401135

图书有品牌 认准王迈迈

Wmm

王迈迈图书品牌 ◆ 畅销十五年 ◆ 风靡几代人

同济大学 方程 审订

与同济大学《线性代数》第五版配套

最新工程数学（第五版）线性代数教与学参考

主编 钱志强

本书八大特色

★考点提示及大纲要求
★重点知识结构图
★常考题型与范例精解
★考研经典题剖析
★典型错误类型及根源分析
★学习效果三级测试
★课后习题详解与三级测试题答案
★疑难解答

中国致公出版社

图书有品牌 认准王迈迈

Wmm

王迈迈图书品牌 ◆ 畅销十五年 ◆ 风靡几代人

同济大学 方 程 审订

与同济大学《线性代数》第五版配套

最新工程数学(第五版)线性代数教与学参考

主编 钱志强 编者 胡喜珍 熊金明

★考点提示及大纲要求
★重点知识结构图
★常考题型与范例精解
★考研经典题剖析
★典型错误类型及根源分析
★学习效果三级测试
★课后习题详解与三级测试题答案
★疑难解答

中国致公出版社

图书在版编目(C I P)数据

最新线性代数教与学参考/钱志强主编. —北京:中国致公出版社,2001.12(2008.8 重印)
ISBN 978-7-80096-859-4

Ⅰ.最…　Ⅱ.钱…　Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 091612 号

最新线性代数教与学参考
中国致公出版社出版
新华书店经销
文字六〇三厂印装
开本:889×1230　1/32　印张 16　字数 580 千字
2008 年 8 月第 2 版　2008 年 8 月第 1 次印刷
印数:1—10000 册
ISBN 978-7-80096-859-4/G·666
定价:19.00 元

Preface 前言

线性代数是理工科学生的一门重要的必修基础课程。但该课程教学课时少，概念多，定理多，内容抽象而实例少，这就使教师在教学过程中常有“内容无法完全展开”之苦，而学生在学习过程中常出现“知其然，而不知其所以然”的现象。为此，我们结合多年来的教学经验和考研辅导反馈的信息，试图编写一本能帮助学生巩固、加深、提高和拓宽所学知识的参考书，把学生在学习中感到困难的问题、容易出错的问题集中起来进行分析探讨，对线性代数中的问题与方法进行全面系统的总结和分类，指导学生应该如何去分析解决问题，并用难度适中的题目对学生进行有计划、有步骤的训练，这对培养学生的思维能力和独立钻研精神是非常有益而必要的。

基于这种想法，我们精心汇集了历年来全国硕士研究生数学试题线性代数部分考题，对其进行了较全面的整理和分析，并反复推敲，修改和筛选出其具有很强的典型性、灵活性、启发性、趣味性和综合性的题目，并附以详细的解答过程，以便读者参考学习和自测自评，特别地，为了使学生在学完每一章节后可以立即转入到本书的学习，本书内容在编排上完全与现行教材线性代数(同济大学第五版)同步，可以作为课堂教学的补充和延续。

我们不提倡“题海战术”，但是我们一贯注重对学生思维能力的培养，基于这一宗旨,我们在对例题进行分类讲解时，特别注意了系统地讲述解题思想与解题方法，而不是题目的堆砌或单纯的题解。为了方便考研的读者，我们在解题过程中还贯穿了知识结构的前后呼应，一题多解，以期能帮助读者举一反三，取到事半功倍的效果。

本书每一章(第六章除外)都包括以下七个方面的内容:

