

泛函分析

—— 理论和应用

Analyse Fonctionnelle—Théorie et applications

Haim Brezis 著

叶东 周风 译



清华大学出版社



Springer

泛函分析

—— 理论和应用

Analyse Fonctionnelle—Théorie et applications

Haim Brezis 著
叶东 周风 译



清华大学出版社
北京

 Springer

Haim Brezis

Analyse Fonctionnelle—Théorie et applications

ISBN 2-225-77198-7

Copyright © 1983 by Masson, Paris.

北京市版权局著作权合同登记号 图字: 01-2008-0717

版权所有, 侵权必究。侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析: 理论和应用/(法)布莱基斯(Brezis, H.)著; 叶东, 周凤译. —北京: 清华大学出版社, 2009.2

(研究生数学丛书)

ISBN 978-7-302-16720-4

I. 泛… II. ①布… ②叶… ③周… III. 泛函分析—研究生—教材 IV. O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 205981 号

责任编辑: 陈朝晖

责任校对: 赵丽敏

责任印制: 孟凡玉

出版发行: 清华大学出版社

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编: 100084

社 总 机: 010-62770175

邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者: 北京季蜂印刷有限公司

装 订 者: 三河市新茂装订有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 170×230 印 张: 16.5 字 数: 309 千字

版 次: 2009 年 2 月第 1 版 印 次: 2009 年 2 月第 1 次印刷

印 数: 1~3000

定 价: 48.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题, 请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话: (010)62770177 转 3103 产品编号: 023864-01

编审委员会

主 编：李大潜

副主编：冯克勤

编 委：(姓氏按拼音字母排序)

程崇庆 陈木法 陈叔平 陈志杰

李克正 李 忠 邵嘉裕 王维克

文志英 肖 杰 袁亚湘 周 青

张伟平

1. 连续介质力学中的数学模型
(Mathematical Modeling in Continuum Mechanics)
2. 应用密码学
(Applied Cryptography)
3. Introduction to Malliavin Calculus
(Malliavin 随机变分引论)
4. 纠错码的代数理论
(Algebraic Theory of Error-Correcting Codes)
5. 抽象代数基础
(Basic Algebra)
6. Algebraic Geometry
(代数几何)
7. 反问题
(Inverse Problem)
8. 泛函分析——理论和应用
(Analyse Fonctionnelle — Théorie et applications)
9. 素数论
(Les nombres premiers)

总 序

数学是一门在非常广泛的意义上研究自然和社会现象中的数量关系和空间形式的科学。长期以来，在人们认识世界和改造世界的过程中，数学作为一种精确的语言和一个有力的工具一直发挥着重要的作用。在现代，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内涵的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系。作为各门科学的重要基础，作为“四化”建设的重要武器，作为人类文明的重要支柱，数学科学在很多重要的领域中已起着关键性甚至决定性的作用，数学技术已成为高技术的突出标志和重要组成部分。数学的影响和作用已深入到各行各业，可以说无处不在。马克思当年的预言：“一门科学只有当它成功地运用了数学之后，才算达到了真正完善的地步”，正在不断得到证实。在这样的背景下，数学科学的重要性已得到空前广泛的认同。在研究生（不限于数学专业的研究生）的培养中，重视数学基础的训练，强调数学思想的熏陶，也已成为一种必然的趋势。但是，国内研究生数学教材及参考读物的实际情况，无论从品种、数量及质量各方面来看，都远远不能适应这个形势，甚至也远远落后于本科生的数学教材。这已成为制约提高研究生培养质量的一个重要瓶颈。清华大学出版社和施普林格出版社(Springer-Verlag)合作，倡议出版这一套《研究生数学丛书》(Mathematics Series for Graduate Students)，可望改善这方面的状况，为我国的研究生打好数学基础、提高数学素质起到积极的作用。

根据数学这门科学的特点，同时考虑到研究生学习数学的基本要求和特有方式，这套以面向研究生（包括高年级本科生、硕士及博士研究生）的数学教材或参考读物，将力求体现以下的一些原则：

- 主题具有理论或（和）应用方面的重要性；
- 在重点介绍基础性内容的前提下，兼顾学科前沿的重要发展趋势和研究

成果；

- 在讲授数学内容的同时，充分体现数学的思想方法和精神实质；
- 少而精，在较小的篇幅中展现基本的内容；
- 有相当好的可读性，适宜读者自学；
- 附有习题、思考题及参考资料目录，书末有索引，方便读者深入学习与思考。

