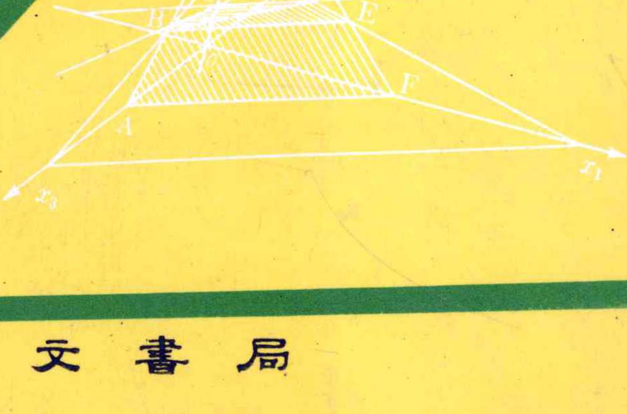
線型規劃

LINEAR PROGRAMMING

陳光隆 編譯　　An-min Chung



復文書局

線型規劃

LINEAR PROGRAMMING

An-min Chung 陳光隆 編譯

復文書局

線型規劃

序　言

數學和統計在解決企業和工業問題上的增加使用集中於線型規劃，其爲尋求工業上廣泛接受的少數複雜分析技術之一。很多大學已經介紹線型規劃的課程，但是，直到最近，尙無一本適合的教科書。它們大部份不是避免完全地牽涉到線型規劃的數學面，不然就是針對數學初開始學者可理解的水準上討論它們。對於無論在校內或校外而注意這個發展且因而希望了解線型規劃理論的非數學基礎（ non–mathematicalel –oriented ）之漸增人群，一個有效的學習工具之缺乏仍然是爲一持續的挫折來源。

本書是爲一種精細的數學理論的介紹，爲描述和印證線型規劃爲分析工具。因此學習本書，讀者應該接觸相當擴大的數學知識領域，這將是使作者愉快而非驚訝的事。

這本書僅假設有一基本代數基礎而由解釋線型規劃問題的特徵開始。接下來仔細解釋矩陣代數和行列式的原則和像線性獨立、向量空間、基的基本觀念。在第三章裡對線型視劃解的性質加以探討作爲單純法（ Simplex method ）發展舖路。而單純法本身在第四章和第五章裡分別就其理論觀點和計算觀點來探討。兩種單純法的變形一修正單純法（ revised simplex ）和二元單純法（ Dual Simplex ）在第六章介紹。敏感度分析（ Sensitivity analysis ）則在第七章學實例說明。二元理論（ theory of dual ）由應用奇異的向量解對觀念在第八章裡引介之。

此有了這麼多基本理論後，介紹運輸問題作爲一般線型規劃問題的一個特例。最後在第十章裡，敍述許多很高深的線型規劃專題。

全書所舉的數字例子用來說明重要觀念和定理。儘可能的使用企業和工廠上的例子以使讀者不斷記憶著線型規劃的實用性。本書並無企圖規避觀念和定律，只因爲它們是數學的。相反地，不斷努力地以簡明方式來討論它們，但是期望讀者能以一種漸近的自由運用方式，來發展自己的數學能力。數學基本上講是邏輯的學問，只要牢牢抓住它的令人迷惑符號和基本規則就不難了解什麼是邏輯。對於一個仔細的初學者言，本書的主要目標之一爲加强讀者的數學，到了完成了這本書後，他就能在這個領域裡向技術叢書裡探索了。

興趣在於諸如作業研究、工業工程、管理科學、和應用經濟學的學生，不論是在學或是畢業的學生，將會發現本書是特爲教科書使用而設計的。各種性質的練習題諸如啓發理論和發展技巧的在每一章裡都包括入，因此本書也適合工廠的管理和幕僚人員和任何願意使用自我學習方法的人。在Drexel 試驗一季課程兩年的結果，它被發現包含了在一季裡能舒適處理得了的更多內容。如果時間是一項限制因素的話，那麼可以刪掉下列內容：第六章的第6－5、6－6節，第七章，第八章的8－4節，和第十章。具有充足矩陣代數背景的學生，可代以第二章作爲上列建議刪掉部份而不會有任何困難便完成整本書的學習。本書的優點之一是它允許個別的教者以任何方式加入他認爲需要的內容。例如，喜歡理論的可額外介紹網路流量理論的內容，而其他喜歡應用者可使學生接觸更多目前有載述的工業實例。