一、考点提示及大纲要求。大纲要求一目了然，考点简明扼要。

二、重点知识结构图。该图提纲挈领，逻辑性强，体系完整。

三、常考题型与范例精解。题型典型灵活，解题方法富于技巧，内容覆盖面宽。抓住要害，突出重点、难点，深化概念，拓宽知识面。

四、考研经典题剖析。开阔视野，“一步到位”，使读者更加明了考研的题型和难度,做到有的放矢。

五、典型错误类型及根源分析。析理透彻，一针见血。

六、学习效果三级测试。循序渐进，层次分明，适合不同要求，便于复习巩固所学知识。

七、习题解答与三级测试题详解，便于读者自我检测。

最后附疑难问题解答，便于读者更加方便及时地掌握书中的重点和难点，拓宽知识面。

另外，同学们在使用本书时，请尽量先做练习，再参考本书答案和疑难详解。

我们衷心希望《最新线性代数教与学参考》能够成为广大读者的得力助手。同时，希望广大读者对书中不妥之处，来信批评指正。

来信请寄：武汉市洪山区楚雄大道268号　武汉现代外国语言文学研究所 邮编：430070

电话：027-88034727　88026460　88027608　88026817

编者

Contents

目录

第一章　行列式

第二章 矩阵及其运算

第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

第四章 向量组的线性相关性

第五章 相似矩阵及二次型

第六章　线性空间与线性变换

第一章 行列式

一、考点提示及大纲要求

考点提示

1. 排列、排列的奇偶性;
2. 逆序、逆序数;
3. 对换改变排列的奇偶性;
4. 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数;
5. 行列式的定义;
6. 行列式的展开;
7. 行列式的性质;
8. 行列式的化简及计算;
9. 克拉默法则;
10. 行列式的证明.

大纲要求

1. 会求 n 元排列的逆序数;
2. 深入领会行列式的定义;
3. 掌握行列式的性质,并且会正确使用行列式的有关性质化简、计算行列式;
4. 灵活掌握行列式按行(列)展开;
5. 会用克拉默法则判定线性方程组解的存在性、唯一性及求出方程组的解.

二、重点知识结构图

全排列 逆序数

- n元排列一共有$n!$个，其中奇、偶排列各有$\frac{n}{2}$个
- 对换改变排列的奇偶性
- 求逆序数

行列式

- 定义 $\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$
  $\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$
- 性质
  1. $D=D^T$ 2. 互换行列式的两行(列)，行列式变号.
  3. 用一个数乘行列式的某一行(列)就等用这个数乘此行列式. 4.若行列式中有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零. 5.把行列式的某一行(列)的倍数加到另一行(列)上，行列式不变.
- 展开
  $D=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$ $i=1,2,\cdots,n$ $D=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}, j=1,2,\cdots,n$
- 计算
  利用“化三角法”计算行列式
  利用范德蒙行列式计算行列式
  利用“归纳法”计算或证明行列式

克拉默法则

- $$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$
  若$D\neq 0$，则 $x_i=D_i/D$，$(i=1,2,\cdots,n)$
- $$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$
  若$D\neq 0$，则 $x_i=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$
  若$D=0$，则方程组有非零解。

三、常考题型与范例精解

例 1 排列 134782695 的逆序数为( )

(A)9; (B)10; (C)11; (D)12.

解 在排列 134782695 中,

1 排在首位,逆序数为 0;

3、4、7、8 各数的前面没有比它们自身大的数,故这四个数的逆序数均为 0;

2 的前面比 2 大的数有四个(3、4、7、8),故逆序数为 4;

6 的前面比 6 大的数有两个(7、8),故逆序数为 2;

9 是最大数,逆序数为 0;

5 的前面比 5 大的数有四个(7、8、6、9),故逆序数为 4;

于是这个排列的逆序数为

$$t = 0 + 0 + 4 + 2 + 0 + 4 = 10$$

故正确答案为(B).

例 2 下列排列中( )是偶排列.

(A)4312; (B)51432; (C)45312; (D)654321.

解 按照例 1 的方法计算知:

排列 4312 的逆序数为 5,

排列 51432 的逆序数为 7,

排列 45312 的逆序数为 8,

排列 654321 的逆序数为 15,

故正确答案为(C).

例 3 行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$,

若 $D_1 = D_2$,则 λ 的取值为( )

(A)0,1; (B)0,2; (C)1,-1; (D)2,-1.

解 按三阶行列式的对角线法则,有

$$D_1 = 10 + 2 + 27 - 6 - 30 - 3 = 0$$

$$D_2 = \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$$

若 $D_1 = D_2$,则 $(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0$,解得 $\lambda = -1$ 或 $\lambda = 1$

故正确答案为(C).

例 4 方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 有唯一解时,对 λ 的要求是( )

(A)$\lambda \neq 1, \lambda \neq 2$;　　(B)$\lambda \neq -1, \lambda \neq 2$;

(C)$\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$;　　(D)$\lambda = 1, \lambda \neq 2$.

解 由克拉默法则知,当所给非齐次线性方程组的系数行列式不等于零时,该方程组有唯一解,于是令行列式

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) \neq 0$$

即 $\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$

故正确答案为(C).

例 5 用定义计算 5 阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

其中第 2,3 行及第 2,3 列上的元素都不等于零.

