

高职高专高等数学系列教材(少学时)

Gaozhi jiaoyu

新编经济 数学基础

(经济类、管理类)

主编 冯翠莲

4.0-43

4



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高职高专高等数学系列教材(少学时)

新编经济数学基础

(经济类、管理类)

主 编 冯翠莲

编著者 冯翠莲 李文辉 陆小华



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

新编经济数学基础(经济类、管理类)/冯翠莲主编. —北京:北京大学出版社, 2005. 8
(高职高专高等数学系列教材)(少学时)

ISBN 7-301-09360-8

I. 新… II. 冯… III. 经济数学—高等学校:技术学校—教材 IV. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 076679 号

书 名: 新编经济数学基础(经济类、管理类)

著作责任者: 冯翠莲 李文辉 陆小华 编著

责任编辑: 曾琬婷 聂一民

标准书号: ISBN 7-301-09360-8/O · 0657

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn> 电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62752021

印 刷 者: 北京大学印刷厂

经 销 者: 新华书店

787mm×960mm 16 开本 14.25 印张 308 千字

2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

印 数: 0001—4000 册

定 价: 22.00 元

内 容 简 介

本书是高职高专院校经济类、管理类、文科类各专业少学时的经济数学基础教材。内容包括：导数，导数的应用，积分及其应用，偏导数及其应用，矩阵与线性方程组，概率初步和统计学初步。本书本着重基本知识、重素质、重能力、重应用和求创新的总体思路，根据高职高专教育数学教学的特点而编写。本书每节有“本节学习目标”，每节后配有与教材内容密切相关的 A 组习题和 B 组习题，每章后配有总习题。书后附有全书习题的答案与解法提示。

本书在内容的叙述上由浅入深、通俗易懂，概念清晰，例题丰富而又贴近实际。注意归纳数学的辩证思维、解题方法与解题程序，便于自学。

本书也可作为参加经济类、管理类专升本考试学生的教材或教学参考用书。

前 言

高职高专教育是我国高等教育体系的重要组成部分,近几年呈现出前所未有的发展势头.为适应高职高专教育改革的要求,坚持以就业为导向,以能力为本位,面向市场、面向社会,为经济结构调整和科技进步服务的办学宗旨,我们本着重基本知识、重素质、重能力、重应用、开拓思维求创新的总体思路,根据高职高专教育数学教学的特点,编写了高职高专高等数学系列教材(少学时)——《新编经济数学基础》和《新编工科数学基础》.前者供高职高专院校经济类、管理类、文科类各专业学生使用,后者供工科类各专业学生使用.

本教材优化整合了经济数学基础课程的基本内容,注意与后续课程相衔接、与生产、服务、管理第一线的实际需求相适应;力求实现基础性、实用性和发展性三方面的和谐与统一.

本教材的主要特点:

1. 突出高职高专少学时的特色.根据高职高专经济类、管理类各专业对数学的基本要求,根据数学的认知规律,将微积分、线性代数及概率统计的基本内容有机地结合在一起,组织和编排全书内容.在不失数学内容学科特点的情况下,采取模块化的思路,便于教师根据教学时数和专业需求选择教学内容.

2. 贯彻“理解概念、强化应用”的教学原则.以现实、生动的例题引入基本概念,以简明的语言、并尽量配合几何图形、数表阐述基本知识、基本理论,注重基本方法和基本技能的训练,并给出求解问题的解题程序.同时注重数学概念、数学方法的实用价值,注意培养学生用定量与定性相结合的方法,综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力 and 创新能力.

3. 内容精简实用,条理清楚,叙述通俗易懂,深入浅出,便于自学.

4. 每节有“本节学习目标”,每节配有A组和B组习题,每章配有总习题.书后附有全书习题答案与解法提示.

参加本书编写的有北京经济管理干部学院冯翠莲、北京工业大学李文辉和北京农业职业学院陆小华,最后由冯翠莲统一修改定稿.参加本书编写工作的还有唐声安、葛振三.

本系列教材的编写和出版,得到了北京大学出版社相关领导的大力支持和帮助.在本书的编写过程中,同行专家参加了讨论并提出宝贵意见,在此一并表示感谢.

限于编者水平,不足之处恳请读者批评指正.