为了有利于体现这些原则，本丛书将采取相当灵活的体例及风格：内容可以是纯粹数学、应用数学或数学与其他学科的交叉；可以是较系统地介绍某一个分支的教材，或是介绍某一前沿分支状况的综述，也可以是课外参考书；可以是原著，也可以是译著；可以是国内作者，也可以是国外作者；可以用中文编写，也可以用英文编写，等等。

要实现本丛书的目标和宗旨，任重而道远，但千里之行，始于足下。在学界同仁和广大读者的支持和帮助下，让我们共同努力。

李大潜

2003年9月于上海

- 1 -

Je suis extrêmement ^{fier et} heureux d'apprendre que mon ouvrage "Analyse Fonctionnelle, théorie et applications" est maintenant traduit en chinois.

Ce livre sert de pont entre l'Analyse classique abstraite, la théorie des équations aux dérivées partielles (EDP) et les mathématiques appliquées. Le sujet des EDP est difficile d'accès et décourage souvent les débutants. Mais il joue un rôle de plus en plus important, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées. Je suis ravi que mon livre ait poussé de nombreux jeunes mathématiciens, en France et dans le monde, à choisir cette voie. J'espère qu'il aura le même impact en Chine.

- 2 -

Je suis venue régulièrement ^{en visite} en Chine depuis près de 30 ans. J'admire la sagesse ancienne de ce pays et son goût pour la science moderne. J'ai établi des contacts étroits et chaleureux avec beaucoup de collègues chinois. Je remercie mes amis les Professeurs Li Ta-tsién et Chang Kung-Ching qui ont exprimé leur intérêt de voir mon livre publié en chinois.

Je suis reconnaissant aux Professeurs Zhou Feng et Dong Ye qui ont produit la traduction. Malheureusement je ne suis pas capable de lire le chinois! Mais j'apprécie la qualité et la précision des articles de ces deux mathématiciens. Je suis convaincu qu'ils ont fait un excellent travail.

Haim Brezis

中文翻译版序言

得知我的著作“泛函分析——理论和应用”被翻译成中文，我感到非常自豪和高兴。

这本书是古典抽象分析，偏微分方程理论和应用数学之间的桥梁。偏微分方程的课题难以进入，常常让初学者望而生畏；但另一方面，它无论在纯粹数学还是应用数学上，都发挥着越来越重要的作用。我欣喜地看到，这本书在法国和世界各地促使了众多的年轻数学工作者选择这个方向。我期盼着它在中国产生同样的影响。

将近三十年以来，我经常来到中国访问。我敬佩这个国家的古老智慧和它对现代科学的热爱。我和许多中国同行已经建立了密切和热情的联系。我要感谢我的朋友，李大潜教授和张恭庆教授对于本书在中国出版所表示的关注。

我感谢周风教授和叶东教授的翻译。很遗憾我无法阅读中文！但是我欣赏他们两位论文的质量和准确性，所以我相信他们完成了一件出色的工作。

Haïm Brezis

法国巴黎第六大学 (皮埃尔和玛丽居里大学) 名誉教授
美国罗格斯大学杰出教授
法国科学院院士
美国科学院 (外籍) 院士
美国数学会前任副会长
中国科学院, 复旦大学和北京师范大学名誉教授

通常的记号

E'	E 的对偶空间
\langle , \rangle	E', E 之间的对偶内积
$[f = \alpha] = \{x; f(x) = \alpha\}$	
$B(x_0, r) = \{x; \ x - x_0\ < r\}$	中心为 x_0 , 半径为 r 的开球
$B_E = \{x \in E; \ x\ \leq 1\}$	
$\text{epi } \varphi = \{(x, \lambda); \varphi(x) \leq \lambda\}$	φ 的上图像
φ^*	φ 的共轭函数
$\mathcal{L}(E, F)$	从 E 到 F 的连续线性算子空间
M^\perp	M 的直交集
$D(A)$	算子 A 的定义域
$G(A)$	算子 A 的图
$N(A)$	算子 A 的核
$R(A)$	算子 A 的像集
$\sigma(E, E')$	E 上的弱拓扑
$\sigma(E', E)$	E' 上的弱 * 拓扑
\rightharpoonup	弱收敛
J	从 E 到 E'' 的典则嵌入
p'	p 的共轭指数, 即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
a.e.	几乎处处
$ A $	集合 A 的 (Lebesgue) 测度
$\text{Supp } f$	函数 f 的支集