解 D_5 中各行非零元素的列标分别可取以下各值

$p_1=2,3;\quad p_2=1,2,3,4,5;\quad p_3=1,2,3,4,5;$

$p_4=2,3;\quad p_5=2,3;$

在上述可能取的数码中,不能组成任何一个 5 元排列 $p_1p_2p_3p_4p_5$,换句话说,在 D_5 的每一项 5 个元素中,必至少含有一个零元素,故按行列式的定义有:$D_5=0$.

例 6 写出五阶行列式 $|a_{ij}|_{5\times5}$ 中包含因子 $a_{13}a_{25}$ 且带负号的所有项.

解 按行列式的定义,五阶行列式中包含因子 $a_{13}a_{25}$ 的项的一般式为

$(-1)^{\tau(35p_3p_4p_5)}a_{13}a_{25}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}$

故含有 $a_{13}a_{25}$ 的所有项的项数为 5 元排列 $35p_3p_4p_5$ 的个数. 因排列 $p_3p_4p_5$ 是三个数码 1,2,4 的全排列,共 3!个,故 $35p_3p_4p_5$ 能组成 6 个 5 元排列,即

35124; 35142; 35214; 35241; 35412; 35421.

其中 35142、35214、35421 为偶排列,35124、35241、35412 为奇排列,故包含因子 $a_{13}a_{25}$ 且带负号的所有项为

$a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54};\quad a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51};\quad a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52}.$

例 7 求多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} 3x & 2 & -4 & 1 \\ -x & x & -1 & 3 \\ 7 & 5 & 2x & 2 \\ x & 2 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4 和 x^3 的系数.

解 4 阶行列式的一般项为

$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$

要求 x^4 的系数,则必须每个 $a_{ip_i}(i=1,2,3,4)$ 都要含有 x,这样的项只有

$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=(-1)^0 3x\cdot x\cdot 2x\cdot x=6x^4,$

于是 $f(x)$ 中 x^4 的系数是 6.

要求 x^3 的系数,则必须 4 个 $a_{ip_i}(i=1,2,3,4)$ 中有 3 个含有 x,这样的项有

$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=4x^3$

$(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-2x^3$

故 $f(x)$ 中 x^3 的系数是 $4-2=2$.

例 8 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

解法一 因为这个 n 阶行列式中每一列中的 n 个元素之和都为 $n+1$,所以将第 $2,3,\cdots,n$ 行元素都加到第 1 行上,得

$$D_n=\begin{vmatrix} n+1 & n+1 & n+1 & \cdots & n+1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}=(n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1}(n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$=n+1.$

解法二 利用 n 阶行列式的性质化简

$$D_n\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}\begin{vmatrix} n+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=n+1.$$

例 9 设 $abcd=1$，计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}.$

解 $$D=\begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=abcd\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}+(-1)^3\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}=0.$$

例 10 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2001 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2002 \end{vmatrix}$

解 按最后一行展开,得到 $D=2002\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2001 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$=2002\times(-1)^{\frac{2001\times2000}{2}}\times2001!=2002!.$

例 11 已知 4 阶行列式 D 中第一行上元素分别为 $1,2,0,-4$;第三行上元素的余子式依次为 $6,x,19,2$;试求 x 的值.

解 由题设知,$a_{11},a_{12},a_{13},a_{14}$ 分别为 $1,2,0,-4$,$M_{31},M_{32},M_{33},M_{34}$ 分别为 $6,x,19,2$,从而得 $A_{31},A_{32},A_{33},A_{34}$ 分别为 $6,-x,19,-2$. 由行列式按行(列)展开定理,有

$$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}+a_{14}A_{34}=0$$

于是 $1\times6+2\times(-x)+0\times19+(-4)\times(-2)=0$

所以 $x=7$.

例 12 设 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$,求 $4A_{12}+2A_{22}-3A_{32}+6A_{42}$,

其中 A_{i2} 为 D 中元素 $a_{i2}(i=1,2,3,4)$ 的代数余子式.

解法一 因 $4,2,-3,6$ 恰好为 D 中第 3 列元素,而 $A_{12},A_{22},A_{32},A_{42}$ 为 D 中第 2 列元素的代数余子式,故 $4A_{12}+2A_{22}-3A_{32}+6A_{42}$ 表示 D 中第 3 列元素与第 2 列的对应元素的代数余子式乘积的和,由行列式按行(列)展开定理知,此和必等于零,即

$$4A_{12}+2A_{22}-3A_{32}+6A_{42}=0$$

解法二 因 A_{i2} 为 D 中元素 $a_{i2}(i=1,2,3,4)$ 的代数余子式,故将 D 中第 2 列元素依次换为 $4,2,-3,6$,即得

$$4A_{12}+2A_{22}-3A_{32}+6A_{42}=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & 6 & 2 \end{vmatrix}=0$$

例 13 已知 5 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

试求 (1)$A_{21}+A_{22}+A_{23}$;(2)$A_{24}+A_{25}$

其中 A_{2j} 是 D 中元素 $a_{2j}(j=1,2,3,4,5)$ 的代数余子式.