謝謝我在Drexel 的同事，特別是Samuel S. Mc Neary，他閱讀和提供原稿數學部份的重要建議。當然，所有的錯誤是我個人的責任。

A. M. Chung

譯 序

線型規劃是協助組織有效地分配有限資源的數理技巧。自 George B. Dantzing 於 1947 年建立線型規劃問題之理論及求解之單純法後，其應用範圍，日趨廣大，無論在軍事、農業、交通、運輸方面皆可應用，尤以工商企業界爲最。其後更由於電腦的迅速發展，大大地減少了線型規劃問題在變數及限制條件數量相對增加時所遭遇之困難。

線型規劃係在線型不等式限制條件下，求解線型目標函數，限制條件可代表企業之有限資源，如人力、物力、財力等；目標函數則表示吾人所欲達成之目標，故線型規劃可作爲經理人員擬定決策之參考。然則欲有效利用線型規劃解決問題，必須對線型規劃有深入了解，原書對線型規劃各項技巧均有詳盡介紹，內容廣泛而深入，適合起初學者及企業管理人士之用。故不揣淺陋，於閒暇時間將它翻譯出來，以供有興趣此數理技巧者閱讀之便。唯筆者才疏學淺，本書匆促付梓，謬誤疏漏之處再所難免，尚祈先進不吝指教是幸。

編譯者　陳光隆　謹識於古都

線型規劃

目　錄

第一章　導　論

第二章　矩陣代數和行列式的基本原理

第六章　單純法的變異

第七章　最佳解敏感度分析

第八章　二元問題

第一章　導　論

1－1　概言（*General*）

在管理學術的歷史上，在重要性上或許沒有其他時期可比擬第二次大戰後的弗雷德力克·泰勒時代。在這個十年時間兩個屬於突破性的重要發展爲管理計劃和控制這主要藝術舖好了重要前進的路。一項是數字計算機的來臨，而另一項爲工業管理問題上更高深數學和統計的應用。前者使大量資料快速而經濟的計算成爲可能，而後者提供這組織必須的理論架構和這些資料的分析。結果使始無前例複雜的企業問題現在可以獲得解決。

在管理學術上一項主要的進展是爲逐漸利用線型規劃來解決廣泛的管理問題。這個分析的工具應用在很多工業，包括石油、化學、鋼鐵、和農業。空航、鐵路、公用和財政機關也已經利用線型規劃方法作探討研究。

再者，對線型規劃的興趣已超越了企業世界的範圍。例如，經濟學家已經發現它在達成公司理論的重估價和在自由價格經濟裡資源分配理論上是有助益的。數學家經由它發理新的研究和探查路線。總之，它對企業和未來一些時期的學術世界是相當有利和重要的。在此當然我們的方法是強調線型規劃理論的基本觀念，而且時時以有關的實際企業世界問題來說明。

1－2　線型規劃問題的特徵（*Characteristics of Linear Programming Problems*）

一般而言，線型規劃是適合有共同特定特徵的某種問題的一種數

學最佳解技巧。這些特徵的解釋依照問題的特殊範圍而不同，最好是用數學用語敍述這些共同的特徵，才能保持它們的一致性。

(1) 線性目標函數——所有線型規劃問題對於它們的目標有一包含很多變數的某明確線性函數的最佳解。如果我們把這個線性目標函數表爲 $f(X)$ 和問題中的適當變數表爲 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，則一線型規劃問題的目標永遠是極大化（或極小化）

（1.2.1） $f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$（註一）

$c_1, \ldots, c_n$ 表示問題的參數。換句話說，目標不僅是完成某些東西，而且是用“最好的”可能方式去完成它。企業營運上常常遭遇到這種想像的目標的事實，例如，去求最大利潤，或求最小成本，這是主要解釋爲何線型規劃在企業上如此有用。

* 顯然這些係數 $c_1, \ldots, c_n$ 符號沒有個別限制或集體限制。

然而，並非所有有關求最佳目標的問題都能訴諸線型規劃解。目標必須也能夠敍述成此問題的變數的一個線性函數。然何謂線性函數？在數學上，一個函數，擧說 $f(X)$，若且唯若下列兩個條件滿足了則它就說是線性的（註二）。

a. $f(kX) = kf(X)$,

b. $f(X_1 + X_2) = f(X_1) + f(X_2)$,

K是一常係數；X是 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的變數集合，而 X_1, X_2 是 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的兩個不同組值。用文字敍述，第一個條件就是暗示變數乘以一特定常數K應該和把X的函數值乘以相同的常數K會導致相同的函數值。第二個條件稍微困難解釋。主要地它需要如沒有變數 X_1 和 X_2 的兩組值，（$X_1 + X_2$）的函數值必須和從 X_1 和 X_2 各別得到的函數值的和相等。

