$, 方程 $x^2 - x - 6 = 0$ 有两个不相等的实数根 $x_1 = -2, x_2 = 3$.

因此, 不等式 $-x^2 + x + 6 \geq 0$ 的解为 $-2 \leq x \leq 3$.