

# 高考数学能力考查 与题型设计

教育部考试中心

高等教育出版社

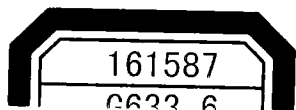
# 高考数学能力考查 与题型设计

首都师范大学数学研究所



# 高考数学能力考查 与题型设计

教育部考试中心



高等教育出版社

(京) 112 号

定价:15.00 元

图书在版编目(CIP)数据

高考数学能力考查与题型设计/国家教委考试中心编著.  
北京:高等教育出版社,1997.11(2000 重印)

ISBN 7-04-006629-7

I. 高… II. 国… III. 数学课-高等学校-入学考试-试题-研究 IV. G633.606

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (97) 第 24460 号

\*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588

涿州市星河印刷厂

开本 787×1092 1/32 印张 14.75 字数 320 000

1998 年 1 月第 1 版 2000 年 1 月第 4 次印刷

印数 150 186-220 185

定价 15.00 元

本书如有质量问题,请与图书供应部门联系。

版权所有,不得翻印

**高考数学科命题委员会**  
**“八五”科研课题组 编著**

任子朝 主 编

# 前 言

随着高中毕业会考制度的建立与推行，近几年国家教委推出了高考科目组试行方案，即：文科考语文、数学、外语、政治、历史；理工科考语文、数学、外语、物理、化学。俗称“3+2”方案。这是在全国普遍建立高中毕业会考制度的基础上，对高考科目设置的一项重要改革。为适应这一形势的需要，高考命题在改进考试形式、控制评分误差的基础上，突出进行了考试内容的改革——在考查知识的同时注重能力的考查。高考（各有关学科）应考哪些能力，能力要求如何分层次，用什么题型来考查，是一项繁难的科学研究工作，我们多年来的实践和考试科学研究都证明，世界上不存在不受学习机会、动机和考试方法影响的直接测验能力的方法。换言之，孤立的、纯粹能力测验是不存在的，它必须依赖于一定的知识基础；还要由考试的目的来决定测试的能力范畴。因此，在目前的高考体制下，能力考查既不能脱离各学科的体系、特点，又不能超出《中学各科教学大纲》规定的范围，还要按照《普通高等学校招生全国统一考试说明》（后简称《考试说明》）的要求和高中毕业生的实际情况来命题，这的确增加了高考命题工作的难度。

正是基于上述客观形势的实际需要，作为实施高考的职能部门——国家教委考试中心，历来都十分重视考试科学的研究工作，力求把考试实践中遇到的重大理论和实际问题，归纳整理成为研究课题，组织力量重点突破，并用其研究成果

来指导工作，提高水平。同时每年考试之后，将它作为一项重要工作，及时组织命题专家、高考评卷点的负责人、高校教师、中学教师及有关教研人员共同对每年的高考试卷和试题进行研究、分析和评价，以便及时总结经验，为进一步研究、改进高考命题，充分利用考试信息，更好地发挥高考的积极导向作用，使其保持良好的社会信誉，正确体现国家意志，科学、公正地为国家选拔人才服务。

“八五”期间，由国家教委考试中心申报，经全国教育科学规划办公室批准设立的国家级重点教育考试科学研究课题——会考与高考制度改革研究。高考数学、物理、化学学科命题委员会“八五”科研课题组进行的高考能力考查、题型功能研究，就是其中重要的子课题。各课题组用了几年时间，对高考学科能力结构、题型功能进行了科学的测试和系统的分析研究，取得了可喜的成果。有些成果已被运用到命题的实际操作过程中，为科学地编制试题起到了重要作用。

高考数学、物理、化学能力考查与题型设计丛书的问世，是各课题组“八五”考试科学研究课题成果的如实反映。本丛书既总结了多年来各科命题的经验，又提出了学科测量中行之有效的能力测试与题型设计原则和方法，指明了各类题型的命题意图和应具备的功能。

通过各学科的深入研究和本丛书的系统总结，我们期望能够对各学科命题、考试、教学等方面的思路和原则起到具体的沟通作用，对进一步弄清考试与教学的辩证关系，促进素质教育的发展，更好地贯彻国家教委颁发的《考试说明》的精神起到积极的作用。

由于本丛书是考试科学研究成果论著，因而其专业性、理论性和实践性都比较强，难免有不当之处，敬请一切关心高

考研究工作的人士不吝赐教.

