最新版

全国硕士研究生入学统一考试历年试题

名家解析及预测

理工数学一

（修订本）

刘 斌 编

海洋出版社

最新版
全国硕士研究生入学统一考试
历年试题名家解析及预测

理工数学一

(修订本)

刘 斌 编

海洋出版社
2001年·北京

图书在版编目（CIP）数据

最新版全国硕士研究生入学统一考试历年试题名家解析及预测．理工数学一/刘斌编．－北京：海洋出版社，2001 ISBN 7－5027－4957－8

Ⅰ．最… Ⅱ．刘… Ⅲ．高等数学－研究生－入学考试－试题②高等数学－研究生－入学考试－试题 Ⅳ．G643－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 15332 号

海洋出版社 出版发行
（100081 北京市海淀区大慧寺路 8 号）
北京市房山印刷厂印刷 新华书店发行所经销
2001 年 2 月第 2 版 2001 年 2 月北京第 1 次印刷
开本：787×1092 1/16 印张：84.125（总）
字数：1920 千字（总） 印数：3000 册
共 7 册 定价：112.00 元（每册 16.00 元）

本书特点

1. 全国考研辅导名家主笔。
2. 解析透彻，权威性强。
3 掌握命题规律，预测准确，切题率高。

名家解析及预测

责任编辑:田家作
总 策 划:谭隆全
封面设计:东　方

出版说明

本套丛书具有资料完整、分析详细、解剖透彻和技巧灵活的特点。首先，汇集了1987～2001年数学，1991～2001年政治、英语的历届研究生入学考试试题，包括理科政治、文科政治、英语、理工数学一、理工数学二、经济数学三、经济数学四，共七册；其次，真正做到了逐题解析，透彻详细，论证严密，特别是填空题和选择题均给出了详细的解答过程，还对命题思路、解题的重点、难点进行了深入解析，并注重解题思路和规律的分析—总结与方法—技巧的提炼；最后对命题趋势作出预测，切题率高。

自从1987年全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试以来，至今已有15年，共命制试卷100余份，数千道试题。这些试题是广大参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，它既反映了《考试大纲》对考生数学、英语和政治方面知识、能力和水平的要求，展示出统考以来三门基础课考试的全貌，又蕴涵着命题专家在《考试大纲》要求下的命题思想，是广大考生和教师了解、分析、研究全国硕士研究生入学统一考试最直接、最宝贵的第一手资料。

鉴于研究生入学统一考试已超过10届，所以很难保证每年的试题都是最新编制的。事实上，近几年的考题都与往年的试题有相当一部分是雷同的。比如，2001年数学一的第一大题第(1)小题与2000年数学二第二大题第(5)小题，2001年数学一的第六大题与1997年数学一的第三大题第(2)小题，2001年数学一的第九大题与1996年数学三的第十大题，2001年数学二的第一大题第(5)小题与2000年数学一的第(4)小题，2001年数学三、四的第二大题第(1)小题与1996年数学一第二大题第(2)小题，2001年数学三、四第二大题第(3)小题与1995年数学一第二大题第(5)小题，2001年数学一第三大题与1992年数学三第四大题，2001年数学三、四第七大题与1996年数学三第六大题，2000年数学一的第三二大题第(2)小题与1988年数学一的第二大题第(3)小题，2000年数学三、四的第九大题与1991年数学一的第七大题、1998年数学二的第十三大题，2000年数学一的第七大题与1995年数学一的第一大题第(4)小题，2000年数学二的第二大题第(2)小题与1997年数学二的第二大题第(3)小题，2000年数学一的第三大题与1991年数学二的第一大题第(5)小题，2000年数学二的第二大题第(5)小题与1997年数学二的第三大题第(5)小题，2000年数学三、四的第五大题与1991年数学三的第七大题、数学四第八大题，2000年数学二的第九大题与1998年数学三的第二大题第(1)小题，2000年数学二的第一大题第(3)小题与1998年数学四的