$f * g$	卷积
ρ_n	磨光子 (正则化序列)
$(\tau_h f)(x) = f(x+h)$	函数 f 的平移
$\omega \subset\subset \Omega$	开集 ω 强包含于 Ω 中, 即 $\bar{\omega}$ 是紧的且 $\bar{\omega} \subset \Omega$
P_K	闭凸集 K 上的投影
$ $	Hilbert 范数
$\rho(T)$	算子 T 的预解集
$\sigma(T)$	算子 T 的谱集
$VP(T)$	算子 T 的特征值集
$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$	算子 A 的预解式
$A_\lambda = A J_\lambda$	算子 A 的 Yosida 正则化
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = \text{grad } u$	
$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}, \quad \alpha = \sum_{i=1}^N \alpha_i$	
$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u$ 的 Laplace 作用	
$\mathbb{R}_+^N = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}; x_N > 0\}$	
$Q = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}; x' < 1 \text{ 且 } x_N < 1\}$	
$Q_+ = Q \cap \mathbb{R}_+^N$	
$Q_0 = \{x \in Q; x_N = 0\}$	
$(D_h u)(x) = \frac{1}{ h } (u(x+h) - u(x))$	
$\frac{\partial u}{\partial n}$	外法向导数

函数空间

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$	开集
$\partial\Omega = \Gamma = \Omega$ 的边界	
$L^p(\Omega) = \left\{ u \text{ 在 } \Omega \text{ 上可测且 } \int_\Omega u ^p dx < \infty, \quad 1 \leq p < \infty \right\}$	
$L^\infty(\Omega) = \left\{ u \text{ 在 } \Omega \text{ 上可测且存在 } C \text{ 使得 } u(x) \leq C \text{ 在 } \Omega \text{ 上几乎处处} \right\}$	
$C_c(\Omega)$	Ω 上具有紧支集的连续函数空间
$C^k(\Omega)$	Ω 上直到 k 阶连续可微的函数空间 ($k \geq 0$ 整数)

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$$

$$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$$

$$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$$

$C(\bar{\Omega})$ $\bar{\Omega}$ 上连续函数空间

$C^k(\bar{\Omega})$ $C^k(\Omega)$ 中对任意多重指标 $\alpha, |\alpha| \leq k$, 映射 $x \in \Omega \mapsto D^\alpha u(x)$
可连续延拓至 $\bar{\Omega}$ 上的函数空间

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_k C^k(\bar{\Omega})$$

$$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C(\bar{\Omega}); \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}, \quad \text{其中 } 0 < \alpha < 1$$

$$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{ u \in C^k(\bar{\Omega}); D^j u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \quad \forall j, |j| \leq k \}$$

$W^{1,p}, W_0^{1,p}, W^{m,p}, H^1, H_0^1, H^m$ Sobolev 空间

提示:

1) 记号 [EX] 指以下著作: H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Recueil de Problème et Exercice* (泛函分析, 问题和习题集), Masson 出版社, (售完).

2) 有些段落或陈述前面标有记号 *, 它告诉大家这些内容非常重要; 前面标有记号 * 的内容, 在第一次阅读时可以跳过.

3) 我们对命题, 定理和推论采用了连贯的标号方式, 只有引理是单独标号的.

4) 在全书中, 我们仅仅考虑 R 上的向量空间 (有点遗憾, 但简化了叙述). 大部分陈述对 C 上的向量空间依然成立, 但有时需要作适当的改动. 在 [EX] 中, 我们将列出考虑 C 上的向量空间时所需的修改.

译者注: 由于种种原因, [EX] 的任何版本都未能出版发行, 也许将来大家能够在本书的英文版中看到部分的问题和习题.

前言

本书是通过整理和大量扩充在皮埃尔和玛丽居里大学(巴黎第六大学)所授的
大学四年级(学士)的课程讲义而成的. 它假定读者具备了一般拓扑学、积分论和微
分计算的基础知识.

书中的第一部分(第一章至第七章)叙述了泛函分析一些“抽象”的结果. 第二
部分(第八章至第十章)涉及的是应用于偏微分方程理论的“具体”的函数空间; 那
里展示了“抽象”的存在性定理如何应用于求解偏微分方程. 分析学的这两部分就
这样紧密地联系起来. 从历史上讲,“抽象”泛函分析的发展首先源自于解决偏微分
方程的求解问题; 反过来,“抽象”泛函分析的进展也极大地促进了偏微分方程理论
的完善. 本书没有包含任何这类历史参考文献, 建议读者参阅 J. Dieudonné 的著
作[3]. 我们希望本书不但有助于对“纯数学”感兴趣的学生们, 而且也有益于希望
偏重“应用数学”的学生们.