编 者

2005年6月

目 录

第一章 导数	(1)
§ 1.1 数列的极限	(1)
一、数列极限的概念	(1)
二、连续复利公式	(3)
习题 1.1	(5)
§ 1.2 函数的极限	(5)
一、函数的极限	(5)
二、函数的连续性	(8)
习题 1.2	(11)
§ 1.3 函数的导数与微分	(11)
一、函数的导数	(11)
二、函数的微分	(15)
习题 1.3	(16)
§ 1.4 导数公式与运算法则	(16)
一、导数的基本公式	(16)
二、导数的四则运算法则	(17)
三、复合函数的导数法则	(18)
习题 1.4	(21)
§ 1.5 高阶导数·隐函数的导数	(22)
一、高阶导数	(22)
二、隐函数的导数	(23)
习题 1.5	(24)
总习题一	(25)
第二章 导数的应用	(27)
§ 2.1 函数的单调性	(27)
一、函数单调性的定义	(27)
二、判定函数单调性的方法	(27)
习题 2.1	(30)
§ 2.2 函数的极值	(30)

一、函数极值的定义	(30)
二、求函数极值的方法	(31)
习题 2.2	(32)
§ 2.3 最值的几何应用问题	(33)
习题 2.3	(36)
§ 2.4 导数概念的经济解释	(36)
一、经济学中常用的函数	(37)
二、边际概念	(39)
三、弹性概念	(40)
习题 2.4	(43)
§ 2.5 最值的经济应用问题	(44)
习题 2.5	(48)
§ 2.6 曲线的凹向与拐点	(49)
一、曲线凹向与拐点的定义	(49)
二、判定曲线凹向与求拐点的方法	(50)
习题 2.6	(52)
总习题二	(52)
第三章 积分及其应用	(54)
§ 3.1 定积分的概念与性质	(54)
一、定积分的概念	(54)
二、定积分的基本性质	(58)
习题 3.1	(59)
§ 3.2 不定积分的概念与性质	(60)
一、不定积分的概念	(60)
二、不定积分的性质	(61)
习题 3.2	(62)
§ 3.3 积分的基本公式	(62)
一、不定积分的基本积分公式	(62)
二、定积分的基本公式	(63)
习题 3.3	(64)
§ 3.4 换元积分法	(65)
习题 3.4	(69)
§ 3.5 分部积分法	(70)
习题 3.5	(73)

§ 3.6 无限区间上的广义积分	(73)
习题 3.6	(75)
§ 3.7 积分学的应用	(75)
一、平面图形的面积	(75)
二、经济应用问题举例	(77)
习题 3.7	(79)
总习题三	(79)
第四章 偏导数及其应用	(82)
§ 4.1 偏导数	(82)
一、多元函数概念	(82)
二、偏导数	(83)
三、二阶偏导数	(84)
习题 4.1	(85)
§ 4.2 多元函数的极值	(86)
一、多元函数的极值	(86)
二、最大值最小值应用问题	(88)
三、最小二乘法	(89)
习题 4.2	(92)
§ 4.3 条件极值	(93)
一、条件极值的意义	(93)
二、条件极值的求法	(94)
习题 4.3	(96)
总习题四	(97)
第五章 矩阵与线性方程组	(99)
§ 5.1 矩阵的概念	(99)
习题 5.1	(101)
§ 5.2 矩阵的运算	(102)
一、矩阵加法	(102)
二、数乘矩阵	(102)
三、矩阵减法	(104)
四、矩阵乘法	(104)
五、转置矩阵	(108)
习题 5.2	(109)

§ 5.3 矩阵的初等行变换	(111)
一、阶梯形矩阵及简化阶梯形矩阵	(111)
二、矩阵初等行变换	(112)
习题 5.3	(114)
§ 5.4 矩阵的秩与逆矩阵	(115)
一、矩阵的秩	(115)
二、逆矩阵	(115)
习题 5.4	(118)
§ 5.5 线性方程组的解法	(119)
一、线性方程组的消元解法	(119)
二、线性方程组解的判定定理	(123)
习题 5.5	(125)
总习题五	(125)
第六章 概率初步	(128)
§ 6.1 随机事件	(128)
一、随机事件	(128)
二、事件间的关系与运算	(130)
习题 6.1	(133)
§ 6.2 随机事件的概率	(133)
一、概率的古典定义	(134)
二、概率的统计定义	(135)
习题 6.2	(136)
§ 6.3 概率的加法公式与事件的独立性	(137)
一、概率的加法公式	(137)
二、事件的独立性	(138)
习题 6.3	(140)
§ 6.4 随机变量概念	(141)
一、随机变量的概念	(141)
二、随机变量的分类	(142)
习题 6.4	(142)
§ 6.5 离散型随机变量的概率分布	(143)
一、离散型随机变量的概率分布	(143)
二、二项分布与泊松分布	(145)
习题 6.5	(149)