第一大题第(3)小题,2000 年数学四的第十大题与 1999 年数学四的第十大题,1999 年数学一的第三大题与 1995 年数学一的第三大题第(1)小题,1999 年数学一填空题第(2)小题与 1998 年选择题的第(1)小题,1999 年数学一选择题第(3)小题与 1989 年选择题第(4)小题,1999 年数学二第十二大题与 1991 年数学一第七大题,1999 年数学三填空题第(1)小题与 19994 年数学四第五大题,1999 年数学三、四选择题第(2)小题与 1997 年数学三、四填空题第(2)小题,1999 年数学三第九大题与 1997 年数学一第七大题第(2)小题,1999 年数学四第九大题与 1994 年数学三第十大题等等都是相同或非常相似的,且解题思路几乎完全一样,可见仅在最近两年的数学考题中就有多达 20 余道题是与往届考题雷同的,考生若把这些历年试题全部消化巩固,将为考研成功打下坚实的基础。正因为如此,广大准备考研的同学和教师都迫切希望有一套完整的历年考试资料作为参考,共享这些优秀的试题。编者们多年来一直在做这方面的收集、整理工作,现在出版的这套丛书相信能满足大家的要求。

本丛书的考点预测部分是各位编者、专家从事考研命题研究的结晶,具有极高的切题率。比如,从去年版本来看,2001 年数学试题中的有关曲率、梯度与散度以及弹性等等;在 2001 年英语试题中语法结构方面预测到第 1 题,第 2 题,第 5 题,第 9 题,第 10 题;词汇方面预测到第 11 题,第 13 题,第 14 题,第 16 题,第 18 题,第 20 题,第 22 题,第 23 题,第 25 题,第 30 题;阅读理解方面预测到第 2 篇;短文写作方面准确预测到不是图表题(而 2000 年准确预测到是图表作文题)。

本丛书的文科政治和理科政治的 4 位作者中,有 3 位曾是教育部原政治命题组组长或命题组成员,1 位是长期阅卷,并一直担任政治阅卷组组长。现在都是北京市和全国各大城市举办的大型考研辅导班和串讲班的主讲教授。所以,他们对历年试题的解析及预测的权威性强,可信度高。

本书对 2002 年的命题趋势作了新的预测,相信对即将参加研究生入学考试的广大同学具有重要的参考价值。

由于出版时间比较仓促,难免还有不当之处,恳请广大读者朋友批评指正,以使本系列丛书能不断完善。

考研试题研究组

目　录

第一篇 全国硕士研究生入学统一考试 历年理工数学一试题、答案及解析

2001 年全国硕士研究生入学统一考试 理工数学一试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

(1) 设 $y = \mathrm{e}^x(C_1\sin x + C_2\cos x)$($C_1, C_2$ 为任意常数)为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解,则该方程为________.

(2) 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)\big|_{(1,-2,2)} =$ ________.

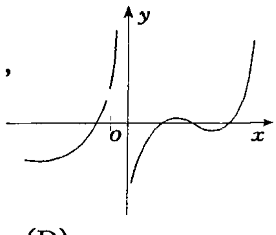
(3) 交换二次积分的积分次序:$\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{2}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x =$ ________.

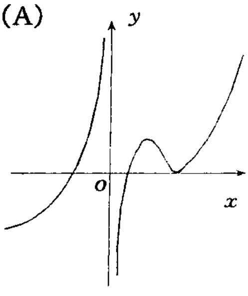
(4) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵,则 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})^{-1} =$ ________.

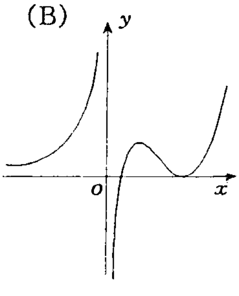
(5) 设随机变量 X 的方差为 2,则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X - E(X)| \geqslant 2\} \leqslant$ ________.