基於上述的定義，我們可很容易地證明如（1.2.1）所示的一次多項式爲一線性函數。

因爲如果

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n ,$$

則

$$
\begin{aligned}
f(kX) &= c_1(kx_1) + c_2(kx_2) + \cdots + c_n(kx_n) \\
&= k(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n) \\
&= kf(X)
\end{aligned}
$$

再者，設 X_1 表示 x_{11} ，…，x_{1n} 這組值，而 X_2 表示 x_{21} ，…，x_{2n} 另外這組值，則有

$$
\begin{aligned}
f(X_1 + X_2) &= c_1(x_{11}+x_{21})+c_2(x_{12}+x_{22})+\cdots+c_n(x_{1n} \\
&\quad +x_{2n}) \\
&= (c_1x_{11}+c_2x_{12}+\cdots+c_nx_{1n}) \\
&\qquad +(c_1x_{21}+c_2x_{22}+\cdots+c_nx_{2n}) \\
&= f(X_1)+f(X_2)
\end{aligned}
$$

另一方面，像 $\sin x_1+\sin x_2$ ，$x_1^2+x_2^2$ ，或一般言，所有三角函數，指數函數和次數大於 1 的多項式函數都不是線性函數，因爲兩個條件都不能滿足。有些函數可能滿足一個但不能滿足另外一個條件。例如，$f(X)=\dfrac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2+x_2^2}$ 滿足第一個但不能滿足第二個條件，因此它不是線性函數。

(2)　線性限制式———假設我們要求一線性函數如 $2x_1-3x_2$ 的最大值，因爲 x_1 是結合一正係數而 x_2 是結合一負係數，顯然我們只要增加 x_1 和減少 x_2 就可增加這個函數值。這個可以無限的延續下去直到 x_1 增到正無限大而 x_2 減至負無限大，而得到函數值將是無限大的結果。事實上，如果沒有限制變數的值的話，所有的線性函數本身皆有一正無限大的最大值和一負無限大的最小值。這意謂它們都有相同的最大值和最小值。因此除非變數限制於它們假定的值範圍內，否則求一線性函數最佳解的問題將是沒有數學意義的問題。在線性規劃中，這樣的限制是包含於如下的一組線性不等式：

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \le b_1 , \\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \le b_2 , \\
(1.2.2)\quad &\cdot \qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}
$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m ,$$

a_{11} , a_{12} , $\cdots$, a_{1n} , a_{m1} , a_{m2} , $\cdots$, a_{mn} 是常數係數（註三），而 b_1 , b_2 , $\cdots$, b_m 爲絕對常數。關於這些限制（用線型規劃的術語叫做結構限制（ structural constraints ）），有三點應該知道，第一，和上述定義的線性函數意思相同，它們是線性的。第二，它們特徵上稱爲不等式，雖然等式限制沒有絕對排除。最後，這種限制的數目，也就是說 m ，除非它影響實際計算問題是不受制於任何方式。結合這些限制式定義了變數可接受值的區域。因爲這個區域可能或不可能包括無限大值，線型規劃變成在這個區域內選擇一組（變數）值，它將得到目標函數的最大（或最小）值。

這些數學表示和實際世界的關聯不遠就可見了。例如，如果我們說要決定生產一組 n 個產品各項要生產多少的管理問題，某些產品可能需要相同型式的鋼鐵、或相同的銲接操作、或相同的裝配設備，這種期望是合理的。原料的供應、或機器時間的供應、或裝配設備的供應是固定的，這又是可合理期望的，這些產品的相對生產水準有一實際限制。除此，可能有送貨流程的時間限制，預算的財務限制，工程顧慮上的技術限制等等。在下節將證明，是否有限制式，問題並非即如此，而視它們是否成爲確定的數數敘述；而如果有的話，是否這敘述是線性不等式；如果它們不是的話，則這問題並非是線型規劃問題（註四）。

