高职高专高等数学系列教材（少学时）

gaozhi jiaoyu

新编经济数学基础

（经济类、管理类）

主编　冯翠莲

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高职高专高等数学系列教材(少学时)

新编经济数学基础

(经济类、管理类)

主　编　冯翠莲

编著者　冯翠莲　李文辉　陆小华

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

新编经济数学基础(经济类、管理类)/冯翠莲主编.—北京:北京大学出版社,2005.8
(高职高专高等数学系列教材)(少学时)
ISBN 7-301-09360-8

Ⅰ.新… Ⅱ.冯… Ⅲ.经济数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 076679 号

书　　名:**新编经济数学基础**(经济类、管理类)
著作责任者:冯翠莲　李文辉　陆小华　编著
责 任 编 辑:曾琬婷　聂一民
标 准 书 号:ISBN 7-301-09360-8/O·0657
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn 电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021
印 刷 者:北京大学印刷厂
经 销 者:新华书店
787mm×960mm　16 开本　14.25 印张　308 千字
2005 年 8 月第 1 版　　2005 年 8 月第 1 次印刷
印　　数:0001—4000 册
定　　价:22.00 元

内 容 简 介

本书是高职高专院校经济类、管理类、文科类各专业少学时的经济数学基础教材. 内容包括：导数，导数的应用，积分及其应用，偏导数及其应用，矩阵与线性方程组，概率初步和统计学初步. 本书本着重基本知识、重素质、重能力、重应用和求创新的总体思路，根据高职高专教育数学教学的特点而编写. 本书每节有“本节学习目标”，每节后配有与教材内容密切相关的 A 组习题和 B 组习题，每章后配有总习题. 书后附有全书习题的答案与解法提示.

本书在内容的叙述上由浅入深、通俗易懂，概念清晰，例题丰富而又贴近实际. 注意归纳数学的辩证思维、解题方法与解题程序，便于自学.

本书也可作为参加经济类、管理类专升本考试学生的教材或教学参考用书.

前　言

高职高专教育是我国高等教育体系的重要组成部分，近几年呈现出前所未有的发展势头．为适应高职高专教育改革的要求，坚持以就业为导向，以能力为本位，面向市场、面向社会，为经济结构调整和科技进步服务的办学宗旨，我们本着重基本知识、重素质、重能力、重应用、开拓思维求创新的总体思路，根据高职高专教育数学教学的特点，编写了高职高专高等数学系列教材（少学时）——《新编经济数学基础》和《新编工科数学基础》．前者供高职高专院校经济类、管理类、文科类各专业学生使用，后者供工科类各专业学生使用．

本教材优化整合了经济数学基础课程的基本内容，注意与后续课程相衔接、与生产、服务、管理第一线的实际需求相适应；力求实现基础性、实用性和发展性三方面的和谐与统一．

本教材的主要特点：

1．突出高职高专少学时的特色．根据高职高专经济类、管理类各专业对数学的基本要求，根据数学的认知规律，将微积分、线性代数及概率统计的基本内容有机地结合在一起，组织和编排全书内容．在不失数学内容学科特点的情况下，采取模块化的思路，便于教师根据教学时数和专业需求选择教学内容．

2．贯彻“理解概念、强化应用”的教学原则．以现实、生动的例题引入基本概念，以简明的语言、并尽量配合几何图形、数表阐述基本知识、基本理论，注重基本方法和基本技能的训练，并给出求解问题的解题程序．同时注重数学概念、数学方法的实用价值，注意培养学生用定量与定性相结合的方法，综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力和创新能力．

3．内容精简实用，条理清楚，叙述通俗易懂，深入浅出，便于自学．

4．每节有“本节学习目标”，每节配有 A 组和 B 组习题，每章配有总习题．书后附有全书习题答案与解法提示．

参加本书编写的有北京经济管理干部学院冯翠莲、北京工业大学李文辉和北京农业职业学院陆小华，最后由冯翠莲统一修改定稿．参加本书编写工作的还有唐声安、葛振三．

本系列教材的编写和出版，得到了北京大学出版社相关领导的大力支持和帮助．在本书的编写过程中，同行专家参加了讨论并提出宝贵意见，在此一并表示感谢．

限于编者水平，不足之处恳请读者批评指正．

编　者

2005 年 6 月

目 录

第一章 导数

本章先介绍函数的极限概念和连续性概念，然后讲述导数概念和求导数的方法.