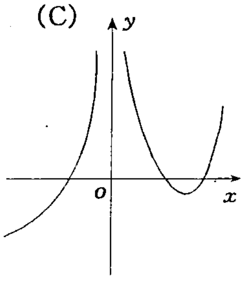
二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

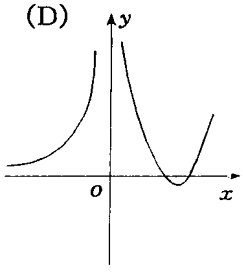
(1) 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导,$y = f(x)$ 的图形如右图所示,则导函数 $y = f'(x)$ 的图形为



(A)


(B)


(C)


(D)


【 】

(2) 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义,且 $f'_x(0,0) = 3, f'_y(0,0) = 1$,则

(A) $dz|_{(0,0)} = 3dx + dy$

(B) 曲面 $z = f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $\{3,1,1\}$

(C) 曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{1,0,3\}$

(D) 曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{3,0,1\}$ 【 】

(3) 设 $f(0) = 0$，则 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 可导的充要条件为

(A) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h^2} f(1 - \cos h)$ 存在　　(B) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h^2} f(h - \sin h)$ 存在　　(D) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}[f(2h) - f(h)]$ 存在 【 】

(4) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$

(A) 合同且相似　　(B) 合同但不相似

(C) 不合同但相似　　(D) 不合同且不相似 【 】

(5) 将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于

(A) -1　　(B) 0　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) 1 【 】

三、(本题满分 6 分)

求 $\displaystyle\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx$.

四、(本题满分 6 分)

设函数 $z = f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1) = 1$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = 2$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} = 3$，$\varphi(x) = f(x, f(x,x))$. 求 $\left.\dfrac{d}{dx}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

五、(本题满分 8 分)

设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x^2}{x}\arctan x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$，试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

六、(本题满分 7 分)

计算 $I = \displaystyle\oint_L (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz$，其中 L 是平面 $x + y + z = 2$ 与柱面 $|x| + |y| = 1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向.

七、(本题满分 7 分)

设 $y = f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x) \neq 0$,试证:

(1) 对于 $(-1,1)$ 内的任一 $x \neq 0$,存在唯一的 $\theta(x) \in (0,1)$,使

$$f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x)$$

成立;

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \theta(x) = \dfrac{1}{2}$.

八、(本题满分 8 分)

设有一高度为 $h(t)$(t 为时间)的雪堆在融化过程中,其侧面积满足方程 $z = h(t) - \dfrac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}$(设长度单位为厘米,时间单位为小时),已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数 0.9),问高度为 130(厘米)的雪堆全部融化需多少小时?

九、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 为线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,$\boldsymbol{\beta}_1 = t_1\boldsymbol{\alpha}_1 + t_2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 = t_1\boldsymbol{\alpha}_2 + t_2\boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s = t_1\boldsymbol{\alpha}_s + t_2\boldsymbol{\alpha}_1$,其中 t_1, t_2 为实常数.试问 t_1, t_2 满足什么关系时,$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 也为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

十、(本题满分 8 分)

已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与三维向量 $\boldsymbol{x}$,使得向量组 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关,且满足

$$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{Ax} - 2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$$

(1) 记 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})$,求 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PBP}^{-1}$;

(2) 计算行列式 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}|$.

十一、(本题满分 7 分)

设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松分布,每位乘客在中途下车的概率为 $p(0 < p < 1)$,且中途下车与否相互独立.以 Y 表示在中途下车的人数,求:

(1) 在发车时有 n 个乘客的条件下,中途有 m 人下车的概率;

(2) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.

十二、(本题满分 7 分)

设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)(\sigma > 0)$,从该总体中抽取简单随机样本 $X_1, X_2, \cdots, X_{2n}(n \geqslant 2)$,其样本均值为 $\bar{X} = \dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n} X_i$,求统计量 $Y = \sum\limits_{i=1}^{n}(X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2$ 的数学期望 $E(Y)$.

2001年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学一试题答案及解析

一、填空题

(1) $\underline{y''-2y'+2y=0}$.