马金科

1997年9月29日

# 《在会考后的高考中考查数学能力研究》

## 课题鉴定意见

### 一、对数学能力的研究

以一般心理认知过程理论为基础,把心理学关于能力的分析同数学活动过程的特征相联系,对数学能力的构成作了具体的划分,得出数学能力的五大成分,即数学观察力、数学记忆力、空间想象能力、数学思维能力和数学化能力,并且指出数学思维能力是数学能力的核心,进而对组成数学思维的12种成分<sup>①</sup>作了较深入的定量分析,明确了各能力成分的层次性和相关性,并从中得出数学思维的塔式结构图式.这是对克鲁捷茨基关于数学能力结构研究的深入和发展,是当今在这一方面得到的较好的成果.这不仅为高考数学能力的测试和命题提供了理论依据,而且为数学教学提供了理论基础,其中关于思维能力各因素之间既有相互促进又有相互干扰的提法,以及能力和知识的关系只是中度相关的提法,都是具有创见的论点.

二、对于数学高考特征的概括和论述,充分反映了高考的目的和性质,比较准确地说明了数学高考的特点,特别是明确数学高考应注重考查数学能力,并应兼顾解题速度和适当安排难度,为高考命题和组卷提供了明确的依据.

三、根据数学能力结构的研究成果,对高考数学学科所

---

<sup>①</sup> 详见正文第9页.

要求的四种能力（运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力、分析问题和解决问题的能力）的考查要点和要求作了具体的规定，可以使命题工作科学化，易于操作。同时，这部分成果为制定数学高考标准提供了良好的基础。

四、在以上研究成果的基础上，对高考数学命题的原则和方法提出了原则性的指导意见：明确高考数学的目的是通过数学知识考查一般心理能力；以能力立意编制试题，单题的立意由整卷的布局决定；四种数学能力同等重要；综合考查各种能力；合理配制题型，确定试题的难度结构，这些原则是本课题总结我国多年高考数学科资料研究和分析的重要结论，既有科学性又符合我国实际情况，可以指导今后高考数学科命题的工作。

五、课题的研究过程中，对国内外有关资料作了较仔细的收集和整理；针对所研究的问题组卷测试；并且用研究的成果指导高考数学科的命题工作；对能力的测量效度对大学生作了追踪测试；对取得的数据作了准确的统计分析，体现了定性分析和定量分析相结合的科学研究方法。因此，所得的结论具有科学性。

六、课题研究报告中个别问题的提法，有关分析问题和解决问题的主客体问题的说明，似可商榷。

综上所述，本课题已达到预定的研究目的。

国家教育委员会考试中心课题评估委员会

1996年6月10日

## 本书中常用的缩写字和术语

- 难度** 试卷(题)的难易程度,一般用试卷(题)的得分率或答对率表示,所以难度事实上是容易度.其值在0~1之间,数值越大,说明试卷(题)越容易.
- 区分度** 试题对不同考生的知识、能力水平的鉴别程度.如果一个题目的测试结果使水平高的考生答对(得高分),而水平较低的考生答错(得低分),它的区分能力就很强.题目的区分度反映了试题这种区分能力的高低.一般认为,区分度的数值达到了0.3,便可以接受;低于0.3的题目,区分能力差.
- 信度** 信度是指使用同一试卷对考生重复测验时,或两个平行试卷对考生测验时,所得测验分数的一致性和稳定性程度.
- 效度** 效度是指考试有效性或正确性的质量指标.考试效度的高低反映着考试是否达到它的预定目的,是否考了要考的内容.

# 目 录

|                                |         |
|--------------------------------|---------|
| <b>第一部分 数学能力考查</b> .....       | ( 1 )   |
| 一、数学能力的本质特征 .....              | ( 1 )   |
| (一) 能力的一般概念 .....              | ( 1 )   |
| (二) 数学能力 .....                 | ( 4 )   |
| 二、数学能力结构 .....                 | ( 8 )   |
| (一) 数学能力结构成分研究综述 .....         | ( 8 )   |
| (二) 数学能力的先导——数学观察力和数学记忆力 ..... | ( 15 )  |
| (三) 数学能力的基础——数学化能力 .....       | ( 19 )  |
| (四) 数学能力的核心——数学思维能力 .....      | ( 21 )  |
| (五) 数学能力的延展——空间想象能力 .....      | ( 36 )  |
| 三、高考数学能力考查 .....               | ( 45 )  |
| (一) 高考的目的和数学高考的性质 .....        | ( 45 )  |
| (二) 逻辑思维能力的考查 .....            | ( 50 )  |
| (三) 运算能力的考查 .....              | ( 85 )  |
| (四) 空间想象能力的考查 .....            | ( 117 ) |
| (五) 分析问题和解决问题能力的考查 .....       | ( 136 ) |
| <b>第二部分 题型设计</b> .....         | ( 156 ) |
| 一、数学试题的题型分类 .....              | ( 156 ) |
| (一) 挑选型与提供型 .....              | ( 157 ) |
| (二) 封闭式与开放式 .....              | ( 159 ) |
| (三) 客观性与主观性 .....              | ( 163 ) |
| (四) 信息重现型与信息迁移型 .....          | ( 165 ) |
| 二、高考数学试题的题型功能 .....            | ( 166 ) |
| (一) 选择题的功能 .....               | ( 167 ) |