我感谢:

- G. Tronel 先生给我提出了许多的修改.
- Ph. Ciarlet 和 P. Rabinowitz 先生的宝贵建议和鼓励.
- Berestycki, Gallouet, Kavian 和 Mc Intosh 先生的有益的意见.
- 威斯康星大学数学研究中心和芝加哥大学数学系, 本书的部分内容是在那里写就的.

我将此书献给 Guido Stampacchia, 以纪念这位过早辞世的泛函分析学大师.

H. BREZIS

记号	XV
前言	XIX
第一章 Hahn-Banach 定理. 共轭凸函数理论简介	1
1.1 Hahn-Banach 定理的解析形式: 线性泛函的延拓	1
1.2 Hahn-Banach 定理的几何形式: 凸集的分离	4
1.3 共轭凸函数理论简介	7
1.4 第一章评注	13
第二章 Banach-Steinhaus 定理和闭图像定理. 正交关系. 无界算子.	
共轭算子的概念. 满射算子的刻画	16
2.1 Baire 引理	16
2.2 Banach-Steinhaus 定理	17
2.3 开映射定理和闭图像定理	19
*2.4 拓扑余子空间. 右(左)可逆算子	22
2.5 直交关系	25
2.6 无界线性算子简介. 共轭算子定义	28
2.7 闭图像算子的刻画. 满射算子. 有界算子	31
2.8 第二章评注	33
第三章 弱拓扑. 自反空间. 可分空间. 一致凸空间	35
3.1 使一族映射连续的最粗糙的拓扑	35
3.2 弱拓扑 $\sigma(E, E')$ 的定义和基本性质	36
3.3 弱拓扑. 凸集和线性算子	39
3.4 弱*拓扑 $\sigma(E', E)$	41
3.5 自反空间	45
3.6 可分空间	49
3.7 一致凸空间	53

3.8	第三章评注	55
第四章	L^p 空间	56
4.1	几个必须掌握的积分定理	56
4.2	L^p 空间的定义和基本性质	58
4.3	自反性, 可分性, L^p 的对偶	61
4.4	卷积和正则化	69
4.5	L^p 中的强紧性准则	74
4.6	第四章评注	77
第五章	Hilbert 空间	80
5.1	定义, 基本性质, 闭凸集上的投影	80
5.2	Hilbert 空间的对偶空间	83
5.3	Stampacchia 定理和 Lax-Milgram 定理	85
5.4	Hilbert 和 Hilbert 基	88
5.5	第五章评注	90
第六章	紧算子, 自共轭紧算子的谱分解	92
6.1	定义, 基本性质, 共轭算子	92
6.2	Riesz-Fredholm 理论	94
6.3	紧算子的谱	97
6.4	自共轭紧算子的谱分解	99
6.5	第六章评注	102
第七章	Hille-Yosida 定理	105
7.1	极大单调算子的定义和基本性质	105
7.2	演化问题的求解	108
7.3	正则性	114
7.4	自共轭情形	116
7.5	第七章评注	120
第八章	Sobolev 空间和一维边值问题的变分形式	123
8.1	动机	123
8.2	Sobolev 空间 $W^{1,p}(I)$	124
8.3	空间 $W_0^{1,p}(I)$	137
8.4	边值问题的几个例子	140
8.5	极大值原理	147

8.6	特征函数和谱分解	149
8.7	第八章评注	151
第九章	N维 Sobolev 空间和椭圆边值问题的变分形式	154
9.1	Sobolev 空间 $W^{1,p}(\Omega)$ 的定义和基本性质	154
9.2	延拓算子	162
9.3	Sobolev 不等式	168
9.4	$W_0^{1,p}(\Omega)$ 空间	176
9.5	几个椭圆边值问题的变分形式	180
9.6	弱解的正则性	187
9.7	极大值原理	195
9.8	特征函数和谱分解	198
9.9	第九章评注	200
第十章	演化问题: 热方程和波动方程	211
10.1	热方程: 存在性, 唯一性和正则性	211
10.2	极大值原理	218
10.3	波动方程	220
10.4	第十章评注	225
参考文献		233
译后记		241