[解析]

由题设知,此方程的两个特征值为 $\lambda_1=1+i,\lambda_2=1-i$

故对应特征方程为

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=0$$

即 $$\lambda^2-2\lambda+2=0$$

故所求微分方程为 $$y''-2y'+2y=0$$

(2) $\underline{\frac{2}{3}}$.

[解析]

本题直接用公式计算即可.

$$\because \mathrm{grad}r=\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{j}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k}$$

$$=\frac{x}{r}\vec{i}+\frac{y}{r}\vec{j}+\frac{z}{r}\vec{k}$$

$$\therefore \mathrm{div}(\mathrm{grad}r)=\frac{\partial(\frac{x}{r})}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{y}{r})}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{z}{r})}{\partial z}=\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}=\frac{2r^2}{r^3}=\frac{2}{r}$$

故 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}r)\mid_{(1,-2,2)}=\dfrac{2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{2}{3}$

(3) $\underline{\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y}$.

[解析]

本题的关键是当 y 从 -1 变为0时,$1-y$ 总是小于2,故 x 的变化范围从2变到$1-y$,按照从小至大的顺序应改为从 $1-y$ 变到2.这只要先交换积分限即可.

$$\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_2^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=-\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_{1-y}^2 f(x,y)\mathrm{d}x=\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y$$

(4) $\underline{\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})}$.

[解析]

应设法分解出 $A-E$ 因子. 由 $A^2+A-4E=0$

有
$$(A-E)(A+2E)=2E$$

即
$$(A-E)\cdot\frac{1}{2}(A+2E)=E$$

故
$$(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2E)$$

(5) $\frac{1}{2}$.

[解析]

直接利用切比雪夫不等式 $P\{|X-EX|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{DX}{\varepsilon^2}$ 即可.

$$P\{|X-EX|\geqslant 2\}\leqslant\frac{DX}{2^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

二、选择题

(1) 应选(D).

[解析]

由图可知,当 $x<0$ 时,$f(x)$ 单调递增,故必有 $f'(x)>0(x<0)$,即在 y 轴左侧 $f'(x)$ 与 x 轴无交点. 又 $f(x)$ 在 $x>0$ 内有三个零点,由罗尔定理知,$f'(x)$ 在 $x>0$ 内有两个零点. 综上分析知,应选(D).

(2) 应选(C).

[解析]

偏导存在不一定全微分存在,因此A不正确;曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 的法向量为 $\vec{n}=\pm\{f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0),-1\}$,代入验算知 B 也不成立. 空间曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$ 可表示为参数 x 的方程 $\Gamma:\begin{cases}x=x\\y=0\\z=f(x,0)\end{cases}$,其在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为

$$\vec{S}=\pm\{1,0,f'_x(0,0)\}=\pm\{1,0,3\}$$

故知 C 为正确选项.

(3) 应选(B).

[解析]

用反例说明即可.

例如 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导,但(A)、(C) 均成立,故(A)、(C) 不可能是正确答案.

又如 $f(x)=\begin{cases}1,x\neq 0\\0,x=0\end{cases}$,则(D) 成立,但显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导,故(D) 也不是正确选项.

只有(B) 是应选的正确答案.

事实上，若 $f'(0)$ 存在，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)\xlongequal{1-e^h=t}\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{\ln(1-t)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}\cdot\frac{t}{\ln(1-t)}=-f'(0)$$

存在；

反过来，若 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\xlongequal{1-e^h=x}\lim_{h\to 0}\frac{f(1-e^h)}{h}\cdot\frac{h}{1-e^h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-e^h)}{h}$$

存在，即 $f'(0)$ 存在.

(4) 应选(A).

[**解析**]

易知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的特征值均为 4,0,0,0，且 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵，故存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}4&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BQ}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BQ}=\begin{pmatrix}4&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}$$

可见 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均合同且相似于同一矩阵，故 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 既合同又相似.

(5) 应选(A).

[**解析**]

由题设 $X=n-Y$，故相关系数 $\rho_{XY}=-1$.