|                                                   |       |
|---------------------------------------------------|-------|
| (二) 填空题的功能 .....                                  | (173) |
| (三) 解答题的功能 .....                                  | (177) |
| 三、高考数学能力考查的题型设计 .....                             | (184) |
| (一) 设计思想 .....                                    | (184) |
| (二) 设计原则 .....                                    | (191) |
| (三) 设计方法 .....                                    | (196) |
| 四、高考数学考试与中学数学教学 .....                             | (222) |
| (一) 高考数学科命题改革的反思 .....                            | (222) |
| (二) 中学数学教学改革的趋向 .....                             | (225) |
| <b>第三部分 试题分析</b> .....                            | (229) |
| 一、函数 .....                                        | (229) |
| 二、不等式 .....                                       | (260) |
| 三、数列、极限与数学归纳法 .....                               | (281) |
| 四、复数 .....                                        | (314) |
| 五、排列、组合、二项式定理 .....                               | (327) |
| 六、三角 .....                                        | (339) |
| 七、立体几何 .....                                      | (362) |
| 八、平面解析几何 .....                                    | (392) |
| <b>附录</b>                                         |       |
| 1997 年普通高等学校招生全国统一考试数学试题<br>(理工类) .....           | (423) |
| 1997 年普通高等学校招生全国统一考试数学试题<br>(理工类) 参考解答及评分标准 ..... | (430) |
| 1997 年普通高等学校招生全国统一考试数学试题<br>(文史类) .....           | (439) |
| 1997 年普通高等学校招生全国统一考试数学试题<br>(文史类) 参考解答及评分标准 ..... | (445) |
| <b>参考文献</b> .....                                 | (453) |

# 第一部分 数学能力考查

## 一、数学能力的本质特征

### (一) 能力的一般概念

精确区分人的个体的差异，特别是智力方面的差异是人类长久以来的愿望，但对能力及其测量的系统的研究始于19世纪。当时，达尔文创立了生物进化论，受其影响，英国优生学家高尔登(F. Galton)和心理学家斯皮尔曼(C. E. Spearman)在19世纪60年代开始研究人的智力的个别差异的测量。他们认为，人与人之间有优劣之分，优胜劣汰。他们认为企图把人分成许多等级，“使人类的精华可以飞黄腾达”。高尔登经过探索性研究认为能力可以用数量化的方法进行研究，这一思想推动了智力测验的方法的寻求。1905年法国心理学家比奈(A. Binet)和西蒙(T. Simon)制定了世界上第一个正规的智力测验的智力量表，这种用数量化的方法评

价人的智力及其发展是一个创举,由此开始对能力的实质、能力的结构以及能力的准确测量进行了研究。

有关能力的研究可以分为因素说和结构说。因素说是研究能力构成要素的学说。有代表性的是桑代克 (E. L. Thorndike) 的特殊因素理论,认为智力由许多特殊能力组成,其中包括 C (填句)、A (算术推理)、V (词)、D (领会指示)。斯皮尔曼为了说明能力的本质提出了二因素论,认为各种不同的能力包括着一种共同的因素,即 G 因素;除了 G 因素,不同的能力包含着各种不同的特殊因素,即 S 因素。凯勒 (T. L. Kelly) 和瑟斯顿 (L. L. Thurstone) 分别提出了“多因素说”。凯勒提出数、形、语言、记忆、推理五种因素;瑟斯顿提出数字因子、词的流畅、词的理解、推理因素、记忆因素、空间知觉、知觉速度七种因素。从以上各种学说可以看出,其中多数都包括了与数学有关的能力因素。

