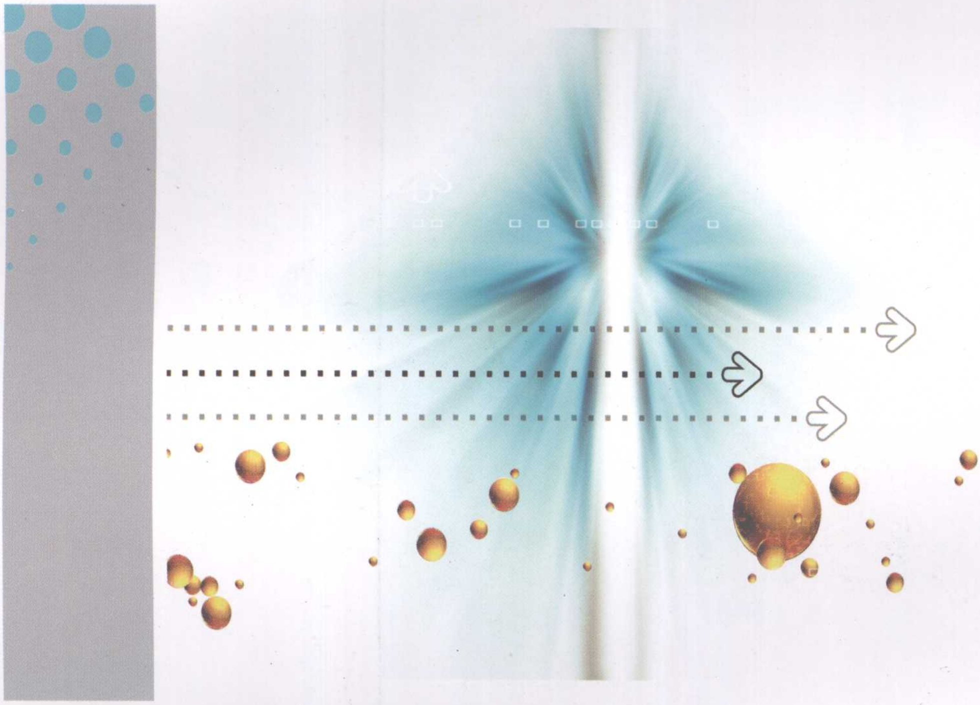
湖南省高等职业教育规划教材



高等数学 [理工类]

湖南省教育科学研究院职业教育与成人教育研究所组织编写

总主编:张孝理　主编:王晓宏

[全一册]

GAODENG SHUXUE

湖南科学技术出版社

湖南省高等职业教育规划教材

高等数学［理工类］

湖南省教育科学研究院职业教育与成人教育研究所组织编写

总主编：张孝理

主　编：王晓宏

副主编：邓新春　陈力萍　周卓夫

编写者：王喜斌　肖　俊　杨厚平　唐轮章
潘裕青　李江洪　潘劲松　刘志峰

[全一册]

GAODENG SHUXUE

湖南科学技术出版社

图书在版编目（C I P）数据

高等数学：理工类 / 湖南省教育科学研究院职业教育与成人教育研究所组织编写. 张孝理总主编. 王晓宏主编. —长沙：湖南科学技术出版社，2008.8
湖南省高等职业教育规划教材
ISBN 978-7-5357-5389-2

I. 高… II. ①湖…②张…③王… III. 高等数学—高等学校：技术学校—教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 126079 号

湖南省高等职业教育规划教材
高等数学［理工类］
组织编写：湖南省教育科学研究院职业教育与成人教育研究所
总 主 编：张孝理
主　　编：王晓宏
责任编辑：贾平静　汤伟武
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市湘雅路 276 号
http://www.hnstp.com
印　　刷：湖南航天长宇印刷有限责任公司
（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂　　址：望城坡航天大院
邮　　编：410205
出版日期：2008 年 8 月第 1 版第 1 次
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：17.25
字　　数：420000
书　　号：ISBN 978-7-5357-5389-2
定　　价：23.50 元

前　言

高等数学是高等职业院校理工类学生的一门重要必修课，其思想和方法广泛应用于科学技术、社会经济等领域，对学生的素质培养、知识迁移、专业学习和职业发展有着极其重要的作用。