三、[解析]

分部积分得

$$\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx=-\frac{1}{2}\int\arctan e^x d^x d(e^{-2x})$$

$$=-\frac{1}{2}[e^{-2x}\arctan e^x-\int\frac{de^x}{e^{2x}(1+e^{2x})}]$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{-2x}\arctan e^x+\bar{e}^x+\arctan e^x)+C$$

[**注**] 答案中缺任意常数 C 扣 1 分.

四、[解析]

先求出 $\varphi(1)$，再用复合函数求导公式.

$$\varphi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1$$

$$\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}=[3\varphi^2(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}]\Big|_{x=1}$$

$$=3\varphi^2(x)[f'_1(x,f(x,x))+f'_2(x,f(x,x))(f'_1(x,x)+f'_2(x,x))]\Big|_{x=1}$$

$$=3\cdot 1\cdot[2+3(2+3)]=51$$

五、[解析]

注意先对 $\arctan x$ 求导,得 $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,把此函数展开为幂级数,然后再积分一次即可.

因 $$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, x \in (-1,1)$$

故 $$\arctan x = \int_0^x (\arctan x)' \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, x \in [-1,1]$$

于是 $$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$$

$$= 1 + \sum_{n}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{1-4n^2} x^{2n}, x \in [-1,1]$$

因此 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{1}{2}[f(1)-1] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

六、[解析]

记 S 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围成部分的上侧,D 为 S 在 xOy 坐标面上的投影.由斯托克斯公式得

$$I = \iint_S (-2y-4z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (-2z-6x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (-2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S (4x+2y+3z)\mathrm{d}S$$

$$= -2\iint_D (x-y+6)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -12\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -24$$

七、[解析]

证法 1

(1) 任给非零 $x \in (-1,1)$,由拉格朗日中值定理得

$$f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x) \quad (0 < \theta(x) < 1)$$

因为 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续且 $f''(x) \neq 0$,所以 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内不变号.不妨设 $f''(x) > 0$,则 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内严格单增,故 $\theta(x)$ 唯一.

(2) 由泰勒公式得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2, \xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}$$

所以 $$xf'(\theta(x)x) = f(x) - f(0) = f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2$$

从而 $$\theta(x)\frac{f'(\theta(x)x) - f'(0)}{\theta(x)x} = \frac{1}{2}f''(\xi)$$

由于 $$\lim_{x\to 0}\frac{f'(\theta(x)x) - f'(0)}{\theta(x)x} = f''(0)$$

$$\lim_{x\to 0}f''(\xi) = \lim_{\xi\to 0}f''(\xi) = f''(0)$$

故 $$\lim_{x\to 0}\theta(x) = \frac{1}{2}$$

证法 2

(1) 同证法 1 中的(1).

(2) 对于非零 $x \in (-1,1)$,由拉格朗日中值定理得

$$f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x) \quad (0 < \theta(x) < 1)$$

所以 $$\frac{f'(\theta(x)x) - f'(0)}{x} = \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2}$$

由于 $$\lim_{x\to 0}\frac{f'(\theta(x)x) - f'(0)}{\theta(x)x} = f''(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \frac{1}{2}f''(0),$$

故 $$\lim_{x\to 0}\theta(x) = \frac{1}{2}.$$

八、[解析]

记 V 为雪堆体积,S 为雪堆的侧面积,则

$$V = \int_0^{h(t)}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}[h^2(t)-h(t)z]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{h(t)}\frac{1}{2}\pi[h^2(t) - h(t)z]\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}h^3(t)$$

$$S = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{h^2(t)}{2}}\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{h^2(t)}{2}}\sqrt{1 + \frac{16(x^2 + y^2)}{h^2(t)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}[h^2(t) + 16r^2]^{\frac{1}{2}}r\mathrm{d}r = \frac{13\pi h^2(t)}{12}$$

由题意知 $$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -0.9S,$$

所以 $$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{13}{10}$$

因此 $$h(t) = -\frac{13}{10}t + C$$

由 $h(0) = 130$,得

$$h(t) = -\frac{13}{10}t + 130$$