§1.1 数列的极限

【本节学习目标】 知道数列极限的概念，会用连续复利公式.

一、数列极限的概念

先看一个有关数列极限的实际例子.

我国战国时代哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》引用过一句话："一尺之棰，日取其半，万世不竭."这就是说一根长为一尺的棒头，每天截去一半，这样的过程可以无限地进行下去.

把每天截后剩下的棒的长度写出来(单位：尺)：

第 1 天剩下$\frac{1}{2}$，第 2 天剩下$\frac{1}{2^2}$，第 3 天剩下$\frac{1}{2^3}$，…，第 n 天剩下$\frac{1}{2^n}$，….

这样就得到一列数

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots.$$

这一列数就称为数列.

随着天数的推移，剩下的棒的长度越来越短，显然，当天数 n 无限增大时，剩下的棒的长度将无限缩短，即剩下的棒的长度$\frac{1}{2^n}$将无限接近于数 0. 这时我们就称由剩下的棒的长度构成的上述数列以常数 0 为极限. 并记作

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.$$

一般，按正整数顺序排列的无穷多个数，称为数列. 数列通常记作

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_n,\ \cdots,$$

或简记作$\{y_n\}$. 数列的每个数，称为数列的**项**，依次称为第一项，第二项，…. 第 n 项 y_n 称为数列的**通项**或**一般项**.

例如，我们已经知道的等差数列是

$$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ \cdots,\ a_1+(n-1)d,\ \cdots,$$

其首项是 a_1，公差是 d，通项 $a_n=a_1+(n-1)d$.

等比数列是

$$a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ \cdots,\ a_1q^{n-1},\ \cdots,$$

其首项是 a_1，公比是 q，通项 $a_n=a_1q^{n-1}$.

讨论数列$\{y_n\}$的极限，就是讨论：当 n 无限增大时，数列的通项 y_n 的变化趋势，特别是，是否有趋向于某个常数的变化趋势. 为此，我们有如下数列极限概念.

设数列$\{y_n\}$：

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_n,\ \cdots.$$

若当 n 无限增大时，y_n 趋向于常数 A，则称**数列$\{y_n\}$以 A 为极限**，记作

$$\lim_{n\to\infty}y_n=A \quad 或 \quad y_n\to A \quad (n\to\infty).$$

上式前一式子，读作“当 n 趋于无穷大时，y_n 的极限等于 A”；后一式子，读作“当 n 趋于无穷大时，y_n 趋于 A”.

有极限的数列称为**收敛数列**. 没有极限的数列称为**发散数列**.

例 1 数列$\left\{1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$：

$$0,\ 1+\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{4},\ 1-\frac{1}{5},\ \cdots,\ 1+\frac{(-1)^n}{n},\ \cdots.$$

当 n 无限增大时，由于$\dfrac{(-1)^n}{n}$无限接近于常数 0，所以其通项 $y_n=1+\dfrac{(-1)^n}{n}$就无限接近于常数 1，即该数列以 1 为极限，可记作

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]=1.$$

例 2 数列$\{(-1)^{n+1}\}$：

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^{n+1},\ \cdots.$$

当 n 无限增大时，数列在数值 1 和 -1 上跳来跳去，不趋于一个常数，该数列没有极限.

例 3 数列$\{n^2\}$：

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \cdots,\ n^2,\ \cdots.$$

当 n 无限增大时，其通项 $y_n=n^2$ 也无限增大，它不趋于任何常数，该数列没有极限.

注意到 $y_n=n^2$ 随着 n 无限增大，它有确定的变化趋势，即取正值且无限增大. 对这种情况，我们借用极限的记法表示它的变化趋势，记作

$$\lim_{n\to\infty}n^2=+\infty \quad 或 \quad n^2\to+\infty\ (n\to\infty),$$

并称该数列的极限是**正无穷大**.

同样，对数列$\{-\sqrt{n}\}$，$\{(-1)^n n\}$，则可分别记作

$$\lim_{n\to\infty}(-\sqrt{n})=-\infty,\quad \lim_{n\to\infty}(-1)^n n=\infty,$$

前者称数列的极限是$-\infty$，后者称数列的极限是无穷大.

例 4 考查极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 是否存在.

解 将数列$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$取值计算，取小数点后的有效位数为 5 位，考查数列取值的趋势，见表 1-1.