本教材的编写借鉴了国内外先进职业教育理念，汲取了近年高职院校高等数学课程教学改革的成果，体现了“实用、必需、够用”的原则，注重学生的数学素养、迁移能力的培养，在编写理念、体例设计和内容安排上有以下特点：

1. 突出高职特色。根据高等数学在高技能人才培养中的基础性地位与工具性作用，对高等数学的内容进行了遴选、优化和整合。强化与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练，不追求复杂的计算与变换。概念阐述简明扼要，揭示其数学本质或直接从应用中获得知识的一般特性。

2. 风格新颖，以实际问题为载体。全书采用“引例驱动”法编写，由大量来自实际生活或社会经济中的实例引出数学知识，然后将数学知识应用于处理各种生活和实际问题，用实例加深概念方法的理解，突出数学知识点的几何意义和实践意义。同时，在知识点的编排上作了部分融合，体现了模块式教学的要求。

3. 突出应用，以学生的实际应用过程为导向。全书将引例和例题生活化、通俗化、增加可读性，力求用日常生活中简单的实际问题引出抽象的数学概念，让学生将数学问题情形与实际生活联系在一起。每节安排有练习题，每章安排有习题，以满足基础教学和学有余力的学生的要求。

4. 突出能力训练，以能力培养为目标。注重学生综合素质的培养，在练习题和习题选取上，体现数学课程改革的新思路，数学教学不仅具备工具功能，而且还具备思维训练和文化素质教育功能，重视培养学生的科学精神、创新意识和综合运用数学解决实际问题的能力。

5. 内容精简实用，条理清楚，叙述通俗易懂，深入浅出，便于自学。

本教材是在湖南省教育厅的领导下，由湖南省教育科学研究院职成教研究所组织编写的，是湖南省高等职业教育规划教材。《高等数学》(理工类)全书共一册。带“*”的章节是选学内容，供相关专业学生学习，全书建议教学时数为 130～140 学时。本书由湖南化工职业技术学院张孝理教授担任总主编，王晓宏任主编，陈力萍、邓新春、周卓夫任副主编。具体编写分工如下：湖南机电职业技术学院王喜斌编写第一章，湖南工程职业技术学院王晓宏编写第二章，湖南工程职业技术学院肖俊编写第三章，湖南工业职业技术学院邓新春编写第四章，湖南科技工业职业技术学院杨厚平编写第五章，湖南化工职业技术学院唐轮章编写第六章，湖南石油化工

职业技术学院潘裕青、李江洪编写第七章，长沙通信职业技术学院周卓夫编写第九章，湖南机电职业技术学院王喜斌、潘劲松编写第十章，湖南化工职业技术学院刘志峰编写第十一章，湖南生物机电职业技术学院陈力萍编写第八章和第十二章。本书统稿工作由王晓宏、陈力萍、邓新春、周卓夫完成。