§ 6.6 连续型随机变量的概率密度	(149)
一、连续型随机变量的概率密度	(149)
二、均匀分布与指数分布	(151)
习题 6.6	(153)
§ 6.7 正态分布	(154)
一、标准正态分布	(154)
二、正态分布	(156)
习题 6.7	(157)
§ 6.8 随机变量的数字特征	(158)
一、数学期望	(158)
二、方差	(160)
习题 6.8	(162)
总习题六	(164)
第七章 统计学初步	(166)
§ 7.1 总体与样本·频率直方图	(166)
一、总体与样本	(166)
二、频率分布与直方图	(167)
习题 7.1	(169)
§ 7.2 样本的数字特征	(169)
一、描述总体代表性的数值	(169)
二、描述样本分散程度的数值	(172)
习题 7.2	(173)
§ 7.3 点估计与区间估计	(174)
一、总体均值与总体方差的点估计	(174)
二、正态总体均值的区间估计	(176)
习题 7.3	(178)
§ 7.4 正态总体均值的假设检验	(178)
一、假设检验问题	(179)
二、假设检验的基本思想	(179)
三、假设检验的程序	(179)
习题 7.4	(182)
§ 7.5 一元线性回归分析	(183)
一、相关关系与相关系数	(183)
二、一元线性回归方程	(186)

习题 7.5	(187)
总习题七	(188)
附表	(189)
附表 1 泊松概率分布表	(189)
附表 2 标准正态分布表	(191)
习题参考答案与解法提示	(193)
名词术语索引	(212)
参考文献	(215)



第一章

导数

本章先介绍函数的极限概念和连续性概念,然后讲述导数概念和求导数的方法.

§ 1.1 数列的极限

【本节学习目标】 知道数列极限的概念,会用连续复利公式.

一、数列极限的概念

先看一个有关数列极限的实际例子.

我国战国时代哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》引用过一句话:“一尺之棰,日取其半,万世不竭.”这就是说一根长为一尺的棒头,每天截去一半,这样的过程可以无限地进行下去.

把每天截后剩下的棒的长度写出来(单位:尺):

第1天剩下 $\frac{1}{2}$,第2天剩下 $\frac{1}{2^2}$,第3天剩下 $\frac{1}{2^3}$,...,第 n 天剩下 $\frac{1}{2^n}$,...

这样就得到一列数

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

这一列数就称为数列.

随着天数的推移,剩下的棒的长度越来越短,显然,当天数 n 无限增大时,剩下的棒的长度将无限缩短,即剩下的棒的长度 $\frac{1}{2^n}$ 将无限接近于数0.这时我们就称由剩下的棒的长度构成的上述数列以常数0为极限.并记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

一般,按正整数顺序排列的无穷多个数,称为数列.数列通常记作

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots,$$

或简记作 $\{y_n\}$. 数列的每个数,称为数列的项,依次称为第一项,第二项, $\dots$. 第 n 项 y_n 称为数列的通项或一般项.

例如,我们已经知道的等差数列是

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d, \dots,$$

其首项是 a_1 ,公差是 d ,通项 $a_n = a_1 + (n-1)d$.

等比数列是

$$a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}, \dots,$$

其首项是 a_1 ,公比是 q ,通项 $a_n = a_1q^{n-1}$.

讨论数列 $\{y_n\}$ 的极限,就是讨论:当 n 无限增大时,数列的通项 y_n 的变化趋势,特别是,是否有趋向于某个常数的变化趋势.为此,我们有如下数列极限概念.

设数列 $\{y_n\}$:

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$$

若当 n 无限增大时, y_n 趋向于常数 A ,则称数列 $\{y_n\}$ 以 A 为极限,记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \quad \text{或} \quad y_n \rightarrow A \quad (n \rightarrow \infty).$$

上式前一式子,读作“当 n 趋于无穷大时, y_n 的极限等于 A ”;后一式子,读作“当 n 趋于无穷大时, y_n 趋于 A ”.

有极限的数列称为收敛数列. 没有极限的数列称为发散数列.

例 1 数列 $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$:

$$0, 1 + \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{5}, \dots, 1 + \frac{(-1)^n}{n}, \dots$$

当 n 无限增大时,由于 $\frac{(-1)^n}{n}$ 无限接近于常数0,所以其通项 $y_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ 就无限接近于常数1,即该数列以1为极限,可记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right] = 1.$$

例 2 数列 $\{(-1)^{n+1}\}$:

$$1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$$

当 n 无限增大时,数列在数值1和-1上跳来跳去,不趋于一个常数,该数列没有极限.

例 3 数列 $\{n^2\}$:

$$1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$$

当 n 无限增大时,其通项 $y_n = n^2$ 也无限增大,它不趋于任何常数,该数列没有极限.