(3) 一非負限制式一因它在企業和工業應用的直接發展，所有線型規劃問題需要它們的變數解值是非負的，也就是零或正的但不是負的。這是需要的，因爲在企業和工業上的變數，例如生產水準、存貨數量等等通常沒有有意義的負數相對物。數學上言，這些非負限制式可以寫成如下：

$$(1.2.3) \qquad x_1 , x , \cdots , x_n \geq 0$$

雖初看之下這些限制的加入似增加解題的困難，實際上一我們將在第四章見及一它們可以由一簡單的轉換規則來處理，它將自動剔除所有

不能接受的非負解。它們在問題中的存在除了提供正確計算的額外核正外沒有什麼操作上特異一當我們完成第五章將成爲很清楚的一點。

綜合之，一個線型規劃問題可由下列三個部份來認識：

$$\text{Maximize } f(X)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\ , \quad (1.2.1)$$

(1.2.4)

$$\begin{aligned}\text{subject to:}\quad & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\le b_1\ ,\\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\le b_2\ ,\\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1.2.2)\\ & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\le b_m\ ,\\ \text{and}\quad & x_1,x_2,\cdots,x_n\ge 0 \quad (1.2.3)\end{aligned}$$

最好我們指出如果我們在不等式兩邊乘以－１，則„ $\le$ ”不等號可以轉換成„ $\ge$ ”。因此在(1.2.4)表示的結構限制是完美地一般性。更有此者，因爲所有不等式可由加一或減一非負變數轉換成等式，然而在那種情形必須規定 $n\ge m$ ，否則問題很可能沒有解。

小心探查(1.2.4)可能意示問題可由先找出(1.2.2)的可能解，然後刪除破壞(1.2.3)的那些，最後在剩餘解中找出一個能使(1.2.1)中的 $f(X)$ 最佳的方式來求解。然而我們很快地知道(1.2.2)如有任何解將允許有無限多解存在；因此如果有可能，完全列數出它們所有也是不切實際的。所以，依據問題的理論性質小心分析來得到更爲有效方法是必須的。這樣一個方法就是單純法(simplex method)，它首先由George B. Dantig在美國空軍部門專心研究計劃時與一起工作的Marshall Wood，Alex Orden和其他人提出的。這個方法和它的以後修正、擴展和應用將建立本書以後幾章的主題。

1–3　舉說線型規劃的問題　(*Illustrative Linear Progammimg Problems*)

(1) 產品組合問題—讓我們假設有一製造廠商通常製造三種產品，叫做A、B和C，而每單位各別售價爲$ 5，$ 10和$ 20。再進一步假設這些價格不管公司產量爲何始終爲常數，也就是市場可以吸收任何數量的產品而不會對它們的價格有害的影響。生產總共需要四種投入因素，每一種產品所需要每一種投入因素的數量以及這些投入因素的可用供給數和單位成本如下列表所示：

投　入	單位成本	產　品			投入的供給量
		A	B	C	
1	2	0	1	2	100
2	1	1	2	1	200
3	0.5	4	6	10	400
4	2	0	0	0	100

假設在公司生產決定上沒有其他的限制，要獲得最大利潤則每項產品應該生產多少呢？

稍微思慮一下就知道這個問題的一般性質，三種產品都是可獲利的而在資源供給固定下競爭。如果目標是求最大利潤，則具有最高利潤邊際（Profit margin）的產品在資源的使用上給予最高優先直覺上看起來似合理的。然而再進一步考慮很快顯示這種方法的令人誤解本質，例如只要考慮這種產品的需要，資源的供應可能非常不平衡，因此嚴重限制它的產能；或是它的生產可能耗盡其他產品生產所特別需要的某特殊投入因素的供應，使得其他投入因素的大量留著沒用（也就是閒餘能量（idle capacity））。這些初步的考慮足以指出各別產品的產量決定是互相依賴的。因此一種“同時的”步驟（simultaneous approach）—譬如由線型規劃表示者—是需要的。

現在讓我們有系統地建立這個問題。首先考慮問題的目標，因爲我們試圖求得總利潤的最大，自然我們需要知道三種產品的每一種單位利潤。

因爲每一單位的A需要投入因素2的1單位和投入因素3的4單

位，其各別單位成本為$ 1和$ 0.5，則生產一單位A的總成本為 $1\times1+4\times0.5=\$3$。因為A的價格為$ 5，所以A的單位利潤為 $\$5-\$3=\$2$。同理，我們找出B和C的單位利潤各為$ 3和$ 6。現在讓我A、B和C的未知產量各是變數 x_1, x_2 和 x_3，則總利潤可表示為 $f(X)=2x_1+3x_2+6x_3$，當然這就是我們希望求得最大值的目標函數。