在本教材的编写过程中得到了湖南省高职院校诸多数学教师的帮助，在此特表谢意。

由于编者水平有限，书中错误或不当之处在所难免，敬请指正。

湖南省教育科学研究院职业教育与成人教育研究所

2008年7月

目　录

第一章　函数　极限与连续 ……………………………………………… (1)
§1.1　预备知识 ……………………………………………… (1)
1.1.1　初等函数 ……………………………………………… (1)
1.1.2　极限的运算法则 ……………………………………………… (4)
§1.2　无穷小与无穷大　两个重要极限 ……………………………………………… (6)
1.2.1　无穷小与无穷大 ……………………………………………… (6)
1.2.2　两个重要极限 ……………………………………………… (8)
§1.3　函数的连续性 ……………………………………………… (11)
1.3.1　函数连续性的概念 ……………………………………………… (11)
1.3.2　闭区间上连续函数的性质 ……………………………………………… (13)
本章小结 ……………………………………………… (15)
习题一 ……………………………………………… (16)
第二章　导数与微分 ……………………………………………… (18)
§2.1　导数的概念 ……………………………………………… (18)
2.1.1　变化率问题举例 ……………………………………………… (18)
2.1.2　导数的定义 ……………………………………………… (19)
2.1.3　利用定义求函数的导数 ……………………………………………… (20)
2.1.4　导数的几何意义 ……………………………………………… (21)
2.1.5　可导与连续的关系 ……………………………………………… (22)
§2.2　求导法则与求导公式 ……………………………………………… (23)
2.2.1　导数的四则运算法则 ……………………………………………… (23)
2.2.2　复合函数的求导法则 ……………………………………………… (24)
2.2.3　隐函数的求导法则 ……………………………………………… (25)
2.2.4　高阶导数 ……………………………………………… (26)
§2.3　函数的微分 ……………………………………………… (28)
2.3.1　微分的定义 ……………………………………………… (28)
2.3.2　微分的几何意义 ……………………………………………… (30)
2.3.3　基本初等函数的微分公式与微分运算法则 ……………………………………………… (30)
2.3.4　微分在近似计算上的应用 ……………………………………………… (32)
本章小结 ……………………………………………… (35)
习题二 ……………………………………………… (37)

第三章　导数的应用 …………………………………………………………………… (40)
§3.1　拉格朗日中值定理…………………………………………………………… (40)
§3.2　洛必达法则…………………………………………………………………… (42)
§3.3　函数单调性与极值…………………………………………………………… (44)
3.3.1　函数单调性的判定法…………………………………………………… (44)
3.3.2　函数的极值及其求法…………………………………………………… (46)
3.3.3　函数的最大值和最小值………………………………………………… (48)
§3.4　曲线的凹凸性与拐点………………………………………………………… (50)
§3.5　曲率…………………………………………………………………………… (53)
3.5.1　曲率的概念……………………………………………………………… (53)
3.5.2　曲率的求法……………………………………………………………… (54)
3.5.3　曲率圆和曲率半径……………………………………………………… (55)
本章小结 ………………………………………………………………………… (58)
习题三 …………………………………………………………………………… (59)
第四章　不定积分和定积分 …………………………………………………………… (62)
§4.1　原函数与不定积分…………………………………………………………… (62)
4.1.1　原函数…………………………………………………………………… (62)
4.1.2　不定积分概念…………………………………………………………… (63)
4.1.3　不定积分的性质和意义………………………………………………… (63)
4.1.4　基本积分公式和直接积分法…………………………………………… (64)
§4.2　定积分的概念………………………………………………………………… (66)
4.2.1　两个实例………………………………………………………………… (66)
4.2.2　定积分的概念…………………………………………………………… (68)
4.2.3　定积分的性质…………………………………………………………… (69)
4.2.4　定积分的几何意义……………………………………………………… (70)
§4.3　微积分基本公式……………………………………………………………… (72)
4.3.1　积分上限函数及其导数………………………………………………… (72)
4.3.2　牛顿(Newton)-莱布尼兹(Leibniz)公式 ……………………………… (72)
§4.4　基本积分法…………………………………………………………………… (74)
4.4.1　不定积分第一类换元积分法(凑微分法)……………………………… (74)
4.4.2　不定积分第二类换元积分法…………………………………………… (76)
4.4.3　定积分的换元积分法…………………………………………………… (77)
4.4.4　分部积分法……………………………………………………………… (79)
*§4.5　广义积分 …………………………………………………………………… (82)
4.5.1　无穷区间上的广义积分的定义………………………………………… (82)
4.5.2　无穷区间上的广义积分的计算………………………………………… (82)
本章小结 ………………………………………………………………………… (84)
习题四 …………………………………………………………………………… (87)
第五章　定积分的应用 ………………………………………………………………… (90)
§5.1　微元法及定积分在几何上的应用…………………………………………… (90)