注意到 $y_n = n^2$ 随着 n 无限增大,它有确定的变化趋势,即取正值且无限增大. 对这种情况,我们借用极限的记法表示它的变化趋势,记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty \quad \text{或} \quad n^2 \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty),$$

并称该数列的极限是正无穷大.

同样,对数列 $\{-\sqrt{n}\}$, $\{(-1)^n n\}$,则可分别记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt{n}) = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n = \infty,$$

前者称数列的极限是 $-\infty$,后者称数列的极限是无穷大.

例 4 考查极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 是否存在.

解 将数列 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 取值计算,取小数点后的有效位数为 5 位,考查数列取值的趋势,见表 1-1.

表 1-1

n	1	1000	5000	10000	100000	1000000	2000000
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	2	2.71692	2.71801	2.71815	2.71827	2.71828	2.71828

由表 1-1 看出,该数列是单调增加的;若再仔细分析表中的数值会发现,随着 n 增大,数列后项与前项的差值在减少,而且减少得相当快;最后两项,项数相隔 100 万项,而 5 位有效位数相同.这表明,数列的通项 $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 当 n 无限增大时,它将趋于一个常数.可以推出,该数列 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 有极限,且其极限为 e ,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

其中 $e = 2.718281828459 \dots$, 是一个无理数.

由上述极限还可推出下述极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}} = e.$$

例 5 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{4n}$.

解 由幂的运算性质

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{4n} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^4,$$

于是
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^4 = e^4.$$

二、连续复利公式

从经济学角度看,货币有时间价值.比如,现在的一万元钱比若干年后的一万元钱要值

钱,或者说若干年后一万元钱的现在价值没有现在一万元钱的价值高. 前后两个时间点货币价值之所以不同,其中就是因为有一个利息问题. 利息就是在一个时间间隔内因使用货币而付出的钱的代价.

作为数列极限概念的应用,这里介绍连续复利问题.

设 A_0 是本金,又称现在值, r 是年利率, t 是时期(单位: 年), A_t 是 t 年末的本利和,又称未来值.

复利就是利息加入本金再获取利息. 即将投资于每期末所得利息加入该期的本金,并以此作为下一期的本金,继续投资.

若以一年为 1 期计算利息,按复利计算 t 年末本利和的公式是

$$A_t = A_0(1+r)^t.$$

若一年计息 n 期,并以 $\frac{r}{n}$ 为每期的利息,按复利计息,则 t 年末的本利和是

$$A_t = A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

上述计息的“期”是确定的时间间隔,因而一年计息次数有限.

若计息的“期”的时间间隔无限缩短,从而计息次数 $n \rightarrow \infty$, 这种情况称为连续复利. 这时,由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = A_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}} \right]^{rt} = Ae^{rt}.$$

故若以连续复利计算 t 年末本利和的公式是

$$A_t = A_0 e^{rt}.$$

例 6 贷款 100 万元购买一栋别墅,贷款期限 10 年,年利率 5%,按下述各种情况计算 10 年末的还款数:

(1) 按复利计算,每年计息 2 次;

(2) 按连续复利计算.

解 依题设 $A_0 = 100$ 万元, $r = 5\%$, $t = 10$ 年,求未来值 A_{10} .

(1) 每年计息 2 期,即 $n = 2$,则 10 年末的本利和

$$A_{10} = 100 \times \left(1 + \frac{0.05}{2}\right)^{2 \times 10} \text{ 万元} = 100 \times 1.6386 \text{ 万元} = 163.86 \text{ 万元}.$$

(2) 按连续复利计算,10 年末的本利和

$$A_{10} = 100e^{0.05 \times 10} \text{ 万元} = 100 \times 1.6487 \text{ 万元} = 164.87 \text{ 万元}.$$

已知现在值 A_0 确定未来值 A_t ,这是利息问题. 若已知未来值 A_t ,求现在值 A_0 则是贴现问题,这时,利率 r 称为贴现率.

由连续复利公式得连续贴现公式:

$$A_0 = A_t e^{-rt}.$$

例 7 设年贴现率为 6%，按连续复利贴现，现投资多少万元，20 年末可得 1000 万元？

解 已知 $A_{20}=1000$ 万元， $r=6\%$ ， $t=20$ ，求现在值 A_0 。

$$A_0 = A_{20} e^{-0.06 \times 20} = 1000 \times 0.3012 \text{ 万元} = 301.2 \text{ 万元}.$$

习 题 1.1

A 组

1. 已知数列的通项，试写出数列，并观察判定数列是否有极限，若有极限，请写出其极限：

$$(1) y_n = \frac{n}{3n+1}; \quad (2) y_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}.$$