结构说强调能力是一种结构,即强调成分和成分之间的相互关系和相互作用。比较有代表性的是吉尔福特 (J. P. Guilford) 的三维结构模式,认为智力由操作、内容、结果三个维度构成空间中 120 种因子构成。英国心理学家阜南 (P. E. Vernon) 在 1960 年提出了智力的层次结构理论,认为智力是一个多层次的心理结构,最高层次是一般因素,第二层次包括言语和教育、操作和机械两大因素群,第三层次是每个大因素群又分为几个小因素群,第四层次是各种特殊能力。美国心理学家希来辛格 (I. M. Schlesinger) 和格德曼 (L. Guttman) 在 1969 年提出二维结构模型,第一维是言语、数和形 (空间) 的能力,第二维是规则应用能力、规则推理能力和学校各种学业测验成绩。

以上各种有关智力和能力的观点各有特色、也各有侧重,

为我们进一步研究有借鉴意义和参考价值。

根据我国的数学教学实际和笔试实践，我们约定，本研究的能力概念只含心理因素，不含生理因素；只含后天获得的东西，不含先天遗传的东西；着重考虑认知等智力因素，不考虑非智力因素。在这一意义上，按照心理学比较一致的看法，把能力理解为：对活动的顺利有效进行起直接、稳定的调控作用的一种个性心理特征。对于这一概念应注意三点：第一，能力是顺利完成某种活动的主观条件。因为顺利完成一项活动需要多方面的条件，既需要物质设备、工具等客观条件，也需要主体自身的知识、技能、能力、意志等许多主观条件，能力是这些诸多重要条件之一。第二，能力是指主观条件中的一种心理特征。这包含两方面的意义：（1）能力是主观条件中属于心理特征范畴的条件，因为主观中，主体掌握的知识和技能不属于心理特征范畴。（2）能力是心理特征之一，因为心理特征除了能力之外，还包括性格、气质等。第三，能力总是和一定的活动相联系，并且直接影响人的活动效率。能力总是存在于具体的活动中并且在活动中表现出来，离开了活动，就无所谓能力。当然，其他心理特征，如性格、气质等也对活动有一定的影响，但只有能力才是影响活动效率最直接、最基本的效率特征；如果一个人缺乏从事某种活动的相应的能力，那么他的性格、气质再优越，也难以顺利有效地完成这种活动。

关于智力和能力。在国内外心理学界，对智力和能力的理解很不一致，对智力和能力这两个概念的关系也存在着分歧。我们同意这样的观点，智力与能力是从属关系，智力是一个种概念，能力是一个属概念，能力的范围比智力大。能力可分为一般心理能力和特殊心理能力。一般心理能力是指

顺利完成各种活动所必备的基本心理能力，如注意力、观察力、记忆力、想象力、思维力等。智力就是这些在认识活动中表现出来的一般心理能力的一种综合的整体结构，就是由它引起并与它相互作用意识性的心理活动中的协调反应。思维力构成了智力的核心。特殊心理能力是顺利完成某种特殊活动所必备的心理能力，如数学能力就是一种特殊的心理能力，它是顺利完成数学活动所必备的心理能力。

## （二）数学能力

谈到数学能力，一般认为应将数学能力区分为两种水平：一种是独立创造具有社会价值的数学新成果的数学能力；另一种是在数学学习过程中，学习数学的能力。中学阶段数学教学应着重培养的和大学入学考试应着重考查的应是指第二种数学能力。因此把数学能力区分为两种水平是有意义的。但这两种数学能力之间有什么关系？他们有多大程度的相关？这是一个重要的问题。因为，如果这两种能力很不相同或相关程度很低，那么数学教学培养学生数学能力的意义就值得怀疑，数学考试能否有效考查学生的潜能、发现具有数学天赋的学生也值得讨论。这也是考试更加关心的问题，因为现行的高考在一定的教学范围内命题，更多的是要求学生应用一些已知的知识和方法解决问题，这其中也包含一些创造的成分，即命题人员创设的一些情境对命题人员和教师来说是已知的，但对考生来说却是陌生的，需要考生将已知的知识和方法进行重新组合，适用于新的情境，这需要考生有一定的创造性，但这还达不到我们常说的数学家的创造的程度。

关于这两种数学能力之间的关系，可以归纳为三种不同的观点，一种是以数学家阿达玛为代表的，认为这两种数学