然而生產是受限於可用資源量，因為A不需要投入因素1，而B和C各需要1和2單位，則 x_1 單位A、x_2 單位B和 x_3 單位C的投入1總需要量為 $0\cdot x_1+1\cdot x_2+2\cdot x_3$，它不能大於投入因素1可用量，因此 $x_2+2x_3\leq100$。同理我們對投入2可寫成 $x_1+2x_2+x_3\leq200$，對投入3可寫成 $4x_1+6x_2+10x_3\leq400$，最後對投入4可寫成 $2x_3\leq100$。再者因為生產不能是負的，我們需要 $x_1\geq0$，$x_2\geq0$ 和 $x_3\geq0$。整個問題則成為

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximize } f(X)=2x_1+3x_2+6x_3,\\
&\text{subject to:}\qquad x_2+2x_3\leq100,\\
&\qquad\qquad x_1+2x_2+x_3\leq200,\\
&\qquad\qquad 4x_1+6x_2+10x_3\leq400,\\
&\qquad\qquad 2x_3\leq100,\\
&\text{和}\qquad\qquad x_1,x_2,x_3\leq 0,
\end{aligned}
$$

根據(1.2.4)它顯然是一線型規劃問題。

(2) 飼料混合問題—跟上面有密切關聯的一個問題是所謂的飼料混合問題。假定農夫興趣於找尋混合許多食料，例如稻穀、小麥、黃豆和麥麩粉的最不花費錢公式以使餵食他的豬隻能滿足脂肪、蛋白質、維他命、礦物質等等的最低營養需求。當然事先他必須知道有關這些食料的成本和營養範圍。問題是：他應用使用什麼樣的比例才能以最低的成本產出令人滿意的餵食？

顯然本問題的目標是求成本函數的最小而不是像前面的例子尋求利潤函數的最大。再者限制式必須達到最低限的形式，因此為“≥”而不是“≤”型式。變數是在所需要公式中各食料的不同比例當然也

是受限於非負限制式的。因此我們再得到一個線型規劃問題，詳細情形在這裡我們不需要把它列出來。注意有興趣的是多年以前線型規劃問題眞實用來解決同樣人類食譜問題，它是從 77 種不同的食物選擇那些能以最低可能的成本來滿足最低的營養需求，結果發現這些“健康”飲食包括九個題目，也就是麥粉、穀食、蒸煮過的牛奶、花生奶油、豬油、牛肝、甘藍菜、馬鈴薯和菠心菜，而一年僅需要花費每人以 1939 年價格計算大約＄39.67（註五）的價錢。然而除了營養以外假設大多數的人是願意消耗更多而非獲得各種不同是安全的。

(3) 運輸問題一運輸問題實在是線型規劃問題的子類（sub－class），它可以適用於很多不同情況。最簡單的形式，這個問題敍述在一公司內希望尋求從已知存量的倉庫運送產品至已知需求量的市場的最便宜方法。

特別地讓我們假設這個公司有 3 個倉庫，叫做 W_1、W_2 和 W_3，它們通常供應它們的產品到 5 個市場，設爲 M_1、M_2；…，M_5。在這些倉庫的可用存量爲 b_1、b_2、b_3，而市場的需求量爲 a_1、a_2，…，a_5。從 W_1 到 M_1 的運輸單位成本爲 c_{11}，從 W_1 到 M_2 的單位成本爲 c_{12} 等等。總言之，從 W_i，$i=1$，2，3 到 M_j，$j=1$，2，…，5 的單位成本是 C_{ij}。因爲總運輸成本完全視運送的不同數量，這樣我們應該把後者視爲問題的變數似是自然的。把從 M_i 到 M_j，$i=1$，2，3，而 $j=1$，2，…，5 應該運送的未知數表示爲 x_{ij}。我們則有下列要求極小的目標函數：

$$\begin{aligned}\text{Minimize } f(X) = {} & c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\cdots+c_{15}x_{15}\\ & +c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+\cdots+c_{25}x_{25}\\ & +c_{31}x_{31}+c_{32}x_{32}+\cdots+c_{35}x_{35}\end{aligned}$$

然而因爲每一倉庫僅有一有限存量，從每一倉庫運送至所有市場的總量必須不能超過它的存量。因此這些變數受限於下列三個“能量”限制：

$$x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{15}\le b_1 \text{（}W_1\text{ 的能量）}$$
$$x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{25}\le b_2 \text{（}W_2\text{ 的能量）}$$