2. 某公司发行股票，年利率 5%，每股 10 元，12 年后每股价值多少元？（按下面给出的两种情况计算）

(1) 按离散情况计算，每年计息 4 次； (2) 按连续复利计算。

3. 某保险公司发行养老保险基金，年利率 3%，按连续复利计算，20 年后可得 50 万元，问现在应存入多少万元？

B 组

1. 已知数列，试写出数列的通项，并观察判定数列是否有极限，若有极限，试写出其极限：

$$(1) \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots; \quad (2) 0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \dots.$$

2. 某机械设备折旧率为每年 5%，问：连续折旧多少年，其价值是原价值的一半？

§ 1.2 函数的极限

【本节学习目标】 知道当 $x \rightarrow \infty$ 时， $x \rightarrow x_0$ 时，函数 $f(x)$ 极限的概念；知道函数 $f(x)$ 连续的概念。

一、函数的极限

对以 x 为自变量， y 为因变量的函数 $y=f(x)$ ，设其定义域为 D (D 一般是数轴上的一个区间)。当自变量 x 在 D 内变化时，相应的因变量 y ，或者说相应的函数 $f(x)$ 也将随着变化。所谓函数 $f(x)$ 的极限，就是讨论当自变量 x 在某一过程中变化时，相应的函数值 $f(x)$ 的变化趋势。 x 的变化过程是指 $x \rightarrow \infty$ (无穷大) 和 $x \rightarrow x_0$ (定数)。我们先讨论前一种情形。

1. 当 $x \rightarrow \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

先看一个人们熟知的事实。

在某一地区，一种新的、适用的耐用产品上市后，使用的用户数 y (假设这种产品每户用一台) 随着时间 t 的推移将越来越多。时间 t 可以无限延续，但由于该地区的用户数 N 是有限的，所以使用的用户数不可能无限增加，它只能越来越接近某一常数 $A (\leq N)$ ，即使用的

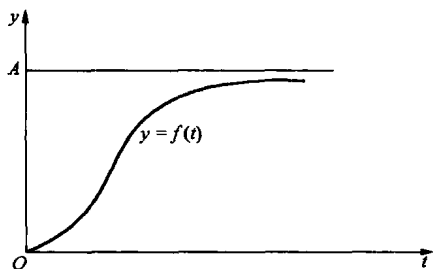


图 1-1

用户数将逐渐趋于饱和状态. 若将 y 看做是 t 的函数 $y=f(t)$, 这就是当自变量 t 趋于无穷大时, 函数 $f(t)$ 的极限问题. 图 1-1 描述了 y 随 t 变化的情况.

x 作为函数 $f(x)$ 的自变量, 若 x 取正值且无限增大, 记作 $x \rightarrow +\infty$; 若 x 取负值且其绝对值 $|x|$ 无限增大, 记作 $x \rightarrow -\infty$; 若 x 既取正值又取负值, 且 $|x|$ 无限增大, 记作 $x \rightarrow \infty$. “当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限”, 就是讨论当自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大时, 相应的函数值 $f(x)$ 的变化趋势.

若当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 趋于常数 A , 则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于无穷大时以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty).$$

例如, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 因 $\frac{1}{x}$ 将无限接近常数 0, 这时, 称函数 $y = \frac{1}{x}$ 当 x 趋于无穷大时以 0 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

观察图 1-2, 曲线(等轴双曲线) $y = \frac{1}{x}$ 有两个分支. 它的右侧分支沿着 x 轴的正方向无限延伸时, 它的左侧分支沿着 x 轴的负方向无限延伸时, 都与直线 $y=0$ 越来越接近, 此时我们称曲线 $y = \frac{1}{x}$ 以直线 $y=0$ 为水平渐近线.

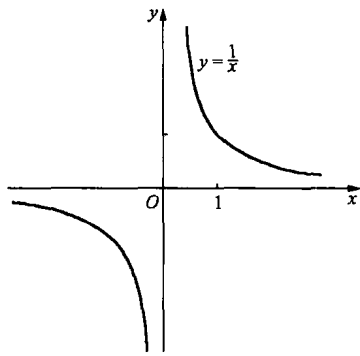


图 1-2

有时, 我们仅讨论 $x \rightarrow -\infty$ 时或 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的变化趋势.

若 $x \rightarrow -\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 趋于常数 A , 则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于负无穷大时以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow -\infty).$$

若 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 趋于常数 A , 则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于正无穷大时以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow +\infty).$$

由 $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 及 $x \rightarrow \infty$ 的含义, 有如下结论:

极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在且等于 A 的充分必要条件是极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 都存在且等于 A , 即