5.1.1 定积分的微元法…………………………………………………………………… (90)
5.1.2 定积分在几何上的应用……………………………………………………… (91)
§5.2 定积分在物理上的应用………………………………………………………… (95)
5.2.1 变力沿直线所作的功………………………………………………………… (95)
5.2.2 液体的压力……………………………………………………………………… (96)
5.2.3 函数的平均值…………………………………………………………………… (97)
本章小结 ………………………………………………………………………………… (99)
习题五………………………………………………………………………………………… (100)
第六章 常微分方程………………………………………………………………… (101)
§6.1 微分方程的概念 ……………………………………………………………… (101)
§6.2 一阶微分方程 ………………………………………………………………… (102)
6.2.1 可分离变量的微分方程 …………………………………………………… (103)
6.2.2 一阶线性微分方程 ………………………………………………………… (104)
§6.3 二阶常系数线性微分方程 …………………………………………………… (107)
6.3.1 二阶常系数线性微分方程解的结构 ……………………………………… (108)
6.3.2 二阶常系数齐次线性微分方程的解法 …………………………………… (108)
*6.3.3 二阶常系数非齐次线性微分方程的解法 ………………………………… (110)
本章小结……………………………………………………………………………………… (114)
习题六………………………………………………………………………………………… (115)
第七章 多元函数微分……………………………………………………………… (117)
§7.1 空间直角坐标系 ……………………………………………………………… (117)
7.1.1 空间直角坐标系 ……………………………………………………………… (117)
7.1.2 空间两点间的距离公式 …………………………………………………… (118)
§7.2 空间图形与方程 ……………………………………………………………… (119)
7.2.1 曲面方程的概念 ……………………………………………………………… (119)
7.2.2 常见空间曲面及其方程 …………………………………………………… (119)
§7.3 多元函数 ……………………………………………………………………… (121)
7.3.1 平面区域 ……………………………………………………………………… (121)
7.3.2 多元函数 ……………………………………………………………………… (121)
7.3.3 二元函数的极限 ……………………………………………………………… (123)
7.3.4 二元函数的连续性 …………………………………………………………… (124)
§7.4 偏导数 ………………………………………………………………………… (125)
7.4.1 二元函数偏导数的概念 …………………………………………………… (126)
7.4.2 求偏导数举例 ………………………………………………………………… (126)
7.4.3 复合函数的求导法则 ……………………………………………………… (128)
7.4.4 高阶偏导数 …………………………………………………………………… (129)
§7.5 全微分 ………………………………………………………………………… (130)
7.5.1 全微分的定义 ………………………………………………………………… (131)
7.5.2 全微分计算 …………………………………………………………………… (132)
7.5.3 全微分在近似计算中的应用 ……………………………………………… (132)

§7.6 多元函数的极值 …… (133)
7.6.1 二元函数极值的概念 …… (133)
7.6.2 多元函数的最大值与最小值 …… (134)
7.6.3 条件极值 …… (135)
本章小结 …… (137)
习题七 …… (139)
第八章 多元函数积分 …… (141)
§8.1 二重积分的概念与性质 …… (141)
8.1.1 二重积分的概念 …… (141)
8.1.2 二重积分的性质 …… (143)
§8.2 二重积分的计算及应用 …… (145)
8.2.1 在直角坐标系下计算二重积分 …… (145)
8.2.2 二重积分的应用 …… (148)
本章小结 …… (153)
习题八 …… (154)
第九章 无穷级数 …… (156)
§9.1 常数项级数 …… (156)
9.1.1 常数项级数的概念 …… (156)
9.1.2 级数的简单性质 …… (157)
9.1.3 级数收敛的审敛法 …… (158)
§9.2 幂级数 …… (162)
9.2.1 幂级数的概念及其收敛半径 …… (162)
9.2.2 幂级数的运算性质 …… (164)
§9.3 函数展开成幂级数 …… (165)
§9.4 傅立叶级数 …… (167)
9.4.1 三角级数 …… (167)
9.4.2 周期为 2π 的函数展开为傅立叶级数 …… (168)
§9.5 周期为 $2L$ 的函数展开成傅立叶级数 …… (171)
9.5.1 周期为 $2L$ 的函数展开成傅立叶级数 …… (171)
*9.5.2 将函数展开成正弦级数或余弦级数 …… (173)
*§9.6 傅立叶级数的复数形式 …… (174)
本章小结 …… (177)
习题九 …… (179)
第十章 拉普拉斯变换 …… (180)
§10.1 拉普拉斯变换的概念 …… (180)
10.1.1 拉普拉斯变换的定义 …… (180)
10.1.2 常见函数拉普拉斯变换 …… (182)
§10.2 拉普拉斯变换的性质 …… (183)
10.2.1 线性性质 …… (183)
10.2.2 微分性质 …… (183)