解 由行列式按行展开定理有

$$a_{i1}A_{21}+a_{i2}A_{22}+a_{i3}A_{23}+a_{i4}A_{24}+a_{i5}A_{25}=0\ (i=1,3,4,5)$$

取 $i=1,3$ 得

$$\begin{cases} a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}+a_{14}A_{24}+a_{15}A_{25}=0 \\ a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23}+a_{34}A_{24}+a_{35}A_{25}=0 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} 4(A_{21}+A_{22}+A_{23})+(A_{24}+A_{25})=0 \\ 3(A_{21}+A_{22}+A_{23})+2(A_{24}+A_{25})=0 \end{cases}$

解方程组得 $\begin{cases}A_{21}+A_{22}+A_{23}=0,\\A_{24}+A_{25}=0.\end{cases}$

例 14 已知 1326,2743,5005,3874 都能被 13 整除,不计算行列式的值,试证 $D_4=\begin{vmatrix}1&3&2&6\\2&7&4&3\\5&0&0&5\\3&8&7&4\end{vmatrix}$能被 13 整除.

证 把 D_4 的每一行看成一个四位数,其千位、百位、十位、个位数字分别为 D_4 的各行上的第 1,2,3,4 列上的元素,则这 4 个四位数正好就是 1326,2743,5005,3874.

为使 D_4 的第 4 列上各元素变成这 4 个四位数,现将第 1,2,3 列分别乘以 10^3,10^2,10,并都加到第 4 列,得到

$$D_4=\begin{vmatrix}1&3&2&1326\\2&7&4&2743\\5&0&0&5005\\3&8&7&3874\end{vmatrix}$$

由题设知,13 整除上行列式的第 4 列,故 13 能整除 D_4.

该法适用除数 m 为质数的情况. 如果 m 为合数,且其各因数分别能整除该行列式某些行(列),由行列式性质即知该行列式能被合数 m 整除,请看下例.

例 15 不计算行列式的值,证明行列式 $D_4=\begin{vmatrix}1&2&2&6\\9&1&3&8\\9&9&9&0\\8&6&4&0\end{vmatrix}$

能被 18 整除.

证法一 因 $18=9\times2$ 为合数,且 D_4 的第 3,4 两行分别可被 9,2 所整除,由行列式性质知,D_4 可被 18 整除.

证法二 将 D_4 的第 1,2,3 行分别乘以 10^3,10^2,10,并加到第 4 行,得到 $D_4=$

$$\begin{vmatrix}1&2&2&1\\9&1&3&8\\9&9&9&0\\1998&2196&2394&1800\end{vmatrix}$$

因上行列式的第 4 行能被 18 整除(1998,2196,2394,1800 均能被 18 整除),故 D_4 能被 18 整除.

例 16 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}5&3&0&\cdots&0&0\\2&5&3&\cdots&0&0\\0&2&5&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&5&3\\0&0&0&\cdots&2&5\end{vmatrix}$

解 用递推法,先按 D_n 的第一行展开,得到

$$D_n=5D_{n-1}-3\begin{vmatrix}2&3&0&\cdots&0&0\\0&5&3&\cdots&0&0\\0&2&5&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&5&3\\0&0&0&\cdots&2&5\end{vmatrix}=5D_{n-1}-6D_{n-2}$$

于是得递推公式 $D_n=5D_{n-1}-6D_{n-2}$

或 $D_n-2D_{n-1}=3(D_{n-1}-2D_{n-2})$

递推下去得到 $D_n - 2D_{n-1} = 3^{n-2}(D_2 - 2D_1)$

同样可得递推公式 $D_n - 3D_{n-1} = 2(D_{n-1} - 3D_{n-2})$

递推下去得到 $D_n - 3D_{n-1} = 2^{n-2}(D_2 - 3D_1)$

$\because \quad D_1 = |5| = 5, D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 19$

$\therefore \quad \begin{cases} D_n - 2D_{n-1} = 3^n \\ D_n - 3D_{n-1} = 2^n \end{cases}$

解方程组得 $D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

例 17 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$

分析 D_n 中各行元素都分别是同一个数的不同方幂，且方幂次数从左到右按递升次由 1 到 n 排列，但不是由 0 变到 $n-1$，如提取各行的公因数，则方幂次数便从 0 增至 $n-1$，便可利用范德蒙行列式的结论计算.