表 1-1

n	1	1000	5000	10000	100000	1000000	2000000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2.71692	2.71801	2.71815	2.71827	2.71828	2.71828

由表 1-1 看出，该数列是单调增加的；若再仔细分析表中的数值会发现，随着 n 增大，数列后项与前项的差值在减少，而且减少得相当快；最后两项，项数相隔 100 万项，而 5 位有效位数相同. 这表明，数列的通项 $y_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 当 n 无限增大时，它将趋于一个常数. 可以推出，该数列$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$有极限，且其极限为 e，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

其中 e=2.718281828459……，是一个无理数.

由上述极限还可推出下述极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}=\mathrm{e}.$$

例 5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{4n}$.

解 由幂的运算性质

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{4n}=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^4,$$

于是
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{4n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^4=\mathrm{e}^4.$$

二、连续复利公式

从经济学角度看，货币有时间价值. 比如，现在的一万元钱比若干年后的一万元钱要值

钱,或者说若干年后一万元钱的现在价值没有现在一万元钱的价值高.前后两个时间点货币价值之所以不同,其中就是因为有一个利息问题.利息就是在一个时间间隔内因使用货币而付出的钱的代价.

作为数列极限概念的应用,这里介绍连续复利问题.

设 A_0 是本金,又称**现在值**,r 是年利率,t 是时期(单位:年),A_t 是 t 年末的本利和,又称**未来值**.

复利就是利息加入本金再获取利息.即将投资于每期末所得利息加入该期的本金,并以此作为下一期的本金,继续投资.

若以一年为 1 期计算利息,按复利计算 t 年末本利和的公式是

$$A_t = A_0(1+r)^t.$$

若一年计息 n 期,并以 $\frac{r}{n}$ 为每期的利息,按复利计息,则 t 年末的本利和是

$$A_t = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

上述计息的"期"是确定的时间间隔,因而一年计息次数有限.

若计息的"期"的时间间隔无限缩短,从而计息次数 $n\to\infty$,这种情况称为**连续复利**.这时,由于

$$\lim_{n\to\infty}A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = A_0\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rt} = A\mathrm{e}^{rt}.$$

故若以连续复利计算 t **年末本利和的公式是**

$$A_t = A_0\mathrm{e}^{rt}.$$

例 6 贷款 100 万元购买一栋别墅,贷款期限 10 年,年利率 5%,按下述各种情况计算 10 年末的还款数:

(1) 按复利计算,每年计息 2 次;

(2) 按连续复利计算.

解 依题设 $A_0=100$ 万元,$r=5\%$,$t=10$ 年,求未来值 A_{10}.

(1) 每年计息 2 期,即 $n=2$,则 10 年末的本利和

$$A_{10} = 100\times\left(1+\frac{0.05}{2}\right)^{2\times10}\text{ 万元} = 100\times1.6386\text{ 万元} = 163.86\text{ 万元}.$$

(2) 按连续复利计算,10 年末的本利和

$$A_{10} = 100\mathrm{e}^{0.05\times10}\text{ 万元} = 100\times1.6487\text{ 万元} = 164.87\text{ 万元}.$$

已知现在值 A_0 确定未来值 A_t,这是利息问题.若已知未来值 A_t,求现在值 A_0 则是贴现问题,这时,利率 r 称为贴现率.

由连续复利公式得连续贴现公式:

$$A_0 = A_t\mathrm{e}^{-rt}.$$

例 7 设年贴现率为 6%，按连续复利贴现，现投资多少万元，20 年末可得 1000 万元？

解 已知 $A_{20}=1000$ 万元，$r=6\%$，$t=20$，求现在值 A_0.

$$A_0 = A_{20}\mathrm{e}^{-0.06\times 20} = 1000\times 0.3012\text{ 万元} = 301.2\text{ 万元}.$$

习 题 1.1

A 组

1. 已知数列的通项，试写出数列，并观察判定数列是否有极限，若有极限，请写出其极限：

(1) $y_n=\dfrac{n}{3n+1}$； (2) $y_n=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n+1}$.

2. 某公司发行股票，年利率 5%，每股 10 元，12 年后每股价值多少元？(按下面给出的两种情况计算)

(1) 按离散情况计算，每年计息 4 次； (2) 按连续复利计算.