10.2.3 积分性质…………………………………………………………………… (184)
* 10.2.4 卷积定理…………………………………………………………………… (184)
* 10.2.5 其他性质…………………………………………………………………… (185)
§10.3 拉普拉斯逆变换…………………………………………………………… (187)
10.3.1 拉普拉斯逆变换的定义…………………………………………………… (187)
10.3.2 拉普拉斯逆变换的性质…………………………………………………… (187)
§10.4 用拉普拉斯变换解常微分方程…………………………………………… (189)
本章小结…………………………………………………………………………… (192)
习题十……………………………………………………………………………… (192)
第十一章 线性代数……………………………………………………………… (194)
§11.1 n阶行列式的定义 ……………………………………………………… (194)
§11.2 行列式的性质……………………………………………………………… (198)
§11.3 克莱姆法则………………………………………………………………… (202)
§11.4 矩阵的概念及其运算……………………………………………………… (204)
11.4.1 矩阵的概念………………………………………………………………… (204)
11.4.2 矩阵的加、减法和数与矩阵的乘法 …………………………………… (206)
11.4.3 矩阵的乘法………………………………………………………………… (208)
11.4.4 矩阵的转置………………………………………………………………… (211)
§11.5 逆矩阵……………………………………………………………………… (213)
11.5.1 逆矩阵的概念……………………………………………………………… (213)
11.5.2 逆矩阵的求法……………………………………………………………… (214)
11.5.3 逆矩阵的性质……………………………………………………………… (215)
§11.6 矩阵的初等变换与矩阵的秩……………………………………………… (216)
11.6.1 矩阵的初等变换…………………………………………………………… (216)
11.6.2 用初等变换求逆矩阵举例………………………………………………… (217)
11.6.3 矩阵的秩…………………………………………………………………… (218)
§11.7 线性方程组的消元解法…………………………………………………… (220)
本章小结…………………………………………………………………………… (225)
习题十一…………………………………………………………………………… (225)
第十二章 数学软件的应用……………………………………………………… (228)
§12.1 MATLAB软件简介 ………………………………………………………… (228)
12.1.1 MATLAB的启动和初始界面概述 ………………………………………… (228)
12.1.2 MATLAB命令窗口的使用 ………………………………………………… (229)
12.1.3 MATLAB的算术运算符与操作符 ………………………………………… (230)
12.1.4 MATLAB的数值量和数据显示格式 ……………………………………… (232)
12.1.5 MATLAB的符号运算工具箱 ……………………………………………… (233)
§12.2 一元函数微积分运算与二维图形的描绘………………………………… (233)
12.2.1 用MATLAB求函数的极限………………………………………………… (233)
12.2.2 用MATLAB求函数的导数………………………………………………… (234)
12.2.3 用MATLAB求函数的积分………………………………………………… (236)

12.2.4 用 MATLAB 描绘二维图形…………………………………………………………………… (237)
§12.3 多元函数微积分运算与三维图形的描绘……………………………………………………… (240)
12.3.1 用 MATLAB 求偏导数………………………………………………………………………… (240)
12.3.2 用 MATLAB 求重积分………………………………………………………………………… (241)
12.3.3 用 MATLAB 绘制三维图形…………………………………………………………………… (241)
参考答案…………………………………………………………………………………………… (245)
参考文献…………………………………………………………………………………………… (263)

第一章
函数　极限与连续

从现在开始，我们将进入微积分的学习，微积分包括微分学和积分学．函数是微积分研究的对象，在研究函数的无限变化过程中产生了极限的概念．本章我们将在对函数概念进行复习的基础上，介绍极限的概念、计算方法以及函数的连续性．

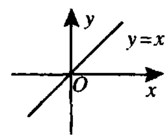
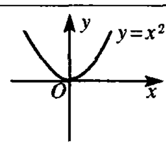
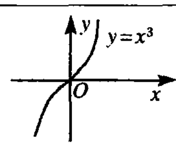
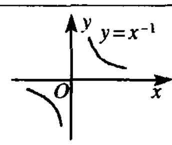
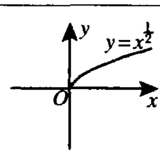
§1.1　预备知识