解 $D = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$

$$= n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= n! \prod_{n \geq i > j \geq 1} (i - j)$$

$$= n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1)\cdot(3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots[n-(n-1)] = n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!.$$

例 18 计算 $(n+1)$ 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1 b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2 b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1} b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

其中 $a_i \neq 0, b_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n+1)$.

分析 利用行列式性质，改变原行列式的元素，产生以新元素为行(列)的范德蒙行列式

解 提取 D_{n+1} 各行的公因子，得到

$$D_{n+1}=a_1^n a_2^n\cdots a_{n+1}^n\begin{vmatrix}1 & \frac{b_1}{a_1} & (\frac{b_1}{a_1})^2 & \cdots & (\frac{b_1}{a_1})^n\\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & (\frac{b_2}{a_2})^2 & \cdots & (\frac{b_2}{a_2})^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & (\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}})^2 & \cdots & (\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}})^n\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n+1}a_i^n\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} & \cdots & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\\ (\frac{b_1}{a_1})^2 & (\frac{b_2}{a_2})^2 & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\frac{b_1}{a_1})^n & (\frac{b_2}{a_2})^n & \cdots & (\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}})^n\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n+1}a_i^n\prod_{n+1\geq i>j\geq 1}\left(\frac{b_i}{a_i}-\frac{b_j}{a_j}\right).$$

例 19 设 $a>b>c>0$，试用范德蒙行列式证明

$$D_3=\begin{vmatrix}a & a^2 & bc\\ b & b^2 & ac\\ c & c^2 & ab\end{vmatrix}<0$$

分析 D_3 中前两列分别为 a,b,c 的一次、二次方幂，但第三列元素不是相应元素的零次幂（即该列元素都不是 1），而是前两列元素的函数，此时可利用行列式性质，将第三列元素化为全是 1，再用范德蒙行列式证明.

证 将 D_3 的第 1 列乘以 $a+b+c$ 加到第 3 列，得到

$$D_3=\begin{vmatrix}a & a^2 & a^2+ab+bc+ca\\ b & b^2 & b^2+ab+bc+ca\\ c & c^2 & c^2+ab+bc+ca\end{vmatrix}\xlongequal{c_3-c_2}\begin{vmatrix}a & a^2 & ab+bc+ca\\ b & b^2 & ab+bc+ca\\ c & c^2 & ab+bc+ca\end{vmatrix}$$

$$=(ab+bc+ca)\begin{vmatrix}a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\\ c & c^2 & 1\end{vmatrix}\xlongequal[c_2\leftrightarrow c_1]{c_3\leftrightarrow c_2}(ab+bc+ca)\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}$$

$$=(ab+bc+ca)(b-a)(c-a)(c-b)<0.$$

例 20 计算四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1+\cos\varphi_1 & 1+\cos\varphi_2 & 1+\cos\varphi_3 & 1+\cos\varphi_4\\ \cos\varphi_1+\cos^2\varphi_1 & \cos\varphi_2+\cos^2\varphi_2 & \cos\varphi_3+\cos^2\varphi_3 & \cos\varphi_4+\cos^2\varphi_4\\ \cos^2\varphi_1+\cos^3\varphi_1 & \cos^2\varphi_2+\cos^3\varphi_2 & \cos^2\varphi_3+\cos^3\varphi_3 & \cos^2\varphi_4+\cos^3\varphi_4\end{vmatrix}$$

解 $$D_4\xlongequal[i=2,3,4]{r_i-r_{i-1}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ \cos\varphi_1 & \cos\varphi_2 & \cos\varphi_3 & \cos\varphi_4\\ \cos\varphi_1^2 & \cos\varphi_2^2 & \cos\varphi_3^2 & \cos\varphi_4^2\\ \cos\varphi_1^3 & \cos\varphi_2^3 & \cos\varphi_3^3 & \cos\varphi_4^3\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\leq j<i\leq 4}(\cos\varphi_i-\cos\varphi_j)$$

例 21 求奇数阶行列式 $D_n=det(a_{ij})$，其中 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，$n$ 为奇数.