3. 某保险公司发行养老保险基金，年利率 3%，按连续复利计算，20 年后可得 50 万元，问现在应存入多少万元？

B 组

1. 已知数列，试写出数列的通项，并观察判定数列是否有极限，若有极限，试写出其极限：

(1) $\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{27},\dfrac{1}{81},\cdots$； (2) $0,1,\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{3},\cdots$.

2. 某机械设备折旧率为每年 5%，问：连续折旧多少年，其价值是原价值的一半？

§1.2 函数的极限

【本节学习目标】 知道当 $x\to\infty$ 时，$x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 极限的概念；知道函数 $f(x)$ 连续的概念.

一、函数的极限

对以 x 为自变量，y 为因变量的函数 $y=f(x)$，设其定义域为 D(D 一般是数轴上的一个区间). 当自变量 x 在 D 内变化时，相应的因变量 y，或者说相应的函数 $f(x)$ 也将随着变化. 所谓函数 $f(x)$ 的极限，就是讨论当自变量 x 在某一过程中变化时，相应的函数值 $f(x)$ 的变化趋势. x 的变化过程是指 $x\to\infty$(无穷大)和 $x\to x_0$(定数). 我们先讨论前一种情形.

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

先看一个人们熟知的事实.

在某一地区，一种新的、适用的耐用产品上市后，使用的用户数 y(假设这种产品每户用一台)随着时间 t 的推移将越来越多. 时间 t 可以无限延续，但由于该地区的用户数 N 是有限的，所以使用的用户数不可能无限增加，它只能越来越接近某一常数 $A(\leqslant N)$，即使用的

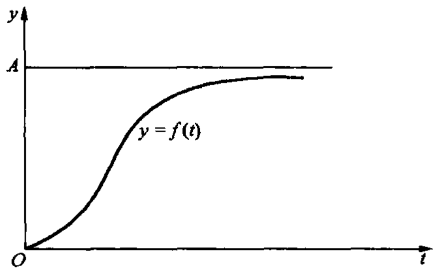

图 1-1

用户数将逐渐趋于饱和状态. 若将 y 看做是 t 的函数 $y=f(t)$，这就是当自变量 t 趋于无穷大时，函数 $f(t)$ 的极限问题. 图 1-1 描述了 y 随 t 变化的情况.

x 作为函数 $f(x)$ 的自变量，若 x 取正值且无限增大，记作 $x\to+\infty$；若 x 取负值且其绝对值 $|x|$ 无限增大，记作 $x\to-\infty$；若 x 既取正值又取负值，且 $|x|$ 无限增大，记作 $x\to\infty$. “当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限”，就是讨论当自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大时，相应的函数值 $f(x)$ 的变化趋势.

若当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 趋于常数 A，则称**函数 $f(x)$ 当 x 趋于无穷大时以 A 为极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

例如，当 $x\to\infty$ 时，因 $\frac{1}{x}$ 将无限接近常数 0，这时，称函数 $y=\frac{1}{x}$ 当 x 趋于无穷大时以 0 为极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

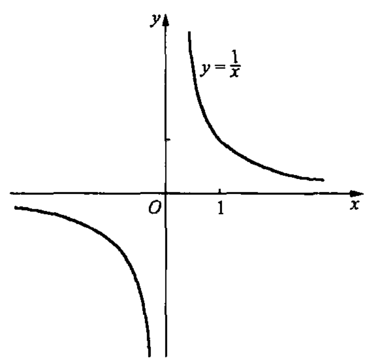

图 1-2

观察图 1-2，曲线（等轴双曲线）$y=\frac{1}{x}$ 有两个分支. 它的右侧分支沿着 x 轴的正方向无限延伸时，它的左侧分支沿着 x 轴的负方向无限延伸时，都与直线 $y=0$ 越来越接近，此时我们称曲线 $y=\frac{1}{x}$ 以直线 $y=0$ 为水平渐近线.

有时，我们仅讨论 $x\to-\infty$ 时或 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势.

若 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 趋于常数 A，则称**函数 $f(x)$ 当 x 趋于负无穷大时以 A 为极限**，记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to-\infty).$$

若 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 趋于常数 A，则称**函数 $f(x)$ 当 x 趋于正无穷大时以 A 为极限**，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to+\infty).$$

由 $x\to-\infty$，$x\to+\infty$ 及 $x\to\infty$ 的含义，有如下**结论**：

极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ **存在且等于 A 的充分必要条件**是极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 都存在且等于 A，即