1.1.1　初等函数

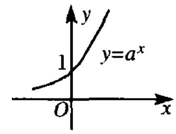
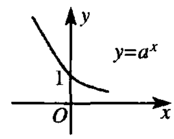
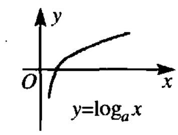
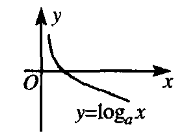
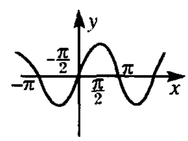
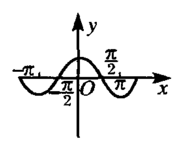
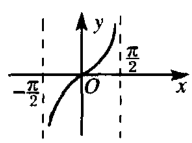
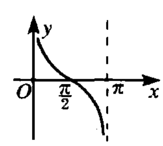
1．基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**．现将一些常用的基本初等函数的图像及其性质列于表 1.1 中．

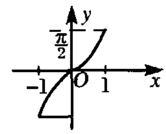
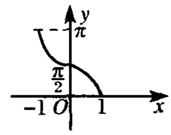
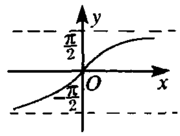
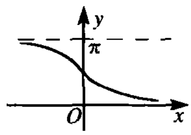
表 1.1　　基本初等函数的图像及其性质

	函　　数	定义域与值域	图　　像	性　　质
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,0)$内和 在$(0,+\infty)$内单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加

续表 1

	函数	定义域与值域	图　　像	性　　质
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数；周期为 2π；有界；在 $(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增加；在 $(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3}{2}\pi)$ 内单调减少，其中 $k\in\mathbf{Z}$
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数；周期为 2π；有界；在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单减；在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单增，其中 $k\in\mathbf{Z}$
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数；周期为 π；在 $(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增加，其中 $k\in\mathbf{Z}$
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数；周期为 π；在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少，其中 $k\in\mathbf{Z}$

续表 2

	函数	定义域与值域	图　　像	性　　质
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数 单调增加 有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少 有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数 单调增加 有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少 有界

2. 复合函数

定义 1.1　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，那么 y(通过 u 的关系) 也是 x 的函数，我们称这样的函数为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$. 而 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 称为其复合过程.

【例 1.1】 写出下列函数的复合函数

(1) $y=u^2, u=\sin x$;　　　　(2) $y=\sin u, u=x^2$.

解　(1) 将 $u=\sin x$ 代入 $y=u^2$ 可得复合函数为 $y=(\sin x)^2$.

(2) 将 $u=x^2$ 代入 $y=\sin u$ 可得复合函数为 $y=\sin x^2$.

【例 1.2】 指出下列复合函数的复合过程

(1) $y=(\arctan\sqrt{x})^2$;　　　　(2) $y=\mathrm{e}^{\sqrt{1+x^2}}$.

解　(1) $y=(\arctan\sqrt{x})^2$ 由 $y=u^2, u=\arctan v, v=\sqrt{x}$ 复合而成.

(2) $y=\mathrm{e}^{\sqrt{1+x^2}}$ 由 $y=\mathrm{e}^u, u=\sqrt{v}, v=1+x^2$ 复合而成.

3. 初等函数

定义 1.2　由基本初等函数和常数经过有限次四则运算或有限次复合且可用一个解析式表示的函数称为**初等函数**. 例如 $y=\sin(1+x+x^2)+\cos x, y=\frac{\sin x}{3x}, y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$ 它们都是初等函数. 但分段函数 $y=\begin{cases}1, x\in\mathbf{Q}\\ 0, x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$，就不是初等函数.

1.1.2 极限的运算法则

1. 极限定义

自变量在不同变化趋势下函数极限定义描述见表 1.2.

表 1.2 不同变化趋势下极限定义描述

极限名称	定　　义	记　法
数列极限	如果当 n 无限增大时，数列 $\{a_n\}$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称常数 A 是数列 $\{a_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 或 $a_n \to A(n\to\infty)$
函数极限 $(x\to\infty)$	设函数 $f(x)$ 在 $\|x\|$ 充分大时有定义，如果当 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$
函数极限 $(x\to+\infty)$	设函数 $f(x)$ 在 x 充分大时有定义，如果当 x 取正值无限增大时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 或 $f(x)\to A(x\to+\infty)$
函数极限 $(x\to-\infty)$	设函数 $f(x)$ 在 x 充分大时有定义，如果当 x 取负值其绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ 或 $f(x)\to A(x\to-\infty)$
函数极限 $(x\to x_0)$	设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内（x_0 可以除外）有定义，如果当 x 无限接近于定值 x_0 时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$
函数极限 $(x\to x_0^+)$	设函数 $f(x)$ 在 x_0 的右半邻域内（x_0 可以除外）有定义，如果当 x 从 x_0 的右边无限接近于定值 x_0 时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^+$ 时的右极限	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0+0)=A$
函数极限 $(x\to x_0^-)$	设函数 $f(x)$ 在 x_0 的左半邻域内（x_0 可以除外）有定义，如果当 x 从 x_0 的左边无限接近于定值 x_0 时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 时的左极限	$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0-0)=A$

2. 数列极限运算法则

定理 1.1 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$. 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \pm B$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \cdot B$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{A}{B}$（其中 $B \neq 0$）.

【例 1.3】 求极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7+n^2}{n(n+1)}$；　　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}]$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7+n^2}{n(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7+n^2}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{7}{n^2}+1}{1+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}=1.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}]=$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

3. 函数极限运算法则

在同一问题里，若用记号$\lim f(x)$代表自变量的变化趋势中（$x\to\infty$、$x\to+\infty$、$x\to-\infty$、$x\to x_0$、$x\to x_0^+$ 和 $x\to x_0^-$）任意一种，则函数极限运算法则可用如下定理表示.

定理 1.2　设$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则：

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

特别地，有

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=A^n;$$

$$\lim[C\cdot f(x)]=C\cdot\lim f(x)=C\cdot A\quad(C\text{为常数}).$$

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$；

(4) $\lim f[\varphi(x)]=f[\lim\varphi(x)]$（$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 能复合）.

【例 1.4】 求下列函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$；　　　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；　　　　(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x(x+1)}=0.$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3(2x+1)-x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)(2x+1)}=$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1}=\frac{1}{4}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=$

$$-\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-1.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4.$

练习题 1.1

1. 函数 $y=\dfrac{2x-4}{\ln(x+1)}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域是________.

2. 函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\ln\sin x$ 的定义域是________.

3. 判别下列函数的奇偶性：

   (1) $f(x)=2^x+2^{-x}$；　　(2) $f(x)=2^x-2^{-x}$；

   (3) $f(x)=\cos x+x^4$；　　(4) $f(x)=4x-x^2$.

4. 设 $f(2x+1)=x^2+x+1$，试求 $f(x)$.

5. 设 $f(x)=x^3, g(x)=e^x$，试求 $f(g(x)), g(f(x))$.

6. 指出下列复合函数的复合过程：

   (1) $y=\ln^3\arcsin\sqrt{2^{x-4}}$；　　(2) $y=\cos e^{\sin x^2}$.

7. 求下列数列的极限：

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+\cdots+2n}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$；

   (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n}{9n-2}$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+2\right)$.

8. 求下列各极限：

   (1) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+1)$；

   (3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x-5}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$.

9. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x & x<0, \\ x^2+1 & 0\leqslant x<1 \\ 1 & x>1, \end{cases}$，求 $f(x)$ 在 $x\to 0$ 及 $x\to 1$ 时的左、右极限，并说明 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$、$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 是否存在.

§1.2　无穷小与无穷大　两个重要极限

1.2.1　无穷小与无穷大

1. 无穷小

定义 1.3　如果 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限为零，则称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷小量**，简称无穷小，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0\text{（或}\lim_{x\to\infty}f(x)=0\text{）}.$$

例如：因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小；又因为 $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$，